



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.



B

938,934

PROPERTY OF

*The  
University of  
Michigan  
Libraries*

1817

ARTES SCIENTIA VERITAS









DIE  
MATHEMATISCHEN UND PHYSIKALISCHEN  
THEORIEEN  
DER  
HÖHEREN GEODÄSIE.





DIE  
MATHEMATISCHEN UND PHYSIKALISCHEN  
THEORIEEN  
DER  
HÖHEREN GEODÄSIE.

---

II. THEIL:  
DIE PHYSIKALISCHEN THEORIEEN,  
MIT UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE MATHEMATISCHE ERDGESTALT  
AUF GRUND DER BEOBACHTUNGEN.

---

VON  
*Friedrich Robert*  
**DR. F. R. HELMERT,**  
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU AACHEN.

---

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN UND ZWEI LITHOGRAPHIERTEN TAFELN.



LEIPZIG,  
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.  
1884.

QB  
283  
.H48  
v.2  
cop.2

UNVERANDERTER NACHDRUCK

MINERVA G.M.B.H. FRANKFURT/MAIN  
1962

MIT GENEHMIGUNG DER B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT

STUTTGART

## Vorwort.

Die physikalischen Methoden der höheren Geodäsie erfreuten sich in dem letzten Jahrzehnt einer lebhaften, immer mehr gesteigerten Beachtung. In Erkenntnis ihrer Wichtigkeit faßte ich daher den Entschluß zu einer systematischen Darstellung der grundlegenden Theorien, mit deren Ausarbeitung ich bereits 1877 begann. Die Vollendung und Herausgabe verzögerte sich durch die inzwischen erkannte Notwendigkeit, eine Darstellung der mathematischen Theorien vorzuschicken, und hatte um so weniger Eile, als 1878 *H. Bruns* in seiner Abhandlung „die Figur der Erde“ einen überaus lichtvollen Grundriß der Sache gab. Es schien mir schließlich sehr wünschenswert, die ausführliche Bearbeitung der Theorien durch praktische Resultate für die Erdgestalt zu ergänzen, um dem nun vorliegenden Buche nach Möglichkeit Wert zu verleihen.

Dasselbe zerfällt in acht Kapitel. Die drei ersten Kapitel geben vom Standpunkte der Potentialtheorie aus analytische Untersuchungen über die Figur der Erde, woran sich im vierten Kapitel synthetische Betrachtungen über den Einfluß gegebener Störungsmassen anschließen; im fünften Kapitel folgen alsdann kritische Untersuchungen über die bis dahin vorausgesetzte Unveränderlichkeit der Erdgestalt. Die Aufschlüsse, welche die Astronomie über Figur und Inneres der Erde gewährt, werden im sechsten Kapitel besprochen, und ein siebentes und achtes Kapitel erörtern die allgemeinen Grundlagen des geometrischen und des trigonometrischen Nivellements.

Die Theorie der Figur der Erde beginnt im ersten Kapitel mit der analytischen Formulierung des Begriffes der Beschleunigung der Schwerkraft und der Einführung des Potentials derselben, worauf die allgemeinen Eigenschaften der Niveauflächen, insbesondere ihre von *H. Bruns* entdeckten Krümmungs-Diskontinuitäten behandelt werden.

Das zweite Kapitel stellt die Relationen für verschiedene geodätische Elemente auf, welche der allgemeinen sphäroidischen Form der Niveauflächen, der Normalform (S. 89), entsprechen. Hier findet insbesondere das *Clairautsche Theorem* seine Darstellung in einfacher (S. 76) und erweiterter Form (S. 78). Der Wichtigkeit dieses Theoremes wegen hielt ich es für angemessen, eingehend seine Geschichte zu geben; daß sich daran einige Betrachtungen über rotierende Flüssigkeitssphäroide schließen, wird wohl nicht unpassend erscheinen.

Für die allgemeine Abplattung des Erdsphäroides gelange ich durch Diskussion von 122 Pendellängen zu dem Werte  $1 : 299,26 \pm 1,26$ . Bei der Ableitung desselben weiche ich von früheren Rechnern erheblich ab. Zunächst bei der Reduktion aufs Meeresniveau. Ich vervollständige die übliche Reduktion durch einen Zusatz, welcher der



Kondensation der (sichtbaren) Störungsmassen der Erdoberfläche auf eine zur Meeresfläche parallele Fläche in drei Meilen Tiefe entspricht und erlange dadurch erstens den Vorteil, daß die Bedenken über die Anwendbarkeit des Ergebnisses des Clairautschen Theoremes auf die wirkliche Abplattung der Erde schwinden (S. 237), und erziele zweitens eine geradezu überraschende Übereinstimmung zwischen den Pendellängen auf dem Festland und denen an den Küsten einerseits, wie für die nach Zonen geographischer Breite von 10 zu 10° gruppierten Pendellängen andererseits (S. 226 u. 240), so daß an der großen Sicherheit des Endresultates nicht zu zweifeln ist. Es wird den Leser allerdings vielleicht im ersten Augenblick befremden, wenn er erfährt, daß ich die Pendellängen für die kleinen oceanischen Inseln von der Rechnung ausgeschlossen habe. Da aber, wie ich wohl zuerst zeige, im Mittel der Nord- und Südhälfte der Erdoberfläche in jeder Breite die Ausdehnungen von Festland und von Meer nach der geographischen Länge in nahezu gleichem Verhältnis stehen, und da ferner die Inselstationen in verschiedenen Breiten im Vergleiche zu Festland- und Küstenstationen wesentlich dasselbe Verhalten zeigen, so entspricht das Verfahren lediglich der Forderung der Theorie nach gleichmäßiger Verteilung der Pendelstationen über die Erdoberfläche, und die Vernachlässigung der Inselstationen ist nur eine scheinbare (S. 238 und 242).

Die kontinentalen Undulationen des Geoides gegen seine Normalform hat man in neuerer Zeit vielfach aus den Anomalieen der Schwerkraft nach einer einfachen Proportionalität berechnet. Daß dieses Verfahren zu groben Irrtümern führen kann und theoretisch unhaltbar ist, wird durch Vervollständigung der betreffenden Formel (S. 261 u. 262) nachgewiesen. Aus einzelnen Werten jener Anomalieen würde man darnach nur „die Dicke der ideellen störenden Schicht“ unterhalb der Station finden können, wenn bereits die Störung des geoidischen Radiusvektors daselbst ermittelt wäre, wozu nach *Stokes* (S. 249) die Kenntnis der Schwerkraft auf der ganzen Erdoberfläche erforderlich ist.

Um nun doch mit dem vorhandenen Beobachtungsmaterial einigen Aufschluß über die kontinentalen Undulationen zu erhalten, ermittle ich im vierten Kapitel (S. 313 u. ff.) die Störungswirkung der fünf als abgestumpfte, 4000<sup>m</sup> dicke Kreiskegel betrachteten Kontinente der Erde auf einer homogen geschichteten Erdkugel. Ich begnüge mich dabei nicht mit der Ausrechnung der radialen Störungen (Tafel I), sondern bestimme auch durch dieselben mit Hilfe eines aus der Potentialtheorie geschöpften Theoremes die Störungen der Schwerkraft, wonach sich zeigt, daß der behandelte Fall dem Zustande der Erde (abgesehen von ihrer Abplattung) nicht entsprechend ist, daß man vielmehr zur Herbeiführung der Übereinstimmung in der Erdrinde noch ideelle (d. h. eventuell denjenigen in dem Erdinneren äquivalente) Störungsmassen annehmen muß. Von den zwei möglichen Fällen: relativer Dichtigkeitsüberschuß der Erdkruste unter den oceanischen Inseln oder relativer Dichtigkeitsmangel unter den Konti-

nenten, besitzt der letztere die grössere Wahrscheinlichkeit, da es für ihn allein und zwar durch die unter den grossen Gebirgen Himalaya und Kaukasus (S. 228) konstatierten Massendefekte ein Analogon giebt. Damit aber gelange ich zu dem Endresultat, daß die Figur der Erde einem einfachen Sphäroid im allgemeinen viel näher kommt als die Störungen der Kontinentalmassen allein (Tafel I) erwarten lassen (S. 365).

Unter diesen Umständen ist der Wert der Gradmessungen zur Bestimmung der allgemeinen Abplattung der Erde erheblich grösser als für den Fall des Bestehens grosser kontinentaler Undulationen des Geoides unterhalb der Kontinente. Mit Rücksicht auf die gegenwärtige Ausbreitung und ungünstige Verteilung der Gradmessungen kann es aber trotzdem nicht befremden, daß der aus ihnen nach *Clarke* folgende Abplattungswert 1 : 294 von dem oben angegebenen ziemlich stark abweicht. Dieser findet auch eine gute Bestätigung sowohl in den Mondstörungen (sechstes Kapitel S. 473) als in der Präzessionskonstanten. Man müßte diese letztere vermutlich erheblich ändern, wollte man an dem von manchen acceptierten Abplattungswerte 1 : 289 festhalten und zugleich der Existenz eines Dichtigkeitsgesetzes für das Erdinnere in Form einer einfachen Potenzreihe grosse Wahrscheinlichkeit zuschreiben, da mit dieser Abplattung und dem Beobachtungswert der Präzessionskonstanten ein Gesetz von solcher Form nicht zu bestehen scheint (S. 488 u. 489).

Nächst den oben erwähnten Untersuchungen enthalten das dritte und vierte Kapitel noch allgemeine Sätze über die kontinentalen Undulationen des Geoides und spezielle Betrachtungen über die Störungswirkungen gegebener Massen der Erdkruste von verschiedener Form.

Der Anfang des fünften Kapitels entwickelt die Störungen des Lotes durch Mond und Sonne; weiterhin werden besonders die kleinen Bewegungen der Erdaxe im Erdkörper, namentlich unter dem Einfluß der Verschiebung von Massen auf der Erdoberfläche, an der Hand der Theorie und Erfahrung behandelt. Im sechsten Kapitel sind u. a. einige Blätter der Untersuchung gewidmet, inwieweit sich der Theorie nach aus Beobachtungen der lokalen Mondparallaxen die geozentrischen Koordinaten eines Ortes bestimmen lassen, wenn angenommen wird, daß die Mondbewegung aus den Mondtafeln nur für je einen halben Tag genau entnommen werden kann. Darnach ist im allgemeinen nur eine unvollständige Lösung dieses Problems der Ortsbestimmung möglich.

Bei der Theorie des geometrischen Nivellements im siebenten Kapitel gelange ich zu der Forderung, daß in Ermangelung strenger Reduktion mittelst der beobachteten Intensität der Schwerkraft bei Berechnung der Meereshöhen wenigstens die Variation der Schwere mit der geographischen Breite berücksichtigt werde und daß man sich hiervon durch die Unmöglichkeit der Berücksichtigung der Anomalieen der Schwere nicht abhalten lassen darf, indem der Einfluß der letzteren in den Resultaten ausgedehnter Nivellements weniger zu fürchten ist, als derjenige der Variation mit der Breite. Beispiels-

weise enthält das unmittelbare Ergebnis eines Nivellements von der Ostsee nach dem Mittelmeer wegen dieser Variation Fehler, die je nach dem genommenen Wege bis zu mehreren Decimetern ansteigen können und sämtlich gleiches Vorzeichen haben. Der Einfluß der Anomalieen der Schwerkraft aber dürfte in diesem Falle kaum mehr als einige Centimeter betragen, welche in den auf verschiedenen Wegen erhaltenen Resultaten nicht notwendig in gleichem Sinne auftreten.

Bei der Theorie der Refraktion im achten Kapitel habe ich mich darauf beschränkt, solche Formeln abzuleiten, welche voraussetzen, daß das Gesetz für die Änderung der Temperatur mit der Höhe durch eine stark konvergente Reihe nach *Taylor* darstellbar ist. Für diesen Fall sind die Formeln allgemein gültig, so daß man die Konstanten aus zweckmäßig angeordneten Beobachtungen bestimmen kann. Ein Zahlenbeispiel ist den von *v. Bauernfeind* publizierten Messungen entnommen. Übrigens trifft gerade in diesem Beispielsfalle, trotzdem mit Tagesmitteln gerechnet ist, die Voraussetzung nicht zu. Obwohl ich nun auch einige Erwägungen darüber anstelle, wie solchen anormalen Verhältnissen beizukommen wäre, glaube ich doch, daß man bei Anwendung des trigonometrischen Verfahrens zur Bestimmung des Geoides nach *Villarceau* und *Bruns* am besten allen theoretischen Erwägungen durch Einschränkung auf mäßige Höhendifferenzen und kurze Distanzen, etwa 15 bis 20 Kilometer, aus dem Wege geht und mit der Kreishypothese rechnet. Wie man aber auch die Anordnung treffen möge, ein sehr mühsames Verfahren bleibt diese Methode des Detail-Studiums der Geoidform immer, und man wird seine Anwendung sicherlich möglichst beschränken. Ich bin überzeugt, daß man durch die Methode der Lotabweichungen (Bd. 1 S. 564 u. ff.) die Form des Geoides ebenso genau und weit rascher findet, wenn man hauptsächlich Meridianprofile durch dichtgedrängte Breitenstationen bearbeitet, und habe für diese empfehlenswerte Methode den Namen *astronomisches Nivellement* vorgeschlagen (S. 599).

Bei der Bearbeitung des Buches bin ich von mehreren Seiten durch Darleihen von Originalwerken und schriftliche Notizen unterstützt worden, was allein es ermöglicht hat, den mir notwendig scheinenden Grad von Vollständigkeit zu erreichen.

Für diese freundliche Unterstützung danke ich auch an dieser Stelle.

Die Tafel I hat Herr *Hegemann*, jetzt vereideter Geometer, während seiner Studienzeit hierselbst nach meinen Rechnungen entworfen, während Tafel II von Herrn *Fenner*, Ingenieur und Assistent der Geodäsie an der Aachener technischen Hochschule, berechnet und gezeichnet ist. Derselbe hat sich auch bei der Revision der Druckbogen in für mich sehr dankenswerter Weise beteiligt.

Aachen, September 1884.

Der Verfasser.



# Inhaltsverzeichnis.

---

## 1. Kapitel. Allgemeine Eigenschaften der Niveauflächen.

	Seite
§ 1. Das Prinzip von <i>d'Alembert</i> . . . . .	1
§ 2. Bewegung des Erdschwerpunktes . . . . .	2
§ 3. Relative Bewegung der Erde gegen ihren Schwerpunkt . . . . .	4
§ 4. Die Zentrifugalkraft . . . . .	5
§ 5. <i>Die Schwerkraft</i> . . . . .	6
§ 6. <i>Das Potential <math>W</math> der Schwerkraft <math>g</math></i> . . . . .	8
§ 7. Die Gleichung der Niveauflächen . . . . .	9
§ 8. <i>Abstand benachbarter Niveauflächen.</i> . . . . .	10
§ 9. Das Potential $W$ hat in jedem Punkte $P$ des Raumes nur einen einzigen Wert . . . . .	11
§ 10. Die Schwerkraft $g$ hat in jedem Punkte einen bestimmten endlichen Wert und eine bestimmte Richtung, ausgenommen für $g = \text{null}$ . .	12
§ 11. $W$ ist eine stetige Funktion des Ortes . . . . .	14
§ 12. Die Schwerkraft ändert sich nach Grösse und Richtung stetig . . .	14
§ 13. Der Lauf der Niveauflächen für $g > \text{null}$ . . . . .	15
§ 14. <i>Die Niveauflächen der Erde in der Nähe der physischen Erdoberfläche</i>	16
§ 15. Die zweiten Differentialquotienten von $W$ . . . . .	19
§ 16. Transformation der Ausdrücke für die ersten Differentialquotienten von $V$ . . . . .	20
§ 17. Die zweiten und höheren Differentialquotienten von $W$ haben be- stimmte endliche Werte und ändern sich stetig, solange der Punkt $P$ sich nicht an einer Stelle befindet, in welcher die Dichtigkeit $\Theta$ Singularitäten hat . . . . .	24
§ 18. Die zweiten Differentialquotienten von $V$ beim Durchgange von $P$ durch Singularitätsstellen der Dichtigkeit . . . . .	25
§ 19. Fortsetzung: $\frac{\partial^2 V}{\partial a'^2}$ . . . . .	28
§ 20. Die übrigen zweiten Differentialquotienten . . . . .	30
§ 21. Transformation der Koordinaten, Differentialgleichung für $V$ und $W$	32
§ 22. <i>Die Unstetigkeit in der Krümmung der Niveauflächen bei dem Durch- gange derselben durch eine Unstetigkeitsstelle der Dichtigkeit.</i> . . . .	35
§ 23. Fortsetzung . . . . .	37
§ 24. Wirkungssphäre der Unstetigkeitsstellen der Dichtigkeit . . . . .	40
§ 25. Potenzreihen für Niveauflächen sind unpraktikabel . . . . .	44
§ 26. Schwerkraft und Lotlinien beim Durchgange durch eine Unstetig- keitsstelle der Dichtigkeit . . . . .	46
§ 27. Die geographischen Meridiane und Parallelen . . . . .	47

2. Kapitel. Bestimmung der Abplattung aus Schweremessungen.		Seite
§ 1.	Entwicklung von $\frac{1}{e}$ in eine Potenzreihe . . . . .	50
§ 2.	Fortsetzung: <i>Die Koeffizienten P</i> . . . . .	52
§ 3.	Die Entwicklung von $\frac{1}{e}$ für $r' = r$ . . . . .	53
§ 4.	Die Koeffizienten <i>P</i> in rechtwinkligen und in Polarkoordinaten. .	56
§ 5.	Das Potential <i>W</i> der Schwerkraft außerhalb . . . . .	58
§ 6.	Das Potential der Anziehung einer homogenen Kugelschale . . . .	60
§ 7.	<i>Kugelfunktionen</i> . . . . .	64
§ 8.	Der Einfluß des Luftmeeres auf das Potential <i>W</i> der Schwerkraft.	68
§ 9.	Erweiterung des Gültigkeitsbereiches der Reihenentwicklung für <i>W</i> außerhalb . . . . .	70
§ 10.	1. Annäherung für das Potential <i>W</i> (außerhalb) . . . . .	72
§ 11.	Fortsetzung: <i>Theorem von Clairaut</i> . . . . .	74
§ 12.	<i>Theorem von Clairaut</i> für ein Niveausphäroid $U = W_0$ , dessen Gleichung eine Kugelfunktion 4. Ranges enthält . . . . .	77
§ 13.	Polargleichung der Meridiankurve dieses Niveausphäroids . . . . .	78
§ 14.	Formeln für die Beschleunigung <i>g</i> der Schwerkraft in Bezug auf dieses Niveausphäroid; Bestimmung von $\mathfrak{D}$ . . . . .	80
§ 15.	<i>Zusammenstellung der Formeln für dieses Niveausphäroid</i> . . . . .	82
§ 16.	Numerische Anwendung der Formeln auf das Niveausphäroid des Geoids . . . . .	83
§ 17.	<i>Die Normalform der Niveauflächen (außerhalb) und das Rotations- ellipsoid</i> . . . . .	89
§ 18.	Die Formänderung der Niveausphäroide in der Nähe der physischen Erdoberfläche mit der Höhenlage. . . . .	92
§ 19.	Fortsetzung: Die Niveausphäroide in der Nähe der physischen Erd- oberfläche stimmen alle in gleichem Grade mit Rotationsellipsoiden derselben Abplattung überein . . . . .	93
§ 20.	Die normale Änderung der Beschleunigung <i>g</i> der Schwerkraft mit der Höhe in der Nähe der physischen Erdoberfläche, außerhalb. Näherungsformeln für <i>g</i> und $dg:dh$ . . . . .	94
§ 21.	Die normale Änderung der geographischen Breite mit der Höhe wegen der Krümmung der Lotlinien . . . . .	98
§ 22.	Die äußerste Niveaufläche der Erde . . . . .	100
§ 23.	<i>Historische Notizen zu dem Theorem von Clairaut; Newton</i> . . . .	103
§ 24.	<i>Clairauts Darstellung des Newtonschen Problems</i> . . . . .	105
§ 25.	<i>Huygens</i> . . . . .	107
§ 26.	<i>Clairaut</i> . . . . .	109
§ 27.	Die Einführung des Potentials durch <i>Legendre, Laplace</i> u. a. . . .	112
§ 28.	<i>Sätze aus der Theorie der Kugelfunktionen</i> . . . . .	115
§ 29.	Potential des homogenen Rotationsellipsoids auf einen Punktaußenhalb	117
§ 30.	Fortsetzung . . . . .	120
§ 31.	Fortsetzung . . . . .	122
§ 32.	Hauptträgheitsmomente des abgeplatteten, homogenen Rotations- ellipsoids. <i>Dichtigkeit im Erdinnern</i> . . . . .	125
§ 33.	Potential des homogenen Rotationsellipsoids auf einen Punkt innerhalb	127
§ 34.	Das abgeplattete Rotationsellipsoid kann die Oberfläche einer ro- tierenden, homogenen Flüssigkeitsmasse bilden . . . . .	130
§ 35.	Eine rotierende, nahezu kugelförmige, homogene flüssige Masse muß die Form eines Rotationskörpers haben; dieser ist bis auf Größen	

	der Ordnung $\alpha^2$ jedenfalls ein abgeplattetes Rotationsellipsoid. <i>Das dreiaxige Ellipsoid ist als Gleichgewichtsfäche unmöglich.</i> . . . . .	133
§ 36.	Schätzung der Abweichung der Oberfläche einer flüssigen Erde von der Gestalt eines Rotationsellipsoids . . . . .	136
3. Kapitel. Ableitung einer Formel für die Schwerkraft im Meeresniveau aus den Beobachtungen; kontinentale Abweichungen des Geoids.		
§ 1.	Potential und Anziehung einer kreisförmigen Scheibe auf einen Punkt normal über dem Zentrum. . . . .	141
§ 2.	Potential und Anziehung eines homogenen, geraden Kreiscylinders auf einen Punkt seiner Axe, außerhalb, sowie eines homogenen, geraden Kreiskegels auf seine Spitze . . . . .	142
§ 3.	Potential und Anziehung eines homogenen Rotationsparaboloids auf einen Punkt seiner Axe, außerhalb. . . . .	143
§ 4.	Potential und Anziehung einer sphärischen Scheibe auf einen Punkt normal über dem Zentrum. <i>Allgemeiner Satz für die Anziehung einer mit Masse belegten Kugelfläche auf einen ihr naheliegenden Punkt</i> . . . . .	144
§ 5.	Abstand von Niveausphäroid und Niveaufläche gleichen Potentialwertes: <i>Theorem von Bruns</i> . . . . .	147
§ 6.	Untersuchung der Brauchbarkeit der Entwicklung des Potentials $W$ der Schwerkraft nach negativen Potenzen des Radiusvektors bis zur Meeresfläche. . . . .	148
§ 7.	Aenderung des Potentials $W$ durch Kondensation der äußeren Massen auf die Parallelfäche . . . . .	149
§ 8.	Fortsetzung: Gebirgsmasse, Maximalverschiebung der Meeresfläche	151
§ 9.	Fortsetzung: Wahrscheinliche Maximalverschiebung der Meeresfläche	154
§ 10.	Die Änderung der Schwerkraft im Meeresniveau durch dessen Verschiebung . . . . .	155
§ 11.	Einfluss der Kondensation auf die Schwerkraft . . . . .	155
§ 12.	Fortsetzung: Berechnung des Maximaleinflusses . . . . .	159
§ 13.	<i>Resultat der Untersuchung über die Brauchbarkeit der Entwicklung des Potentials <math>W</math> nach negativen Potenzen des Radiusvektors.</i> . . . .	160
§ 14.	Einfluss der Kondensation auf Schwerpunktslage und Trägheitsmomente der Erde. . . . .	161
§ 15.	Die Reduktion der Schwerebeobachtungen im allgemeinen . . . . .	162
§ 16.	<i>Die übliche Reduktion der Schweremessungen auf das Meeresniveau</i>	163
§ 17.	Fortsetzung: Unebenes Terrain . . . . .	167
§ 18.	Fortsetzung: Beliebiges Terrain . . . . .	169
§ 19.	<i>Die Reduktion der Schwerebeobachtungen wegen der Kondensation; die Krümmung der Meeresfläche kann hierbei vernachlässigt werden</i>	172
§ 20.	Fortsetzung: Die Ausführung der Reduktion für die Kondensation .	176
§ 21.	Kondensationsreduktion für eine Inselstation . . . . .	179
§ 22.	Küstenstation . . . . .	181
§ 23.	Gebirgsstation . . . . .	183
§ 24.	Hilfssatz: Für ein homogenes Sphäroid, welches von einem schwach-abgeplatteten Rotationsellipsoid nur wenig abweicht, ist es erlaubt, die Entwicklung des Potentials außerhalb nach negativen Potenzen des Radiusvektors für die praktischen Zwecke als bis zur Oberfläche konvergent zu betrachten . . . . .	186
§ 25.	Ältere Pendelbeobachtungen zur Bestimmung der Intensität der Schwere. . . . .	191
§ 26.	Neuere Pendelbeobachtungen und absolute Bestimmungen. . . . .	202

	Seite
§ 27. <i>Zusammenstellung von Bestimmungen am gleichen oder nahezu gleichen Orte . . . . .</i>	210
§ 28. <i>Gleichung der mehrfachen Bestimmungen . . . . .</i>	212
§ 29. <i>Uebacht der Längen des Sekundenpendels . . . . .</i>	215
§ 30. <i>Die Kondensationsreduktionen . . . . .</i>	223
§ 31. <i>Erfolg der Kondensationsmethode . . . . .</i>	226
§ 32. <i>Die Ermittlung der Interpolationsformel für die Schwerkraft . . .</i>	229
§ 33. <i>Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate . . . . .</i>	231
§ 34. <i>Fortsetzung: Formel zur Genauigkeitsschätzung . . . . .</i>	233
§ 35. <i>Ableitung einer Interpolationsformel für die Länge des Sekundenpendels und für die Schwerkraft im Meeresniveau . . . . .</i>	238
§ 36. <i>Fortsetzung: Plausible Grenzen der Abplattung . . . . .</i>	241
§ 37. <i>Die Schwerkraft auf der physischen Erdoberfläche . . . . .</i>	243
§ 38. <i>Allgemeines über die Ermittlung kontinentaler Undulationen des Geoids . . . . .</i>	244
§ 39. <i>Strenge Relationen für die Abweichungen des Geoids vom zugehörigen Normalsphäroid . . . . .</i>	245
§ 40. <i>Formel von Stokes zur Schätzung kontinentaler Abweichungen des Geoids . . . . .</i>	249
§ 41. <i>Fortsetzung: Summierung . . . . .</i>	251
§ 42. <i>Fortsetzung: Probe und Übersicht . . . . .</i>	254
§ 43. <i>Allgemeine Sätze für die Verteilung der kontinentalen Wellen des Geoids . . . . .</i>	257
§ 44. <i>Relation zwischen Schwerestörung, Störung im Radiusvektor und in der Dichtigkeit der störenden Schicht für einen Punkt des Geoids .</i>	259
§ 45. <i>Die sogenannten Näherungsformeln zur Berechnung des Abstandes von Geoid und Normalsphäroid aus der Schwerestörung . . . . .</i>	262
§ 46. <i>Zusammenhang zwischen dem Mittelwert der reziproken Krümmungsradien in einem Punkte und dem Differentialquotienten der Schwere nach der Höhe . . . . .</i>	264

#### 4. Kapitel. Synthetische Untersuchungen über den Einfluss gegebener Massen auf die Niveaulächen in der Nähe der Erdoberfläche.

§ 1. <i>Deformation der Niveaulächen ausserhalb durch einen kugeligen Massenzuwachs, oder einen kugeligen Massendefekt, unterhalb des Terrains. . . . .</i>	266
§ 2. <i>Fortsetzung: Lotablenkung, Krümmungsradius . . . . .</i>	270
§ 3. <i>Fortsetzung: Die gestörte Schwerkraft . . . . .</i>	274
§ 4. <i>Fortsetzung: Vergleichung der Einwirkung auf <math>r</math>, <math>g</math>, <math>\rho</math> u. s. w. . .</i>	276
§ 5. <i>Fundamentalformeln für die mittleren Teile langer, horizontaler Prismen. . . . .</i>	277
§ 6. <i>Fortsetzung . . . . .</i>	280
§ 7. <i>Allgemeine Formeln für die mittleren Teile eines langen Gebirgsrückens in Form eines liegenden, dreiseitigen Prismas . . . . .</i>	281
§ 8. <i>Deformationen durch einen gleichschenkeligen Gebirgsrücken . . .</i>	286
§ 9. <i>Fortsetzung: Störungen der Schwerkraft . . . . .</i>	290
§ 10. <i>Fortsetzung: Störungen im Parallelismus der Niveaulächen . . . .</i>	293
§ 11. <i>Fortsetzung: Die Lotstörungen auf dem Hange <math>AC</math>. . . . .</i>	295
§ 12. <i>Fortsetzung: Die Lotstörungen auf der Grundfläche <math>AB</math> . . . . .</i>	298
§ 13. <i>Fortsetzung: Die Krümmungsradien im Niveau der Grundfläche. .</i>	302
§ 14. <i>Prismatische Thäler . . . . .</i>	306
§ 15. <i>Fortsetzung: Steile Böschung . . . . .</i>	307

	Seite
§ 16. Halbkugelförmiger Berg und halbkugelförmige Pinge . . . . .	309
§ 17. Kleine Insel im Ocean . . . . .	311
§ 18. <i>Deformationen durch kreisförmige Kontinente</i> . . . . .	313
§ 19. Fortsetzung: Die Deformationen innerhalb . . . . .	314
§ 20. Fortsetzung: Die Deformationen in der Nähe des Randes ausserhalb	317
§ 21. Fortsetzung: Die Brauchbarkeit der Formeln der letzten beiden Paragraphen mit Rücksicht auf die endliche Dicke der Kontinente.	319
§ 22. Die Lotstörung an der Küste eines cylindrischen Kontinents . . . .	321
§ 23. Berücksichtigung der Böschung an der Küste . . . . .	324
§ 24. Der Einfluß der Krümmung der Meeresfläche auf die Formeln der vorhergehenden Entwicklungen . . . . .	325
§ 25. Die störende Wirkung der Kontinente in gröfserem Abstände vom Zentrum $M$ . . . . .	329
§ 26. Berücksichtigung der Schwerpunktsverschiebung . . . . .	332
§ 27. Mittelwert der Erhebungen $h_i$ für einen Kontinent . . . . .	334
§ 28. Kleinste Erhebung der gestörten Niveaufläche . . . . .	335
§ 29. Zusammenstellung der Formeln für die Störungswirkung eines Kon- tinents mit Rücksicht auf Schwerpunktsverschiebung . . . . .	336
§ 30. Numerische Auswertung der elliptischen Integrale $K$ und $E$ . . . .	340
§ 31. Störungen durch Europa-Asien . . . . .	343
§ 32. Fortsetzung . . . . .	346
§ 33. Störungen durch Australien . . . . .	348
§ 34. Störungen durch Afrika, Nord- und Südamerika. Übersicht der Höhenstörungen . . . . .	351
§ 35. Zusammenwirkung der Störungen der 5 Kontinente . . . . .	354
§ 36. Die Schwerestörungen . . . . .	357
§ 37. Fortsetzung: Numerische Werte . . . . .	359
§ 38. <i>Diskussion der Resultate. Die störenden Massen der Erde</i> . . . .	364
§ 39. <i>Berechnung des Einflusses der lokalen Massenordnung auf die Lotrichtung</i> . . . . .	368
§ 40. Fortsetzung: Die Ausführung der Rechnung . . . . .	372
§ 41. Erfolge von Berechnungen der lokalen Lotablenkungen . . . . .	374
§ 42. <i>Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde aus Lotablenkungen</i>	379
§ 43. <i>Ph. v. Jollys Bestimmung von <math>\Theta_m</math> aus Wägungen.</i> . . . . .	380

## 5. Kapitel. Zeitliche Änderungen der Niveauflächen.

§ 1. <i>Die Störungen in der Schwerkraft durch Sonne und Mond.</i> . . . .	383
§ 2. Bewegung der Erde um ihren Schwerpunkt . . . . .	386
§ 3. Beziehung auf ein bewegtes Koordinatenaxensystem . . . . .	388
§ 4. <i>Drehbewegung der als fester Körper betrachteten Erde um ihren Schwerpunkt</i> . . . . .	390
§ 5. Drehbewegung mit Vernachlässigung der äusseren Kräfte und für $A = B$ . . . . .	391
§ 6. Die Polhöhe von <i>Pulkowa</i> nach <i>C. A. F. Peters</i> . . . . .	394
§ 7. Dieselbe nach <i>Nyrén</i> . . . . .	396
§ 8. Der Einfluß einer Ungleichheit von $A$ und $B$ . . . . .	400
§ 9. Fortsetzung: $B - A$ sehr klein. . . . .	404
§ 10. Der Satz von der unveränderlichen Ebene . . . . .	405
§ 11. Die Bewegung der Momentanaxe im Raume, abgesehen von äusseren Kräften . . . . .	406
§ 12. <i>Grundgleichungen für die Drehbewegung des nicht festen Erdkörpers</i>	408
§ 13. Fortsetzung: Modifikation der Gleichungen . . . . .	410

	Seite
§ 14. Bewegung des veränderlichen Erdkörpers abgesehen von äußeren Kräften . . . . .	413
§ 15. Fortsetzung: Integration und spezielle Fälle . . . . .	416
§ 16. Schätzung der Veränderung der Hauptträgheitsmomente. . . . .	419
§ 17. Verschwindender Einfluss von Flut und Ebbe auf die Lage der Rotationsaxe . . . . .	423
§ 18. <i>Die Rotationsaxe im Erdkörper unter dem Einfluss des Mondes und der Sonne</i> . . . . .	426
§ 19. Fortsetzung . . . . .	429
§ 20. Notiz über Präzession und Nutation . . . . .	434
§ 21. <i>Die Formänderung der Niveaulächen</i> durch die Bewegung der Momentanaxe und die Änderung der Rotationsgeschwindigkeit. . .	438
§ 22. Fortsetzung: Veränderliche Rotationsdauer . . . . .	442
§ 23. Fortsetzung: Bedeutendere Veränderungen . . . . .	444
§ 24. Wahrnehmungen über die Veränderlichkeit des Erdkörpers . . . .	445

#### 6. Kapitel. Verwertung astronomischer Angaben für die Erkenntnis der Erdgestalt und des Erdinnern.

§ 1. Allgemeine Bemerkungen . . . . .	450
§ 2. <i>Bestimmung der geozentrischen Koordinaten eines Punktes der Erdoberfläche aus Beobachtungen der Mondparallaxe</i> . . . . .	451
§ 3. Fortsetzung: Die praktische Lösung . . . . .	456
§ 4. <i>Bestimmung des Äquatorialhalbmessers des Erdellipsoids aus der Mondparallaxe in Verbindung mit der Intensität der Schwere an der Erdoberfläche</i> . . . . .	460
§ 5. Fortsetzung: Zahlwerte . . . . .	463
§ 6. <i>Bestimmung der Differenz MK der Hauptträgheitsmomente der Erde sowie der Abplattung der Erde aus der Mondbewegung</i> . . . . .	466
§ 7. Fortsetzung: Zahlwerte und Hansens Angaben von 1865. . . . .	470
§ 8. Die Trägheitsmomente der Erde und die Zunahme der Dichtigkeit nach dem Erdinnern. . . . .	473
§ 9. Die mittlere Dichtigkeit der Erdmasse in der Nähe der Erdoberfläche und die mittlere Dichtigkeit des Erdkörpers . . . . .	476
§ 10. <i>Die Abplattung der inneren Erdschichten gleicher Dichtigkeit</i> . . .	478
§ 11. Fortsetzung: Entwicklung der Gleichungen . . . . .	482
§ 12. Auflösung und Endresultate . . . . .	485
§ 13. <i>Die Schwerkraft im Erdinnern</i> . . . . .	492
§ 14. <i>Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde aus der Kombination von Beobachtungen der Schwerkraft auf und unter der Erdoberfläche</i> .	493
§ 15. Fortsetzung: Unebenheiten des Terrains . . . . .	496
§ 16. Fortsetzung: Zahlwerte. . . . .	499

#### 7. Kapitel. Das geometrische Nivellement.

§ 1. Die unmittelbaren Resultate geometrischer Nivellements. . . . .	500
§ 2. <i>Die strenge Reduktion der Nivellements</i> . . . . .	502
§ 3. <i>Bestimmung von Meereshöhen. Der Einfluss der normalen Variation der Schwerkraft auf die Nivellementsresultate</i> . . . . .	505
§ 4. Fortsetzung: Die sphäroidischen Schlussfehler der Nivellements-polygone . . . . .	509
§ 5. Die sphäroidische Depressionsdifferenz zwischen Rück- und Vorblick	511
§ 6. <i>Der Einfluss der Anomalieen der Schwerkraft auf die Nivellementsresultate; Lotabweichungen</i> . . . . .	513



	Seite
§ 7. Schwerestörungen im Gebirge . . . . .	517
§ 8. Homogener Gebirgsrücken von der Form eines liegenden, dreiseitigen Prismas . . . . .	520
§ 9. Fortsetzung: Der Fehler in der nivellierten Höhe und der Schlusfehler des Nivellements-polygones $ACBA$ . . . . .	524
§ 10. Fortsetzung: Übersicht des Verhaltens in einigen besonderen Fällen	528
§ 11. Fortsetzung: Größter Schlusfehler . . . . .	532
§ 12. Einfluß eines unterirdischen Massendefekts von kugelförmiger Gestalt	534
§ 13. Fortsetzung: Maximum des Schlusfehlers; Fehler der nivellierten Höhe . . . . .	536
§ 14. Zusammenfassung vorstehender Untersuchungen über den Einfluß der Anomalieen der Schwerkraft . . . . .	538
§ 15. Die anormale Depressionsdifferenz zwischen Rück- und Vorblick . .	539
§ 16. Fortsetzung: Die anormale Depressionsdifferenz im Gebirge . . . .	543
§ 17. Der Einfluß der durch Mond und Sonne bewirkten Lotstörung auf die Nivellementsresultate . . . . .	546
§ 18. Zeitliche Änderungen der Niveauflächen; die physische Meeresfläche	549

### 8. Kapitel. Die trigonometrische Höhenmessung.

Mit Bemerkungen über die Lateralrefraktion und die Aberration.

§ 1. Die Bedeutung der trigonometrischen Höhenmessung . . . . .	550
§ 2. Die Grundgleichung der sphärischen Höhenrefraktion . . . . .	553
§ 3. Reihenentwicklung . . . . .	554
§ 4. Berechnung des Refraktionskoeffizienten $k_1$ . . . . .	556
§ 5. Die gesamte Refraktion des Lichtstrahles . . . . .	559
§ 6. Der Einfluß der Abplattung der Niveauflächen . . . . .	561
§ 7. Die regelmäßige Lateralrefraktion. Notiz über die Aberration . .	564
§ 8. Einfluß einer Abweichung der Luftschichten gleicher Dichtigkeit von der Normalform . . . . .	566
§ 9. Fortsetzung: Ausnahmefall . . . . .	569
§ 10. Zusammenstellung der Formeln . . . . .	571
§ 11. Der Refraktionskoeffizient $\kappa$ als Funktion von Lufttemperatur und Luftdruck . . . . .	575
§ 12. Die Veränderlichkeit von $\kappa$ zeitlich und räumlich. . . . .	578
§ 13. Fortsetzung: <i>Bauernfeinds</i> Beobachtungsreihe von 1877—80 . . . .	582
§ 14. <i>Bauernfeinds</i> Refraktionstheorie . . . . .	585
§ 15. Fortsetzung: Kritische Bemerkungen . . . . .	587
§ 16. Refraktionstheorie von <i>Jordan</i> . . . . .	590
§ 17. Formel bei gegenseitigen Messungen, wenn $\kappa$ in vier Punkten bekannt ist . . . . .	592
§ 18. Übersicht der Methoden mit einer Anmerkung über das astronomische Nivellement . . . . .	595
§ 19. Formeln bei Beobachtungen zwischen drei Stationen unter Voraussetzung normaler Form der Luftschichten. . . . .	599
§ 20. Zahlenbeispiel . . . . .	601
§ 21. Über die Bedeutung trigonometrischer, ohne Rücksicht auf Lotabweichung ermittelter Höhendifferenzen, mit einer Anmerkung über die Formel für barometrisches Höhenmessen . . . . .	607

## Berichtigungen und Zusätze.

### Zu Bd. I.

- S. XV 3. u. 4. Z. v. u. ist  $\lambda_c$  anstatt  $\lambda_g$  zu lesen.  
S. 5 Anm. Vergl. dazu auch S. 613 und Bd. 2 S. 16 u. ff.  
S. 8 § 6. Vergl. dazu Bd. 2 S. 47 § 27.  
S. 16 o. Vergl. dazu Bd. 2 S. 364 § 38.  
S. 16 u. Über maximale Lotablenkung s. Bd. 2 S. 346.  
S. 17. Über Krümmungsänderungen der Niveauflächen vergl. Bd. 2 Kap. 4 die §§ 1 bis 16.  
S. 22 § 5 2. Absatz. Vergl. Bd. 2 Kap. 1 die §§ 22 bis 25.  
S. 80 muß der Schlusssatz von § 8 lauten: „falls das gegebene Gegenstück demjenigen der beiden anderen gegebenen Stücke gegenüberliegt, welches den größeren Sinus hat“.  
S. 137 ist im Absatz hinter Gleichung (8) die Bemerkung über die Lage der großen Axe als irrig zu streichen.  
S. 138 ist in der 1. Gl. von o. überall  $\sin U$  anstatt  $\cos U$  zu setzen.  
S. 158 ist inmitten bei dem Kleingedruckten  $k$  anstatt  $k$  zu lesen.  
S. 314 ist in (7\*)  $M'^4$  für  $M^4$  zu setzen.  
S. 375 (13) soll der Nenner in der 2. Z. lauten:  $30240a_0^4$ .  
S. 393 u. soll überall  $k$  anstatt  $k$  stehen.  
S. 459 fehlt in der 2. Formel (1) rechter Hand der Faktor  $\sec \eta'$ .  
S. 463 (2) lies in der 1. Z.  $(B_1 - F)^2$  anstatt  $(-)^2$  und in der 2. Z.  $[1,4873099.71] : W_m^3$ .  
S. 570 Fig. 45 ist das Wort *Harsburg* bei *Fallstein* zu streichen und vor *Ilseburg* anzubringen.  
S. 595 lies in der 2. Z. vor (2)  $m + 1$  anstatt  $m$ .

### Zu Bd. II.

- S. 87 Anm. u. 1. Z. (*London*) soll hinter  $I_0$  stehen.  
S. 94 2. Z. v. u. lies  $dg : dh$  anstatt  $dg$ .  
S. 173 4. Z. v. u. lies § 32 anstatt § 31.  
S. 225 Fig. 31 lies  $\cot \nu$  anstatt  $\cot \nu$ .
-

## Erstes Kapitel.

### Allgemeine Eigenschaften der Niveaflächen.

§ 1. **Das Prinzip von d'Alembert.** Wir beziehen die Erde auf ein System rechtwinkliger Koordinaten  $x, y$  und  $z$ . Im Punkte  $(xyz)$  befinde sich das Massenelement  $dm$ , auf dessen Masseneinheit die Kräfte  $X, Y$  und  $Z$  bezw. in Richtung der positiven Axen der  $x, y$  und  $z$  wirken. Alsdann ist für das Element  $dm$  die bewegende Kraft parallel zu den genannten Axen bezw. gleich

$$Xdm, \quad Ydm, \quad Zdm. \quad (1)$$

Nun ist aber die Beschleunigung des Punktes  $(xyz)$  parallel zu den drei Koordinatenachsen bezw. gleich

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

wobei  $dt$  das Differential der Zeit bezeichnet; es sind daher die Komponenten der bei der Bewegung des im Punkte  $(xyz)$  lagernden Massenelements  $dm$  wirklich zur Geltung gelangenden bewegenden Kraft bezw. gleich

$$-\frac{d^2x}{dt^2} dm, \quad -\frac{d^2y}{dt^2} dm, \quad -\frac{d^2z}{dt^2} dm. \quad (2)$$

Die nicht zur Geltung gelangenden Differenzen der einander entsprechenden Ausdrücke (1) und (2), nämlich die Ausdrücke

$$\begin{aligned} &\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) dm, \\ &\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) dm, \\ &\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) dm \end{aligned}$$

werden die verlorenen Kräfte genannt, wobei die Bezeichnung im algebraischen Sinne aufzufassen ist, da sie auch negativ sein können. Diese verlorenen Kräfte müssen nach dem Prinzip von *d'Alembert* für den Komplex aller Massenelemente der Erde zusammengenommen im Gleichgewicht stehen und zwar gelangt man in Verbindung mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen zu der folgenden analytischen Formulierung des *d'Alembertschen* Prinzips:

Es erfolgt die Bewegung dergestalt, daß in jedem Zeitmoment die Gleichung

$$\Sigma \left\{ \begin{aligned} &\left( X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) dm \cdot \delta x \\ &+ \left( Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) dm \cdot \delta y \\ &+ \left( Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) dm \cdot \delta z \end{aligned} \right\} = 0, \quad (3)$$

in welcher die Summierung über alle Massenelemente erstreckt werden muß, erfüllt ist.  $\delta x$ ,  $\delta y$  und  $\delta z$  bezeichnen hierbei die Axenprojektionen unendlich kleiner, sogenannter virtueller Verrückungen  $\delta s$  der Angriffspunkte  $(xyz)$  der Kräfte, die nur den geometrisch-physikalischen Bedingungen für die gegenseitige Lage der Teile der Erde entsprechen müssen, die aber sonst willkürlich sind und daher mit den wirklichen Bewegungen im allgemeinen nicht zusammenfallen.

Betrachten wir insbesondere die Erde als einen starren Körper, so haben die  $\delta s$  nur den Bedingungen für die unveränderte gegenseitige Entfernung der Punkte zu genügen; insoweit dies der Fall ist, erfolgt die Bewegung in der Art, daß Gleichung (3) für jedes System der virtuellen Verschiebungen  $\delta s$  erfüllt wird.

Im Sinne der Mechanik sagt die Gleichung (3): Die mechanische Arbeit der verlorenen Kräfte für die ganze Erde zusammengenommen ist in jedem Augenblicke für jedes System virtueller Verschiebungen der Angriffspunkte gleich null.

Wir wenden die Gleichung (3) dazu an, um die Bewegung der Teile der Erde zu zerfällen in eine allen Teilen gemeinsame und mit derjenigen des Erdschwerpunktes übereinstimmende, sowie in eine relative um diesen Punkt.

§ 2. **Bewegung des Erdschwerpunkts.** Wie auch die Konstitution der Erde sei: zu den möglichen virtuellen Verschiebungen gehört jedenfalls auch eine solche der ganzen Erde um einen für alle Punkte gemeinsamen Betrag  $\delta x$  parallel zur  $x$ -Axe. Dabei sind die  $\delta y$  und  $\delta z$  gleich null, sodaß in der obigen Gleichung (3) die 2. und 3. Glieder verschwinden. Außerdem kann man den gemeinsamen Faktor  $\delta x$  wegdividieren und erhält:

$$\Sigma \left( \frac{d^2 x}{dt^2} dm \right) = \Sigma (X dm). \quad (1)$$

Eine virtuelle Verschiebung parallel zur  $y$ -Axe führt zu der Gleichung:

$$\Sigma \left( \frac{d^2 y}{dt^2} dm \right) = \Sigma (Y dm), \quad (2)$$

eine solche parallel zur  $z$ -Axe zu

$$\Sigma \left( \frac{d^2 z}{dt^2} dm \right) = \Sigma (Z dm). \quad (3)$$

Bestimmt man nun einen mittleren Punkt  $(\xi \eta \zeta)$  der Erde nach den Gleichungen

$$\begin{aligned}\xi \Sigma dm &= \Sigma (x dm) \\ \eta \Sigma dm &= \Sigma (y dm) \\ \zeta \Sigma dm &= \Sigma (z dm),\end{aligned}\tag{4}$$

wobei  $\xi$  das  $x$ ,  $\eta$  das  $y$ ,  $\zeta$  das  $z$  des Punktes bezeichnet, so heißt dieser Punkt der *Schwerpunkt* der Erde. Zweimalige Differentiation der (4) giebt:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \xi}{dt^2} \Sigma dm &= \Sigma \left( \frac{d^2 x}{dt^2} dm \right) \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} \Sigma dm &= \Sigma \left( \frac{d^2 y}{dt^2} dm \right) \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \Sigma dm &= \Sigma \left( \frac{d^2 z}{dt^2} dm \right).\end{aligned}\tag{5}$$

Bezeichnen wir  $\Sigma dm$  mit  $M$ , als *Masse der Erde*, so folgt aus (5) und (1) bis (3):

$$\begin{aligned}M \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \Sigma (X dm) \\ M \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= \Sigma (Y dm) \\ M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \Sigma (Z dm).\end{aligned}\tag{6}$$

Diese Gleichungen bestimmen die Bewegung des Schwerpunktes. Er bewegt sich darnach so, als ob alle Kräfte — parallel nach ihm verschoben — direkt auf ihn wirkten und alle Masse in ihm lagerte.

Hierbei brauchen übrigens nur die äusseren Kräfte, also die Anziehungen der Himmelskörper, berücksichtigt zu werden, da die innern Kräfte d. h. diejenigen bewegendes Kräfte, welche innerhalb der Erde durch gegenseitige Einwirkung der Massenelemente entstehen, wie alle gegenseitigen Wirkungen paarweise entgegengesetzt gleich sind, mithin sich in den Summen auf der rechten Seite der Gleichungen (6) aufheben.

Sehen wir nun von den Bewegungen der Massenelemente relativ zum Erdschwerpunkt ab, so haben sie alle dieselbe Bewegung wie dieser d. h. sie bewegen sich in jedem Augenblicke parallel. Irgend eine Meridianebene hat daher bei dieser Voraussetzung stets parallele Lagen inne und erleidet in sich keinerlei Drehung.

Es ist nicht immer richtig aufgefaßt worden, daß nun umgekehrt jegliche Drehung der Erde im Sinne der Dynamik bereits zu den relativen Bewegungen der Teile der Erde um ihren Schwerpunkt gehört. Man darf also nicht ausser der Bewegung des Schwerpunkts und der entsprechenden Parallelverschiebung der Erde nach den

Gleichungen (6) sowie aufer der Drehung der Erde um ihren Schwerpunkt noch eine Drehung um einen andern Punkt annehmen.

Man darf also auch nicht die Drehbewegung der Erde um den Schwerpunkt des Systems Erde-Mond noch besonders in betracht ziehen wollen. Allerdings läßt sich die Bewegung der Erde so zerlegen, daß die letztgenannte Bewegung als Komponente auftritt, aber dieses erzeugt eine ganz unnötige Komplikation: die Zerlegung nach § 2 ist die einfachste und daher allein übliche.

**§ 3. Relative Bewegung gegen den Erdschwerpunkt.** Parallel zu den in § 1 angenommenen festen Koordinatenaxen der  $x, y$  und  $z$  legen wir jetzt durch den Erdschwerpunkt Axen der  $x', y'$  und  $z'$ . Dann ist

$$\begin{aligned} x &= x' + \xi \\ y &= y' + \eta \\ z &= z' + \zeta. \end{aligned} \quad (1)$$

Hiermit geht die Gleichung (3) § 1 S. 2 über in die Gestalt

$$\Sigma \left\{ \begin{aligned} &\left( X - \frac{d^2 x'}{dt^2} - \frac{d^2 \xi}{dt^2} \right) dm \cdot \delta x' + \left( X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) dm \cdot \delta \xi \\ &+ \left( Y - \frac{d^2 y'}{dt^2} - \frac{d^2 \eta}{dt^2} \right) dm \cdot \delta y' + \left( Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) dm \cdot \delta \eta \\ &+ \left( Z - \frac{d^2 z'}{dt^2} - \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \right) dm \cdot \delta z' + \left( Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) dm \cdot \delta \zeta \end{aligned} \right\} = 0, \quad (2)$$

welche Gleichung sich aber wesentlich vereinfacht. Zunächst fallen die Produkte mit  $\delta \xi, \delta \eta$  und  $\delta \zeta$  weg, weil diese Faktoren konstant sind, sich mithin die ersten Faktoren der bezüglichen Produkte addieren und zufolge der Gleichungen (1), (2) und (3) des § 2 gegenseitig aufheben.

Um eine weitere Vereinfachung zu erkennen, setzen wir die Relationen (1) in die (4) des vorigen Paragraphen und erhalten sofort

$$\begin{aligned} \Sigma(x' dm) &= 0 \\ \Sigma(y' dm) &= 0 \\ \Sigma(z' dm) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Hieraus folgt weiter

$$\begin{aligned} \Sigma(dm \cdot \delta x') &= 0 \\ \Sigma(dm \cdot \delta y') &= 0 \\ \Sigma(dm \cdot \delta z') &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

In dem ersten Teile von (2) verschwinden daher die von  $\xi, \eta$  und  $\zeta$  abhängenden Glieder, weil sie sich in die nachstehende Form bringen lassen:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} \Sigma(dm \cdot \delta x') + \frac{d^2 \eta}{dt^2} \Sigma(dm \cdot \delta y') + \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \Sigma(dm \cdot \delta z').$$

Zugleich erkennt man, daß von allen Werten  $X, Y$  und  $Z$  beziehungs-



weise konstante Teile abgezogen werden dürfen. Wir schreiben daher anstatt (2):

$$\Sigma \left\{ \begin{aligned} &\left( X' - \frac{d^2 x'}{dt^2} \right) dm \cdot \delta x' \\ &+ \left( Y' - \frac{d^2 y'}{dt^2} \right) dm \cdot \delta y' \\ &+ \left( Z' - \frac{d^2 z'}{dt^2} \right) dm \cdot \delta z' \end{aligned} \right\} = 0 \quad (5)$$

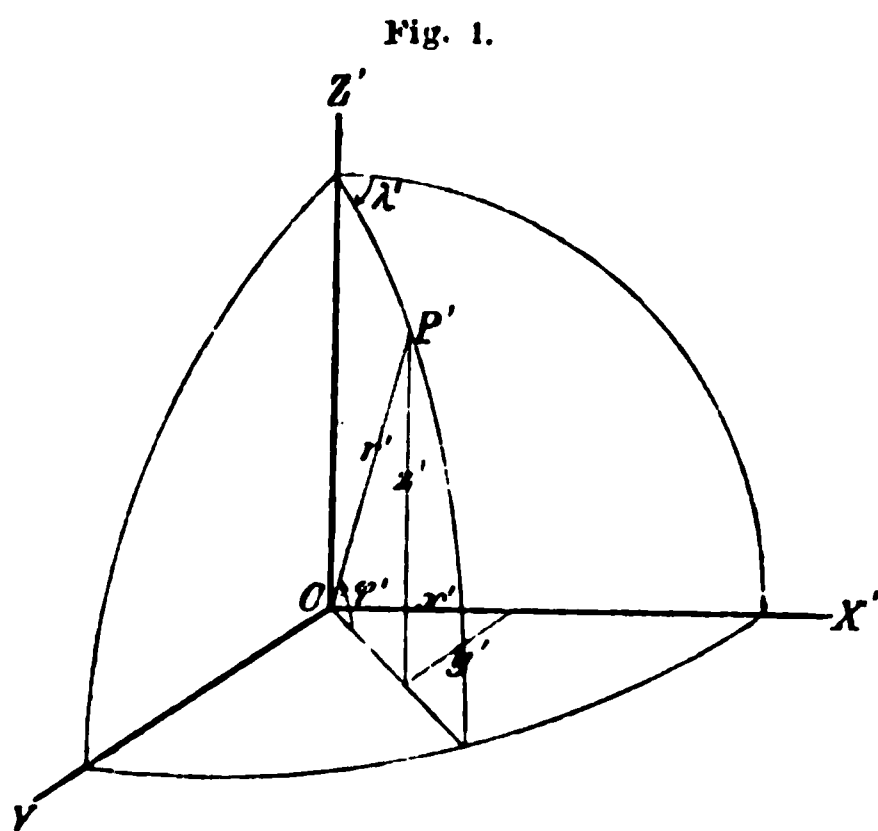
und verstehen nun unter  $X'$ ,  $Y'$  und  $Z'$  die Kräfte, welche auf die Masseinheit eines Elementes wirken, dessen rechtwinkelige Koordinaten in Bezug auf den Erdschwerpunkt  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$  sind — nach Abzug der entsprechenden Kräfte, welche die Bewegung dieses Punktes erzeugen; vergl. S. 3 (6).

Von den Gleichungen (5) kann man ausgehen, um die zum Erdschwerpunkt relative Bewegung der Erde zu untersuchen. Dieses weiter zu verfolgen, ist zunächst nicht unsere Aufgabe; wir halten uns vielmehr vorerst an die durch die Erfahrung sicher konstatierten That-sachen und behalten uns für das fünfte Kapitel § 2 u. ff. Erörterungen über die Bewegung der Erde um ihren Schwerpunkt, sowie über die Erfahrungen in dieser Hinsicht vor.

**§ 4. Die Zentrifugalkraft.** Zufolge der Erfahrung kann man mit außerordentlich großer Annäherung annehmen, daß die Erde mit gleichförmiger Geschwindigkeit um eine in ihr feste Axe durch den Erdschwerpunkt von unveränderter Richtung rotiert. Diese Drehaxe nennt man die Erdaxe (Bd. 1, S. 7).

Wir nehmen sie als  $z'$ -Axe, sodaß die  $x'y'$ -Ebene Äquatorebene\*) wird, und berechnen die zweiten Differentialquotienten der Koordinaten eines Punktes ( $x' y' z'$ ) nach der Zeit nach Maßgabe der Rotation. Die Winkelgeschwindigkeit der letzteren sei gleich  $\omega$ .

Zunächst gehen wir zu Polarkoordinaten über, Fig. 1.  $r'$  sei der Radiusvektor des Punktes ( $x' y' z'$ ),  $\lambda'$  der Winkel zwischen der  $x'z'$ -Ebene und einer Ebene durch die  $z'$ -Axe und den Radiusvektor, wachsend nach



\*) Nach S. 7 des 1. Bandes ist die Äquatorebene die zur Erdaxe normale Ebene durch den Erdschwerpunkt. Dieser Definition steht allerdings entgegen, daß die Äquatorebene nach Bd. 1 S. 8 keineswegs die Ebene des geographischen Äquators ist, indessen gestattet sie den sonst brauchbaren Begriff beizubehalten.

der  $y'z'$ -Ebene zu,  $\varphi'$  der Winkel, unter welchem  $r'$  gegen die  $x'y'$ -Ebene geneigt ist, wachsend nach der positiven Seite der  $z'$ -Axe hin. Dann ist

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos \varphi' \cos \lambda' \\ y' &= r' \cos \varphi' \sin \lambda' \\ z' &= r' \sin \varphi'. \end{aligned} \quad (1)$$

Hieraus folgt, da bei der Rotation  $r' \cos \varphi'$  und  $r' \sin \varphi'$  konstant bleiben,  $d\lambda' : dt$  aber gleich  $\omega$  ist:

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= - r' \cos \varphi' \sin \lambda' \cdot \omega = - y' \omega \\ \frac{dy'}{dt} &= + r' \cos \varphi' \cos \lambda' \cdot \omega = + x' \omega \\ \frac{dz'}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

womit sich weiter findet:

$$\begin{aligned} - \frac{d^2 x'}{dt^2} &= x' \omega^2 \\ - \frac{d^2 y'}{dt^2} &= y' \omega^2 \\ - \frac{d^2 z'}{dt^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Diese drei Beschleunigungen  $x' \omega^2$ ,  $y' \omega^2$  und null lassen sich als Komponenten einer auf die Masseneinheit wirkenden Kraft auffassen, welche Zentrifugalkraft genannt wird, weil unter ihrem Einfluß der Punkt  $(x'y'z')$  sich von der Axe entfernen würde.

§ 5. **Die Schwerkraft.** Nach Gleichung (5) § 3 S. 5 gehen bei der relativen Bewegung eines im Punkte  $(x'y'z')$  befindlichen Massenteilchens für die Masseneinheit die bewegenden Kräfte

$$X' - \frac{d^2 x'}{dt^2}, \quad Y' - \frac{d^2 y'}{dt^2}, \quad Z' - \frac{d^2 z'}{dt^2} \quad (1)$$

verloren, welche bei der Voraussetzung gleichförmiger Rotation nach den Gleichungen (2) des vorigen Paragraphen übergehen in:

$$X' + x' \omega^2, \quad Y' + y' \omega^2, \quad Z'. \quad (2)$$

Diese Kräfte veranlassen einen Druck des Teilchens gegen seine Umgebung. Insoweit  $X'$ ,  $Y'$  und  $Z'$  von der Gravitation, der Anziehung der Massen auf das Teilchen, herrühren, nennt man die Resultante der Kräfte (1) oder (2) die *Schwerkraft*, welche wir mit  $g$  bezeichnen.

Die Ausdrücke (1) würden in dem jetzt nicht weiter zu betrachtenden Falle zur Geltung kommen, daß die Rotationsbewegung von der oben vorausgesetzten etwas abweicht (vergl. 5. Kap. § 21), doch wird von dem Einfluß einer etwa vorhandenen relativen Bewegung des Punktes  $(x'y'z')$  gegen die Erde im ganzen auf die 2. Differentialquotienten der Koordinaten nach der Zeit bei der Definition der Schwerkraft jedenfalls abgesehen.

Entsprechend der für die Ausdrücke (2) vorausgesetzten gleichförmigen Rotation um eine konstant gerichtete Schweraxe betrachten wir die Erde als einen Körper, dessen Teile in relativer Ruhe zu einander sich befinden.

Auch sehen wir bei Bildung der Ausdrücke (2) von denjenigen Bestandteilen in  $X'$ ,  $Y'$  und  $Z'$  ab, welche von der Anziehung der Himmelskörper herrühren und deshalb im allgemeinen veränderlich sind. (Vergl. hierzu 5. Kap. § 1.)

Um nun Ausdrücke für  $X'$ ,  $Y'$  und  $Z'$ , welche der Anziehung der Erdmasse entsprechen, zu gewinnen, bezeichnen wir die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Erde im allgemeinen in Bezug auf die drei durch den Erdschwerpunkt gelegten Axen (§ 4 S. 5) mit  $x$ ,  $y$  und  $z$  ohne oberen Strich; für die Koordinaten des Punktes, wo das von der Erde angezogene Massenteilchen lagert, behalten wir dagegen denselben bei.

Wir nehmen ferner an, daß infolge der Gravitation die Masse 1 einer anderen in der Entfernung 1 befindlichen Masse 1 die Beschleunigung  $k^2$  erteile und bezeichnen die Entfernung des anziehenden Massenelements  $dm$  im Punkte  $(xyz) = P$  von dem Punkte  $(x'y'z') = P'$  mit  $c$ , Fig. 2.

Dann ist die Beschleunigung eines im letzteren Punkte befindlichen Massenteilchens infolge der Anziehung des Elements  $dm$  in  $P$  gleich

$$\frac{k^2 dm}{c^2}. \quad (3)$$

Die Komponenten dieser Beschleunigung für die drei Koordinatenachsen sind nach Grösse und Richtung

$$\begin{aligned} \frac{k^2 dm}{c^2} \frac{x - x'}{c} & \text{ in Richtung der pos. } x\text{-Axe} \\ \frac{k^2 dm}{c^2} \frac{y - y'}{c} & \text{ " " " " } y\text{-Axe} \\ \frac{k^2 dm}{c^2} \frac{z - z'}{c} & \text{ " " " " } z\text{-Axe;} \end{aligned} \quad (4)$$

denn projiziert man die Distanz  $c$  auf die drei Axen, so ergeben sich die Differenzen  $x - x'$ ,  $y - y'$ ,  $z - z'$ , deren Quotienten mit  $c$  den Cosinus der Neigungswinkel von  $c$  gegen die drei Axen, d. h. den

Richtungscosinus von  $e$ , in der Art entsprechen, daß das Vorzeichen der Quotienten zugleich die Richtung vom angezogenen nach dem anziehenden Teilchen markiert, wie die Konstruktion von  $e$  aus  $x - x'$ ,  $y - y'$ ,  $z - z'$  zeigt.

Bilden wir nun für jede der Komponenten (4) die Summe für alle Teile der Erde, so ergeben sich die Gesamtbeschleunigungen parallel zu den drei Axen d. h. die bewegenden Kräfte  $X', Y'$  und  $Z'$  für die im Punkte  $(x' y' z')$  befindliche Masseneinheit. Die Summierung bewirken wir nach der Methode der Integralrechnung, indem wir uns in bekannter Weise entsprechend dem gewählten Koordinatensystem die Erde in Elemente zerlegt denken. Bezeichnen wir die Komponenten der Schwerkraft in Richtung der drei Koordinatenachsen mit  $g_x$ ,  $g_y$  und  $g_z$ , so erhalten wir mit Rücksicht auf (2) die Ausdrücke wie folgt:

$$\begin{aligned} g_x &= k^2 \int \frac{x - x'}{e^3} dm + x' \omega^2 \\ g_y &= k^2 \int \frac{y - y'}{e^3} dm + y' \omega^2 \\ g_z &= k^2 \int \frac{z - z'}{e^3} dm, \end{aligned} \quad (5)$$

wobei die Integration über die ganze Erde auszudehnen ist.

Mit der Aufstellung der Ausdrücke (5) verschwindet auch eine Ungenauigkeit der Ausdrucksweise, die wir uns bisher der Kürze halber erlaubt haben. Nämlich diese: von einem Massenteilchen zu sprechen, das in einem Punkte lagert. Zwar sind vorstehende Integralausdrücke so angesetzt, als ob das unendlichkleine Element  $dm$  im Punkte  $(x y z)$  sich befände, während es ihm nur angrenzt; aber bekanntlich giebt dies im Integralwerte keinen Fehler, wenn es sich durch geeignete Transformation vermeiden läßt, daß der Ausdruck unter dem Integralzeichen innerhalb der Integrationsgrenzen unendlich groß wird.

Manche Autoren bezeichnen mit Schwerkraft nur den von der Anziehung herrührenden Teil von  $g$ . Dieselben nennen  $g$  die *scheinbare* Schwerkraft. *Clairaut* unterscheidet *pesanteur* und *gravité*, also Gewicht und Schwere, ersteres das Resultat der Zusammenwirkung von Schwerkraft und Zentrifugalkraft.

**§ 6. Das Potential  $W$  der Schwerkraft  $g$ .** Die vorstehenden drei Ausdrücke für die Komponenten der Schwerkraft lassen sich als partielle Differentialquotienten einer einzigen Funktion  $W$  darstellen, welche durch die Gleichung

$$W = k^2 \int \frac{dm}{e} + \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) \omega^2 \quad (1)$$

definiert ist und das Potential der Schwerkraft im Punkte  $(x' y' z')$  heißt.

Um dieses nachzuweisen, differenzieren wir den Ausdruck

$$\frac{1}{e} = ((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{-\frac{1}{2}}$$

partiell nach  $x'$  und erhalten sofort

$$\frac{\partial \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial x'} = - \frac{x - x'}{e^3}$$

und

$$\frac{\partial \left( \frac{k^2 dm}{e} \right)}{\partial x'} = k^2 \frac{x - x'}{e^3} dm.$$

Hiermit folgt aber ohne Schwierigkeit, daß wirklich der partielle Differentialquotient von  $W$  nach  $x$  gleich  $g_x$  ist; in gleicher Weise erledigen sich  $g_y$  und  $g_z$ . Wir haben also:

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{\partial W}{\partial x'} \\ g_y &= \frac{\partial W}{\partial y'} \\ g_z &= \frac{\partial W}{\partial z'}. \end{aligned} \quad (2)$$

Um für eine Axe der  $u'$ , welche mit den Axen der  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$  bzw. die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  bildet, die rechtwinkelige Komponente  $g_u$  von  $g$  zu erhalten, bilden wir zunächst durch einfache Projektion:

$$g_u = g_x \cos \alpha + g_y \cos \beta + g_z \cos \gamma. \quad (3)$$

Dieser Ausdruck für  $g_u$  läßt sich aber auf eine andere Form bringen. Denken wir uns nämlich in das Potential  $W$  anstatt  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$  drei andere Koordinaten irgend welcher Art eingeführt, die so beschaffen sind, daß eine partielle Änderung  $\partial u'$  den Punkt  $(x' y' z')$  linear um  $\partial u'$  in der durch  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  bezeichneten Richtung verschiebt, so hat man für eine solche Verschiebung  $\partial u'$  die drei in die Richtung der früher benutzten Axen fallenden Komponenten

$$\begin{aligned} \partial x' &= \partial u' \cos \alpha \\ \partial y' &= \partial u' \cos \beta \\ \partial z' &= \partial u' \cos \gamma. \end{aligned}$$

Führt man die hieraus folgenden Ausdrücke für die Cosinus der drei Winkel, sowie aus (2) die Ausdrücke für die Komponenten von  $g$  in (3) ein, so folgt:

$$g_u = \frac{\partial W}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial u'} + \frac{\partial W}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial u'} + \frac{\partial W}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial u'}$$

oder

$$g_u = \frac{\partial W}{\partial u'}. \quad (4)$$

§ 7. Die Gleichung der Niveaulflächen. Nach Bd. 1 S. 5 sind die Niveaulflächen dadurch definiert, daß sie in jedem ihrer Punkte

normal zu der daselbst vorhandenen Schwerkraft stehen. Nun ist die bei rechtwinkliger Zerlegung von  $g$  normal zu dessen Richtung sich ergebende Komponente jedenfalls null. Verstehen wir also in der Gleichung (4) des vorigen Paragraphen unter  $\partial u'$  jetzt ein vom Punkte  $(x' y' z')$  beschriebenes Linienelement einer Niveaulfläche, so ist  $g_u$  gleich null. Man hat daher für eine Niveaulfläche

$$\frac{\partial W}{\partial s} = 0. \quad (1)$$

Hieraus folgt sofort, daß für alle Punkte einer Niveaulfläche das Potential  $W$  der Schwerkraft  $g$  eine Konstante ist. Die Gleichung einer Niveaulfläche lautet daher allgemein

$$W = \text{Konstante}. \quad (2)$$

§ 8. Abstand benachbarter Niveaulflächen. Der normale Abstand zweier unendlich nahe an einanderliegenden Niveaulflächen fällt in die Richtung der Schwerkraft  $g$ . Verstehen wir nun in Gleichung (4) § 6 unter  $\partial u'$  ein vom Punkte  $(x', y', z')$  normal zu einer Niveaulfläche beschriebenes Linienelement  $\partial h$  und rechnen  $\partial h$  negativ oder positiv, je nachdem  $W$  zu- oder abnimmt, so daß  $\partial h$  nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche eine Höhenänderung vorstellt, so wird, da die ganze Schwerkraft  $g$  in die Richtung von  $\partial h$  fällt,

$$g = - \frac{\partial W}{\partial h}. \quad (1)$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf den vorigen Paragraphen, daß der totale Unterschied der Potentialwerte der Schwerkraft für unendlich benachbarte Niveaulflächen gleich ist dem Produkt aus der Schwerkraft  $g$  in den normalen Abstand der Niveaulflächen:

$$dW = - g dh. \quad (2)$$

Dieses Produkt  $g dh$  ist also für dieselben beiden, einander unendlich benachbarten Niveaulflächen konstant.

Man erkennt zugleich, daß Niveaulflächen im allgemeinen keine Parallellflächen sind, denn  $g$  wird im allgemeinen entlang einer Niveaulfläche nicht konstant sein.

So ist thatsächlich auf der Erde für das Meeresniveau die Schwerkraft etwas veränderlich und zwar hauptsächlich mit der geographischen Breite. Die hieraus entspringende Folgerung für das gegenseitige Verhalten der Niveaulflächen in der Nähe der physischen Erdoberfläche werden wir im Detail im 2. Kap. § 18 ziehen.

In seinem Werke „Figure de la Terre“ führt 1743 *Clairaut* S. 40 § 19 u. ff. die Ausdrücke Niveaulfläche (surface courbe de Niveau), Niveaulkurve (courbe de Niveau) und Niveaulschicht (couche de Niveau) ein. Er zeigt S. 41, daß der Abstand zweier Niveaulflächen, welche eine unendlich dünne Niveaulschicht begrenzen, überall umgekehrt proportional der Schwerkraft ist. Als Gleichung einer Niveaulfläche findet er S. 101 § 52:

$$\int (X'dx' + Y'dy' + Z'dz') + \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) \omega^2 = \text{Konst.}, \quad (3)$$

worin  $X'$ ,  $Y'$  und  $Z'$  die Komponenten der Anziehungskraft im Punkte  $(x' y' z')$  der Niveaufläche bezeichnen. Bei Flüssigkeiten kann Gleichgewicht nur bestehen, wie er ferner S. 99 § 48 nachweist, wenn  $X'dx' + Y'dy' + Z'dz'$  ein vollständiges Differential ist, also die ebenfalls von ihm aufgefundenen Bedingungen

$$\frac{\partial X'}{\partial y'} = \frac{\partial Y'}{\partial x'}, \quad \frac{\partial X'}{\partial z'} = \frac{\partial Z'}{\partial x'}, \quad \frac{\partial Y'}{\partial z'} = \frac{\partial Z'}{\partial y'} \quad (4)$$

erfüllt werden.

§ 9. Das Potential  $W$  hat in jedem Punkte  $P'$  des Raumes nur einen einzigen Wert. Die hohe Bedeutung, welche nach den letzten beiden Paragraphen der Funktion  $W$  zukommt, macht deren eingehende Untersuchung erforderlich. Wir setzen nach Gleichung (1) § 6 S. 8 für das Potential der Schwerkraft im Punkte  $(x' y' z') = P$  die Gleichung an:

$$W = V + \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) \omega^2, \quad (1)$$

wobei

$$V = k^2 \int \frac{dm}{e} \quad (2)$$

das Potential der Anziehung allein bedeutet. Wir untersuchen zuerst  $V$ .

Es handelt sich aber für uns hauptsächlich um Punkte in der Nähe der physischen Erdoberfläche, also um Punkte, welche bei Berücksichtigung des Luftmeeres jedenfalls noch im Innern der Erde liegen. Für die dem Punkte  $P'$  benachbarten Massenelemente  $dm$  ist aber  $e$  gleich null,  $1:e$  also unendlich und es scheint daher der mathematische Ausdruck (2) für  $V$  gerade in dem für uns wichtigsten Falle unbrauchbar zu werden. Mindestens läßt er nicht sofort erkennen, daß das Potential der unendlich benachbarten Massenelemente nicht unendlich groß, sondern gleich null ist.

Nehmen wir aber  $P'$  als Mittelpunkt eines Systems konzentrischer Kugelflächen im Abstand  $de$ , sowie als Spitze eines Kegels, der auf der Kugel vom Radius 1 das Flächenelement  $d\sigma$  ausschneidet, so bildet sich zwischen diesem Kegel und den Kugelflächen mit den Radien  $e$  und  $e + de$  ein Raumelement vom Inhalt

$$e^2 d\sigma \cdot de$$

Wir haben daher, falls  $\Theta$  die Dichtigkeit daselbst bezeichnet:

$$dm = \Theta e^2 de d\sigma. \quad (3)$$

Hiermit wird für  $V$  erhalten:

$$V = k^2 \iint \Theta e de d\sigma, \quad (4)$$

ein Ausdruck, bei welchem alle Bedenken schwinden, da  $\Theta e$  überall endlich ist. Insbesondere wird der Beitrag  $v$  der näheren Um-

gebung von  $P'$  zu  $V$  um so kleiner, je mehr wir sie beschränken. Ist innerhalb einer zu  $P'$  konzentrischen Kugel vom Radius  $\varepsilon$  der Maximalwert der Dichtigkeit gleich  $\varpi_{max}$ , so ist für diese Kugel

$$v < k^2 \varpi_{max} \iint c \, dc \, d\sigma,$$

die Integration für  $c$  von null bis  $\varepsilon$ , für  $\sigma$  über die ganze Kugel-  
fläche vom Radius 1 erstreckt. Es wird also

$$v < 2\pi k^2 \varpi_{max} \varepsilon^2. \quad (5)$$

Hiernach nimmt in der That  $v$  mit  $\varepsilon$  ab und verschwindet mit ihm, wie es sein muß.

Der Ausdruck (4) zeigt nun auch, daß  $V$  stets einen bestimmten, positiven Wert hat. Integriert man zunächst nach  $\sigma$ , so handelt es sich um Bildung von

$$\int \varpi \, d\sigma \text{ oder } \left\{ \int \varpi c^2 \, d\sigma : \int c^2 \, d\sigma \right\} \cdot \int d\sigma.$$

Dies ist aber, wenn  $P'$  innerhalb der Erde liegt, gleich der mittleren Dichte  $\varpi_e$  im Abstand  $c$  mal der Kugel-  
fläche vom Radius 1, also gleich

$$4\pi \varpi_e.$$

Man hat daher

$$V = 4\pi k^2 \int \varpi_e c \, dc. \quad (6)$$

Denkt man sich hier  $c$  als Abscisse,  $\varpi_e c$  als Ordinate, so erscheint  $V$  als das  $4\pi k^2$ -fache einer endlichen, ganz bestimmten, positiven Fläche.

Für Lagen von  $P'$  innerhalb der Erde hat aber nicht nur  $V$ , sondern, wie ein Blick auf (1) zeigt, auch  $W$  stets einen bestimmten endlichen positiven Wert. Es gilt dies überhaupt für jede Lage von  $P'$  in endlicher Entfernung vom Erdschwerpunkt. Bei der Bildung von  $\varpi_e$  zu (6) ist nur zu beachten, daß die den Punkt  $P'$  im Abstand  $c$  umgebende Kugel-  
fläche außerhalb der Erde die Dichtigkeit null antrifft.

Da nun  $W$  in jedem Punkte nur einen einzigen Wert hat, so kann durch einen Punkt auch nur eine einzige Niveaufläche hindurch-  
führen. Man kann dies auch in folgender Weise ausdrücken:

*Verschiedene Niveauflächen schneiden oder berühren sich nicht.*

Für Punkte  $P'$ , welche außerhalb der Erde sich befinden und also nicht mit ihr rotieren, hat nur  $V$  reelle Bedeutung. Rückt  $P'$  in unendliche Entfernung, so wird nach (2)  $V$  gleich null, nämlich kleiner als  $k^2$  mal der Erdmasse, dividiert durch den Abstand des dem Punkte  $P'$  nächstgelegenen Elements der Erde, welcher aber auch unendlich groß ist.

§ 10. Die Schwerkraft  $g$  hat in jedem Punkte einen bestimmten endlichen Wert und eine bestimmte Richtung, angenommen für  $g = \text{null}$ . Behufs weiterer Untersuchung von  $W$  betrachten wir seine Differentialquotienten, d. h. die Komponenten der



Schwerkraft. Fassen wir beispielsweise  $g_x$  ins Auge, so ist nach (5) § 5 S. 8 mit Rücksicht auf (2) § 6 S. 9 und (1) § 9 S. 11 im Punkte  $(x' y' z') = P'$

$$g_x = \frac{\partial V}{\partial x'} + x' \omega^2 \quad (1)$$

mit

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = k^2 \int \frac{x - x'}{e^3} dm. \quad (2)$$

Wie im vorigen Paragraphen nehmen wir  $P'$  als Mittelpunkt konzentrischer Kugeln und setzen nach (3) daselbst

$$dm = \Theta e^2 de d\sigma.$$

Dann folgt

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = k^2 \iint \frac{x - x'}{e} \Theta de d\sigma. \quad (3)$$

Beachtet man nun, daß  $(x - x') : e$  der Cosinus des Neigungswinkels von  $e$  gegen die  $x$ -Axe ist, daß also die Ungleichheit besteht:

$$-1 \leq \frac{x - x'}{e} < +1,$$

so erkennt man, daß in (3) unter dem Integralzeichen nichts unendlich wird. Ähnlich wie für  $V$  im vorigen Paragraphen kann man sich jetzt mit Rücksicht auf die endlichen Grenzen der Integration überzeugen, daß das Integral in (3) einen bestimmten endlichen Wert haben muß, der jedoch wegen  $(x - x') : e$  positiv oder negativ sein kann.

Für die unendlich nahe Umgebung von  $P'$  ist, wie es sein muß, der Beitrag zu  $\partial V : \partial x'$  unendlich klein. Setzt man nämlich in (3) für  $(x - x') : e$  den zu großen Wert  $+1$  und für  $\Theta$  den Maximalwert  $\Theta_{max}$  der Umgebung bis zum Abstände  $\varepsilon$ , so ergibt sich der zu große absolute Wert des betreffenden Beitrages gleich  $4\pi k^2 \Theta_{max} \cdot \varepsilon$ , welcher Ausdruck mit  $\varepsilon$  unendlich klein wird.

Ebenso wie  $\frac{\partial V}{\partial x'}$  verhält sich nach (1)  $g_x$  selbst. Das gleiche Verhalten zeigen aber auch  $g_y$  und  $g_z$ : Alle Komponenten von  $g$  haben bestimmte endliche Werte, die positiv oder negativ oder auch null sein können.

Die Cosinus der Neigungswinkel von  $g$  zu den Axen sind gleich

$$\frac{g_x}{g}, \quad \frac{g_y}{g}, \quad \frac{g_z}{g} \quad (4)$$

wobei

$$g = + \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} \quad (5)$$

ist; sie haben daher bestimmte, zwischen  $-1$  und  $+1$  gelegene Werte und die Schwerkraft hat eine unzweideutig bestimmte Richtung, solange nur  $g$  von null verschieden ist.

§ 11. *W* ist eine stetige Function des Ortes. Nach den letzten beiden Paragraphen hat *V* in jedem Punkte nur einen Wert und die Differentialquotienten von *V* sind endlich. Verschiebt sich der Punkt  $(x' y' z') = P'$ , so ist *V* in der Endlage  $(x' + dx', y' + dy', z' + dz')$  gleich

$$V + \frac{\partial V}{\partial x'} dx' + \frac{\partial V}{\partial y'} dy' + \frac{\partial V}{\partial z'} dz',$$

mithin von dem Werte *V* in *P'* nur unendlich wenig verschieden.

Hieraus folgt, daß *V* eine stetig veränderliche Function ist. Dasselbe gilt für *W*, wie ein Blick auf (1) § 9 S. 11 zeigt.

§ 12. Die Schwerkraft ändert sich nach Grösse und Richtung stetig. Wir nehmen zunächst an, daß *P'* außerhalb der Erde sich befinde, mithin für alle Massenelemente  $e > \text{null}$  ist.

Ist aber  $e > \text{null}$ , so ist leicht zu sehen, daß überhaupt alle Differentialquotienten von *V* beliebig hoher Ordnung endliche Werte haben. Mit Rücksicht auf die Bedeutung von *V* nach (2) § 9 S. 11 kommt die wiederholte Differentiation von *V* hinaus auf diejenige von  $\frac{1}{e}$ , d. i.

$$\left( (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Differenziert man hier wiederholt nach  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$ , so entstehen Aggregate von Quotienten aus Vielfachen von  $(x - x')$ ,  $(y - y')$  und  $(z - z')$  sowie ihrer höhern Potenzen im Zähler, mit  $e$  und seinen höhern Potenzen im Nenner. Wegen  $e > \text{null}$  sind dies durchaus bestimmte endliche Werte, die sich mit dem Ort stetig ändern, und es geben daher auch die zur Bildung der successiven Differentialquotienten von *V* erforderlichen Integrationen bestimmte endliche Werte.

So lange wir also den Punkt *P'* als einen außerhalb der Erdmasse gelegenen Punkt betrachten können, haben alle Differentialquotienten von *V* und damit nach (1) § 9 S. 11 auch diejenigen von *W* bestimmte endliche Werte. Hiermit läßt sich aber wie im vorigen Paragraphen für jeden Differentialquotienten von *W* die Stetigkeit nachweisen, welches Ergebnis uns zunächst bezüglich der ersten Differentialquotienten interessiert.

Ist jedoch *P'* ein innerer Punkt, so gilt Vorstehendes erst nach Ausschluss der diesen Punkt umgebenden Masse. Wir fixieren die auszuschliessende Masse dadurch näher, daß wir um *P'* eine geschlossene Fläche ziehen, welche sie begrenzt.\*) Für diese Masse sei *V* mit  $v$  bezeichnet. Nach (3) § 10 S. 13 ist nun

---

\*) Der Nachweis der Stetigkeit für einen innern Punkt ist im wesentlichen nach S. 11—12 von „*P. G. Lejeune-Dirichlet*, Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte. Herausgegeben von *Dr. F. Grube*, Leipzig, Teubner 1876 (4 M).“

$$\frac{\partial v}{\partial x'} = k^2 \iint \frac{x - x'}{e} \Theta \, de \, d\sigma,$$

wobei sich die Integration über die betreffende Masse auszudehnen hat. Setzen wir hierin für  $(x - x') : e$  die Einheit und für  $\Theta$  den vorkommenden Maximalwert, so folgt der absolute Wert von

$$\frac{\partial v}{\partial x'} < k^2 \Theta_{\max} \int de \int d\sigma$$

Das Integral für  $d\sigma$  ist gleich  $4\pi$ , dasjenige von  $de$  ist  $< \varepsilon$ , wenn  $\varepsilon$  der größte Abstand der umschließenden Grenzfläche von  $P'$  ist. Wir haben also den absoluten Wert von

$$\frac{\partial v}{\partial x'} < 4\pi k^2 \Theta_{\max} \cdot \varepsilon.$$

Verschiebt sich nun  $P'$  innerhalb des abgegrenzten Raumes unendlich wenig, so kann sich  $\frac{\partial v}{\partial x'}$  keinesfalls um mehr als das Doppelte von  $4\pi k^2 \Theta_{\max} \cdot \varepsilon$  ändern; im Gegenteil wird die Änderung immer kleiner sein. Da wir aber die den Punkt  $P'$  umschließende Fläche beliebig nahe an ihn legen können, ohne daß an den vorstehenden Betrachtungen sich etwas ändert, so können wir uns  $\varepsilon$  beliebig klein denken und wir erkennen somit, daß  $\frac{\partial v}{\partial x'}$  und seine Änderung bei unendlich kleiner Verschiebung von  $P'$  keinen angebbaren endlichen Betrag besitzen.

Dieses zeigt, daß bei beliebiger Lage von  $P'$  die ersten Differentialquotienten von  $V$  und  $W$  nach  $x'$ , und ebenso diejenigen nach  $y'$  und  $z'$ , für unendlich kleine Verschiebungen von  $P'$  sich nur unendlich wenig ändern, daß also  $g_x$ ,  $g_y$  und  $g_z$  stetige Funktionen des Ortes sind.

Man erkennt hieraus weiter, daß dieselbe Eigenschaft für die Schwerkraft  $g$  selbst nach GröÙe und Richtung vorhanden ist; denn  $g$  läßt sich darstellen als Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipeds mit den Seiten  $g_x$ ,  $g_y$  und  $g_z$ , deren stetige Änderungen auch  $g$  nach GröÙe und Richtung stetig ändern, falls nur  $g > \text{null}$  ist.

§ 13. Der Lauf der Niveaflächen für  $g > \text{null}$ . Nach dem Vorhergehenden hat die Schwerkraft, wenn sie nur nicht null ist, in jedem Punkte eine bestimmte Richtung: die *Lotrichtung*, die sich bei unendlich kleinen Verschiebungen nur unendlich wenig ändert. Dasselbe gilt auch für das Flächenelement der Niveafläche, indem es zur Richtung der Schwerkraft normal steht. Man kann daher sagen, abgesehen vom Falle  $g = \text{null}$ :

*Eine Niveafläche verläuft stetig gebogen ohne Kanten und Spitzen, und sie kann sich nicht selbst schneiden.*

Man kann auch noch hinzufügen, daß eine Niveafläche *nicht sich selbst berühren* und auch *keine Schneiden* besitzen kann.

Sobald nämlich  $g > \text{null}$  ist, läßt sich nach § 8 S. 10 unendlich nahe an der Niveaufläche auf jeder Seite derselben eine andere, mit einem verschiedenen, wenn auch unendlich wenig verschiedenen  $W$  konstruieren, deren eine nun aber in der Nähe der Schneide oder Berührungsstelle notwendig die gegebene Fläche schneiden würde. Dies ist aber nach § 9 S. 12 unmöglich.

Um nun noch den Lauf der Niveauflächen im ganzen zu beurteilen, denken wir uns eine Niveaufläche bis zu einer Linie in derselben fortgesetzt und fragen, ob in irgend einer solchen Linie die Fläche enden kann. Ist  $P'$  ein Punkt der Linie, so umschließen wir  $P'$  mit einer hinreichend kleinen Kugelfläche, welche den vorhandenen Niveaufächenteil schneidet. Auf der Kugelfläche können wir nun geschlossene Linien ziehen, welche die Durchschnittslinie beider Flächen kreuzen. Durchläuft ein Punkt eine solche Linie, von der Niveaufläche ausgehend, so nimmt  $W$  anfangs zu oder ab, zum Schluß ebenfalls bzw. zu oder ab. Weil aber  $W$  wieder den Anfangswert annimmt, muß es auf der betreffenden Linie irgendwo außer in dem bereits vorhandenen Teil der Niveaufläche mindestens einmal noch gerade so groß sein.

Man erkennt leicht, daß die Hilfskugel die Niveaufläche mindestens in *einer* geschlossenen Linie schneiden wird.

Bei hinreichender Kleinheit des Kugelradius wird es nur *eine* Linie sein und zwar annäherungsweise ein größter Kreis. Ist  $g$  gleich null so können andere Verhältnisse eintreten. Jedenfalls kann eine Niveaufläche für  $g > \text{null}$  keinen Rand haben:

*Eine Niveaufläche ist entweder unendlich oder geschlossen.*

Im ersten Falle läuft sie ins Unendliche, denn im Endlichen würde sich die Fläche stellenweise unendlich dicht zusammendrängen, was mit § 8 S. 10 nur dann nicht in Widerspruch steht, wenn  $g$  an der betreffenden Stelle gleich null ist.

**§ 14. Die Niveauflächen der Erde** verlaufen in der Nähe der physischen Erdoberfläche, wo erfahrungsmäßig die Schwerkraft nicht null ist, nach dem vorigen Paragraphen jedenfalls stetig gebogen, ohne Kanten und Spitzen, und ohne sich selbst zu schneiden. Ob sie aber geschlossene Flächen sind oder nicht, und welcher Art eventuell der Zusammenschluß ist, läßt sich ohne weiteres nicht sagen, da uns immer nur Teile von Niveauflächen in der Nähe der physischen Erdoberfläche zur Anschauung kommen.

Im allgemeinen kann man nun in dieser Beziehung Folgendes anführen.

Wir denken uns um eine Masse  $M$  eine einhüllende Kugel vom Durchmesser  $D$  geschlagen und das Potential  $v$  der Anziehung außerhalb der Kugel in betracht gezogen. Man bemerkt leicht, daß dasselbe auf jedem Radius von der Oberfläche nach außen fortwährend

abnimmt, da für irgend ein Massenelement die Entfernung  $e$  fortwährend wächst. Denkt man sich nun auf irgend einem Radius zwei Punkte  $J$  und  $A$ , in Bezug auf welche bzw. die  $e \leq D$  und  $\geq D$  sind, so wird  $v_J > \frac{M}{D}$  und  $v_A < \frac{M}{D}$  sein. Zwischen  $J$  und  $A$  giebt es somit auf jedem Radius einen Punkt der Niveauläche  $v = \frac{M}{D}$  und diese ist daher kugelartig geschlossen.

Da  $v$  nach außen ab-, nach innen bis zur Oberfläche der Kugel sicher zunimmt, so sind hiernach alle Niveaulächen außerhalb dieser Oberfläche kugelartig geschlossen und umhüllen sich schalenartig. Nach innen zu geht dies so weit, als die Anziehung bei der Bewegung von außen nach innen nicht durch null hindurch geht, da ein Schneiden von Niveaulächen sonst nicht vorkommen kann.

Rotiert die Masse  $M$  wie die Erde, so tritt zum Potential der Anziehung dasjenige der Zentrifugalkraft. Solange dasselbe relativ klein ist, entspricht der Berücksichtigung der Rotation nur eine geringe Verschiebung der Niveaulächen bestimmten Potentialwertes nach außen, ohne daß an der oben angegebenen Konfiguration etwas geändert würde.

Bei der Erde hat man es in der Nähe ihrer Oberfläche nur mit einem kleinen Einfluß der Zentrifugalkraft zu thun. Um dieses nachzuweisen, könnte man nach ganz rohen Annahmen die Potentiale der Anziehung und Zentrifugalkraft berechnen und vergleichen. Wir wollen indessen darauf nicht eingehen, sondern andere allgemein bekannte Thatsachen erwähnen, die zu demselben Resultate führen.

Wir wissen aus der Beobachtung des Erdschattens bei Mondfinsternissen oder aus anderen Erfahrungen (vergl. 6. Kap. § 1), daß die physische Erdoberfläche jedenfalls näherungsweise Kugelform hat. Da nun  $\frac{8}{11}$  der physischen Erdoberfläche von dem zusammenhängenden Weltmeere gebildet werden, dessen Oberfläche nur wenig von einer Niveauläche abweicht, so unterliegt es keinem Bedenken, sich eine Niveauläche in der Nähe der Erdoberfläche vorzustellen, etwa das Geoid (Bd. 1 S. 5), welche Niveauläche nun auch, soweit die Meeresfläche reicht, näherungsweise Kugelform hat. Es kommt dabei ein Umstand sozusagen stillschweigend in betracht, auf den wir bei dem Versuch aufmerksam werden, diese Niveauläche unterhalb des Landes, welches aus dem Meere emporsteigt, fortzusetzen. Es ist dies die durch Beobachtung festgestellte Thatsache, daß überall auf der physischen Erdoberfläche die Richtung der Schwerkraft im großen und ganzen normal zu ihr steht, also wesentlich gegen einen mittleren Punkt der Erde konvergiert. Zwar liegen nicht von allen Punkten der Erdoberfläche Beobachtungen vor, aber doch von sehr vielen: man kann etwa 98% der Oberfläche als bereist betrachten, und über die Lücken gestattet uns die oben entwickelte Theorie hinweg zu sehen.

Denn sie lehrt uns, daß die Konvergenz der Lotrichtungen nur eine Folge der Anziehungskraft der Erde sein kann, gegen welche die Zentrifugalkraft in erster Annäherung verschwindet.

Hiermit steht die an zahlreichen Punkten der Erdoberfläche gemachte Wahrnehmung im Einklang, daß die Schwerkraft  $g$  daselbst in erster Annäherung konstant ist.

Wollen wir nun eine Niveaufläche in der Nähe der physischen Erdoberfläche beschreiben, so kann diese selbst als Ausgang dienen. Die Niveaufläche kann sich nicht weit von ihr (im Verhältnis zum Erdradius) entfernen, da sie ja angenähert normal zu den Lotrichtungen steht. Gehen wir von einem Punkte mit dem Potentialwert  $W_0$  aus auf der physischen Erdoberfläche vorwärts, so gehört zu jedem Differential des Weges ein  $dh$  und ein  $dW = -g dh$ ; für einen endlichen Weg ist die Änderung von  $W$  gleich dem über denselben zu erstreckenden

$$\int (-g dh).$$

Vom Endpunkt des Weges aus können wir uns in der *Lotlinie* (Kraftlinie, Bd. 1 § 3 S. 5) vorwärts bewegen, bis der Ausgangswert  $W_0$  wieder erreicht ist. Wegen der genäherten Konstanz von  $g$  gehört dazu angenähert der vertikale Weg

$$-\int dh,$$

eine im Verhältnis zum Erdradius jedenfalls kleine Gröfse.

Einen zweiten Punkt mit dem Potentialwert  $W_0$  giebt es in derselben Lotlinie in der Nähe der physischen Erdoberfläche sicher nicht, da  $g$  hier entschieden nach innen gerichtet ist, also  $W$  nach innen zunimmt.

Die Niveauflächen, welche sich teilweise in der Nähe der physischen Erdoberfläche befinden, umschließen hiernach die Erde in der Nähe der physischen Erdoberfläche vollständig. Ihre Form ist die einer etwas durch stetige Verbiegungen deformierten Kugelfläche. Es sind also *kugelartige Flächen*, geschlossene Flächen einfachen Zusammenhanges. Flächen abnehmenden Potentialwertes umschließen sich schalenartig.

Die Möglichkeit der Tracierung von Kanälen quer durch die Kontinente (Bd. 1 S. 5) ist eine unmittelbare Folge der angegebenen Eigenschaft der Niveauflächen in der Nähe der physischen Erdoberfläche.

In größerer Entfernung von der Erde ändern sich die Verhältnisse; hierüber wird § 22 des nächsten Kapitels sich verbreiten. Dagegen besteht im Erdinnern überall die schalenartige Aufeinanderfolge, was nicht ausschließt, daß ein Durchschneiden einzelner Niveauflächen mit sich selbst, da wo  $g$  null ist, stattfindet und daß andere Niveauflächen in für sich geschlossene Teile zerfallen. Einige



Bemerkungen über die Schwerkraft im Erdinnern bringt das sechste Kapitel, § 13.

Nimmt man an, daß das Luftmeer die physische Erdoberfläche vollständig umhüllt und in relativer Ruhe ist, so werden nach hydrostatischem Gesetz die Flächen gleicher Dichtigkeit der Luft Niveauflächen sein und man würde somit darauf hingeführt, daß die Niveauflächen in der Nähe der Erdoberfläche geschlossen sind. Allein da zur Zeit für die Nähe der Pole Beobachtungen fehlen, so ist jene Annahme unzulässig und es bedarf jedenfalls immer noch einer Untersuchung ihres Verhaltens an den Polen. Auch die Herbeiziehung des Luftmeeres gewährt somit nicht die Möglichkeit, ohne eine besondere Untersuchung behaupten zu können, daß die Niveauflächen in der Nähe der physischen Erdoberfläche geschlossen sind; mit Rücksicht auf § 8 S. 10 läßt sich nur die Möglichkeit der Kanaltrecierung insoweit folgern, als die physische Erdoberfläche bekannt ist. — Übrigens hat es ein Interesse, die in Rede stehende Angelegenheit, wie oben geschehen, ohne Herbeiziehung des Luftmeeres zu behandeln.\*)

§ 15. Die zweiten Differentialquotienten von  $W$ . Es genügt zunächst, nur den zweiten Differentialquotienten nach  $x'$  zu betrachten. Nach § 6 S. 9 ist aber

$$\frac{\partial \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial x'} = \frac{x - x'}{e^3}.$$

Daher ist auch

$$\frac{\partial^2 \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial x'^2} = -\frac{1}{e^3} + 3 \frac{x - x'}{e^2} \frac{\partial \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial x'} = -\frac{1}{e^3} + 3 \frac{(x - x')^2}{e^5}.$$

Hieraus findet sich mit Rücksicht auf (1) und (2) § 9 S. 11 der gesuchte zweite Differentialquotient

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} = k^2 \int \frac{-e^2 + 3(x - x')^2}{e^5} \frac{dm}{e^2} + \omega^2. \quad (1)$$

Setzt man endlich hierin wie in § 9 S. 11  $dm = \Theta e^2 de d\sigma$ , so folgt:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} = k^2 \iint \frac{-e^2 + 3(x - x')^2}{e^3} \Theta de d\sigma + \omega^2. \quad (2)$$

Solange der Punkt  $(x' y' z') = P'$  außerhalb der Erde liegt, ist, wie schon § 12 S. 14 bemerkt, dieser Ausdruck ein bestimmter Wert. Liegt jedoch  $P'$  innerhalb der Erde (d. i. der gerade für uns wichtigste Fall), so wird der Ausdruck (2) unbrauchbar. Er zerfällt nämlich alsdann in die Differenz zweier Integrale, die wegen der Integral-

\*) Auf grund der Potentialtheorie wurden die Eigenschaften der Niveauflächen klargelegt in den beiden Abhandlungen von *H. Bruns*: „Über einen Satz der Potentialtheorie“ *Crelles Journal* 1876, Bd. 81, S. 349 u. ff. und „Die Figur der Erde“ Publikation des königl. preuss. geodät. Instituts, 1878. Welches die Erfahrungen sind, zufolge deren die Niveauflächen der physischen Erdoberfläche sich als geschlossen und nahezu kugelförmig ergeben, wird jedoch nicht erörtert, jedenfalls weil für die betreffende Abhandlung die Untersuchung anderer Fragen in den Vordergrund zu treten hatte.

grenze  $e$  gleich null beide unendlich groß werden, wovon man sich für den Fall einer homogenen,  $P'$  konzentrisch umschließenden Kugel leicht überzeugen kann. Ausdruck (2) läßt somit in diesem Falle den Wert des zweiten Differentialquotienten nicht erkennen.

Um nun zu einem auch für innere Punkte brauchbaren Ausdruck zu gelangen, bringen wir zunächst den Ausdruck für  $\frac{\partial V}{\partial x'}$ , d.i. nach (2) § 10 S. 13:

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = k^2 \int \frac{x - x'}{e^3} dm \quad (3)$$

in eine andere Gestalt.

Es ist hierbei darauf aufmerksam zu machen, daß man bei (3), wie bei Bildung von  $V$ , an die spezielle, § 4 S. 5 eingeführte Lage der rechtwinkligen Koordinatenachsen nicht gebunden ist; nur für  $W$  muß diese Lage wegen des Potentials der Zentrifugalkraft festgehalten werden, wenn der Ausdruck (1) § 9 S. 11 bestehen bleiben soll.

§ 16. Transformation der Ausdrücke für die ersten Differentialquotienten von  $V$ .\*) Wir betrachten zunächst einen Körper, in welchem erstens die Dichtigkeit der Masse eine stetige Funktion des Ortes ist und zweitens die ersten Differentialquotienten der Dichtigkeit nach den Koordinaten endlich und stetig sind. Wir nennen seine Potentialfunktion der Anziehung  $v$ , beziehen ihn auf ein rechtwinkeliges Axensystem und bezeichnen die Koordinaten des angezogenen Punktes  $P'$  wie früher mit  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$ , diejenigen eines Massenelementes des Körpers aber mit  $x, y$  und  $z$ . Indem wir unter Annahme der Dichtigkeit  $\Theta$  im Punkte  $(x, y, z)$  somit  $dm = \Theta dx dy dz$  zu setzen haben, wird nach (3) des vorigen Paragraphen mit Rücksicht auf die Schlussbemerkung daselbst:

$$\frac{\partial v}{\partial x'} = k^2 \iiint \frac{x - x'}{e^3} \Theta dx dy dz. \quad (1)$$

Aus  $e^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$  folgt aber

$$\frac{\partial \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial x} = - \frac{x - x'}{e^3},$$

womit sich (1) auf folgende Form bringen läßt:

$$\frac{\partial v}{\partial x'} = - k^2 \iint dy dz \int \Theta \frac{\partial \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial x} dx. \quad (2)$$

Um das hierin auftretende Integral nach  $x$  umzutormen, beachten wir, daß

---

\*) *Lejeune-Dirichlet*, Vorlesungen; S. 19—24.



$$\frac{\partial \left( \frac{\Theta}{e} \right)}{\partial x} = \frac{1}{e} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \Theta \frac{\partial \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial x},$$

mithin

$$-\int \Theta \frac{\partial \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial x} dx = \int \frac{1}{e} \frac{\partial \Theta}{\partial x} dx + \Sigma \frac{\Theta_1}{e_1} - \Sigma \frac{\Theta_2}{e_2}. \quad (3)$$

Hierin bedeutet  $\Sigma$  ein Summenzeichen und es beziehen sich die Indices 1 und 2 auf diejenigen Punkte, in welchen eine Parallele zur  $x$ -Axe, entlang welcher bei konstantem Wert von  $y$  und  $z$  integriert wird, die Oberfläche bzw. beim Eintritt und Austritt ( $x$  wachsend gedacht) schneidet.

Die Formel (3) gilt unzweifelhaft, sobald  $\Theta$  und  $\frac{1}{e}$ , sowie ihre ersten Differentialquotienten endlich und stetig sind. Für  $\Theta$  und seine ersten Differentialquotienten sind diese Eigenschaften nach der Voraussetzung vorhanden; für  $\frac{1}{e}$  sind sie es, sobald  $e > 0$  ist. Ohne weiteres ist sonach (3) nur gültig für Lagen von  $P'$  außerhalb des Körpers.

Liegt  $P'$  innerhalb, so schließen wir, um (3) zweifellos anwenden zu können, die Masse innerhalb einer zu  $P'$  konzentrischen Kugelfläche vom Radius  $\varepsilon$  aus. Trifft die Parallele zur  $x$ -Axe, entlang welcher integriert wird, diese Kugelfläche, so tritt zu (3) rechter Hand noch das Gliederpaar

$$- \frac{\Theta'_1}{\varepsilon} + \frac{\Theta'_2}{\varepsilon}, \quad (3^*)$$

worin die Indices 1' und 2' sich auf den Eintritts- und Austrittspunkt für die Kugelfläche beziehen.

Es sei nun  $v = v_1 + v_2$  und zwar  $v_1$  die Potentialfunktion der Anziehung für die äußere Masse,  $v_2$  diejenige für die Kugel  $\varepsilon$ . Dann folgt aus (2), (3) und (3\*):

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \left\{ \begin{array}{l} k_2 \int \int \int_{\text{ohne } \varepsilon} \frac{1}{e} \frac{\partial \Theta}{\partial x} dx dy dz \\ + k^2 \int \int \Sigma \left( \frac{\Theta_1}{e_1} - \frac{\Theta_2}{e_2} \right) dy dz \\ - k^2 \int \int \left( \frac{\Theta'_1}{\varepsilon} - \frac{\Theta'_2}{\varepsilon} \right) dy dz. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Das dreifache Integral erstreckt sich über die äußere Masse, was durch die Bemerkung „ohne  $\varepsilon$ “ angedeutet ist; die Doppelintegrale betreffen beziehungsweise die äußere Masse und die Kugel. Diese beiden Integrale sind Oberflächenintegrale, welche wir jetzt umwandeln.

Bezeichnen wir mit  $ds$  ein Flächenelement, dessen nach außen gerichtete Normale mit der  $x$ -Axe den Winkel  $\alpha$  einschließt, so wird  $dy dz = \pm ds \cos \alpha$ , je nachdem  $\cos \alpha$  positiv oder negativ

ist. Denkt man sich nun zunächst eine Parallele zur  $x$ -Axe, welche die Oberfläche des Körpers berührt, so ist  $\cos \alpha = \text{null}$ ; rückt die Parallele alsdann in den Körper herein, so erkennt man leicht, daß für alle Indices 1 (Eintrittspunkte)  $\cos \alpha$  negativ wird, für alle Indices 2 (Austrittspunkte) aber positiv. Mithin können wir im zweiten Integral sowohl für  $\frac{\Theta_1}{e_1} dy dz$ , als auch für  $-\frac{\Theta_2}{e_2} dy dz$  setzen  $\frac{\Theta}{e} ds \cos \alpha$ ; die Integration erstreckt sich sodann über die ganze Oberfläche.

Ganz ähnlich wird es mit dem dritten Integral, bei welchem wir  $\alpha$  aber auf die nach  $P'$  gerichtete Normale beziehen wollen, sodaß  $\cos \alpha$  für Eintrittsstellen positiv, für Austrittsstellen negativ wird. Wenn wir nun in (4) noch beiderseits  $\frac{\partial v_2}{\partial x}$  addieren und das erste Integral über den ganzen Raum des Körpers ausdehnen, zur Richtigstellung aber ein ebensolches Integral für die Kugel abziehen, so erhalten wir:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left\{ \begin{array}{l} k^2 \int \int \int_{\text{Körper}} \frac{1}{e} \frac{\partial \Theta}{\partial x} dx dy dz \\ - k^2 \int \int \int_{\text{Kugel}} \frac{1}{e} \frac{\partial \Theta}{\partial x} dx dy dz \\ - k^2 \int \frac{\Theta \cos \alpha}{e} ds \quad - k^2 \int \frac{\Theta \cos \alpha}{e} ds \\ + \frac{\partial v_2}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (5)$$

Wir gehen nun dazu über,  $\varepsilon$  verschwinden zu lassen. Im zweiten Integral von (5) setzen wir für  $dx dy dz$  wie in § 9 S. 11  $e^2 de d\sigma$  und für  $\frac{\partial \Theta}{\partial x}$  den vorkommenden Maximalwert, den wir seinem absoluten Wert nach mit  $\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)_{\max}$  bezeichnen. Dann ist

$$k^2 \int \int \int_{\text{Kugel}} \frac{1}{e} \frac{\partial \Theta}{\partial x} dx dy dz < k^2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)_{\max} \int \int e de d\sigma$$

$$\text{d. i.} \quad \leq 2\pi k^2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)_{\max} \varepsilon^2,$$

was für  $\varepsilon$  gleich null verschwindet.

Im vierten Integral von (5) setzen wir  $ds = \varepsilon^2 d\sigma$ , nehmen für  $\cos \alpha$  den Maximalwert 1 und für  $\Theta$  den Maximalwert  $\Theta_{\max}$ ; dann folgt der absolute Wert von

$$k^2 \int \frac{\Theta \cos \alpha}{e} ds \leq 4\pi k^2 \Theta_{\max} \cdot \varepsilon,$$

was für  $\varepsilon = \text{null}$  ebenfalls verschwindet.

$\frac{\partial v_2}{\partial x'}$  verschwindet für  $\varepsilon = \text{null}$  nach § 10 S. 13 aber auch. Mithin wird endlich anstatt (5) erhalten:

$$\frac{\partial v}{\partial x'} = k^2 \iiint \frac{1}{e} \frac{\partial \Theta}{\partial x} dx dy dz - k^2 \int \frac{\Theta \cos \alpha}{e} ds. \quad (6)$$

Hierin bezieht sich das erste Integral auf den ganzen Raum des Körpers und das zweite auf seine Oberfläche. Es ist, wie man leicht erkennt, dasselbe Resultat, als ob bei der Entwicklung auf die Lage von  $P'$  im Innern des Körpers keine Rücksicht genommen wäre. Jedoch ist dann (6) nur für äußere Lagen bewiesen.

Es gilt aber auch für Lagen von  $P'$  auf der Oberfläche des Körpers. In diesem Falle tritt nur in der Entwicklung an Stelle der Kugel ein Teil derselben, welcher von einem Stück Körper- und einem Stück Kugeloberfläche begrenzt wird. In (5) ist nun das zweite Integral über diesen Kugelteil, das dritte über die äußere Oberfläche ohne den von der Kugel herausgeschnittenen Teil und das vierte über den innerhalb des Körpers liegenden Teil der Kugelfläche zu erstrecken. Man gelangt ohne Mühe wieder zu (6), wenn noch beachtet wird, daß derjenige Teil des Oberflächenintegrals in (6), welcher von der Kugel in der Umgebung von  $P'$  ausgeschnitten wird, für  $\varepsilon = \text{null}$  verschwindet, wie man mit Rücksicht darauf ersieht, daß dem Oberflächenelement  $ds$  in der betreffenden Umgebung von  $P'$  die Form  $e de d\psi$  gegeben werden kann, wobei  $d\psi$  einer Drehung von  $e$  auf der Oberfläche entspricht.

Kehren wir nun zur Erde zurück, auf welche sich  $V$  bezieht. Dieselbe denken wir uns aus Teilen zusammengesetzt, innerhalb deren die Dichtigkeit sich stetig ändert und die sämtlichen Differentialquotienten der Dichtigkeit endlich und stetig sind.  $V$  setzt sich nun ebenfalls aus den  $v$  der einzelnen Teile zusammen, ebenso  $\frac{\partial V}{\partial x'}$  aus den  $\frac{\partial v}{\partial x'}$ . Bildet man, indem man für  $\frac{\partial v}{\partial x'}$  die Formel (6) anwendet, die Summe der Raumintegrale, so kann man sie in ein einziges Integral wie das erste in (6), ausgedehnt über die ganze Erde, zusammenziehen; nur ist bei der Integration auf die Unstetigkeitsflächen von  $\Theta$  zu achten. Bildet man die Summe der Oberflächenintegrale, so erkennt man, daß sich die Bestandteile derselben für die Grenzflächen je zweier benachbarter Teile wegen entgegengesetzter Richtung der Normale zu einem Integral zusammensetzen, welches von der sprunghaften Änderung  $\Delta \Theta$  der Dichtigkeit in derjenigen Richtung der Normale abhängt, auf welche sich der Winkel  $\alpha$  bezieht. Es bleibt dann noch das Oberflächenintegral (6) für die Oberfläche der ganzen Erde, für welches man ebenso wie für die Unstetigkeitsflächen ein  $\Delta \Theta$  einführen kann, welches gleich  $-\Theta$  in der Oberfläche ist, falls die Normale wie bisher nach außen gezogen wird.

Formel (6) können wir sonach, wenn nur für  $-\Theta$  gesetzt wird  $\Delta\Theta$ , auf die ganze Erde bei beliebiger Lage von  $P'$  anwenden, und zwar offenbar nicht nur für die Ableitung von  $V$  nach  $x'$ , sondern auch für diejenigen nach  $y'$  und  $z'$ .

Sind  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  bezw. mit der Axe der  $x$ ,  $y$  und  $z$  die Winkel der Normalen der Oberfläche und der Unstetigkeitsflächen der Dichtigkeit; ist ferner  $\Delta\Theta$  die Änderung der Dichtigkeit bei Durchkreuzung der Oberfläche bezw. der Unstetigkeitsflächen in Richtung der Normale, so wird:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x'} &= k^2 \iiint \frac{1}{e} \frac{\partial \Theta}{\partial x} dx dy dz + k^2 \int \frac{\Delta\Theta \cos \alpha}{e} ds \\ \frac{\partial V}{\partial y'} &= k^2 \iiint \frac{1}{e} \frac{\partial \Theta}{\partial y} dx dy dz + k^2 \int \frac{\Delta\Theta \cos \beta}{e} ds \\ \frac{\partial V}{\partial z'} &= k^2 \iiint \frac{1}{e} \frac{\partial \Theta}{\partial z} dx dy dz + k^2 \int \frac{\Delta\Theta \cos \gamma}{e} ds.\end{aligned}\quad (7)$$

Hierin sind die Raumintegrale über die ganze Erde, die Flächenintegrale über ihre Oberfläche und die Unstetigkeitsflächen der Dichtigkeit auszudehnen.

§ 17. Die zweiten und höheren Differentialquotienten von  $W$  haben bestimmte endliche Werte und ändern sich stetig, solange der Punkt  $P'$  sich nicht an einer Stelle, in welcher die Dichtigkeit  $\Theta$  Singularitäten hat, befindet.

Wir denken uns wieder, wie am Schlusse des vorigen Paragraphen, die Erde in Abteilungen zerlegt, innerhalb deren die Dichtigkeit und alle beliebig hohen Differentialquotienten derselben endlich und stetig sind.

Die Ausdrücke (7) des vorigen Paragraphen können dann sicher Anwendung finden und sie lassen sich zunächst jedenfalls einmal differenzieren, solange  $P'$  sich nicht in einer Grenzfläche der Abteilungen befindet. Denn die Flächenintegrale lassen sich beliebig oft differenzieren, sobald  $e$  für keinen Flächenpunkt null wird, weil dann die Differentialquotienten von  $\frac{1}{e}$  unter dem Integralzeichen alle endlich und stetig sind (vergl. § 12 S. 14).

Die Raumintegrale der Ausdrücke (7) lassen sich aber unmittelbar jedenfalls einmal differenzieren, da sie nichts anderes als Potentialfunktionen der Anziehung, die sich nach § 10 S. 13 differenzieren lassen, vorstellen, wobei nur die Dichtigkeit nicht  $\Theta$ , sondern der betreffende erste Differentialquotient von  $\Theta$  ist, welcher aber die wesentliche Eigenschaft, endlich zu sein, mit  $\Theta$  teilt.

Es ist nun leicht zu erkennen, daß jetzt auch abermals differenziert werden kann. Denn die ersten Differentialquotienten jedes der Raumintegrale lassen sich nach den Formeln (7) wieder als Aggregate von Raumintegralen und Flächenintegralen darstellen, wobei

nur an Stelle von  $\Theta$  der betreffende Differentialquotient von  $\Theta$  tritt. — U. s. f.

Leuchtet auf diese Weise ein, daß alle Differentialquotienten von  $V$  bestimmte endliche Werte haben müssen, welcher Ordnung sie auch angehören, so ist nun, wie schon § 12 S. 14 in einem ähnlichen Fall bemerkt, die weitere Folge hiervon die Stetigkeit der Differentialquotienten.

Dieselben Eigenschaften wie die Differentialquotienten von  $V$  haben auch diejenigen von  $W$ , weil der von der Zentrifugalkraft herrührende Teil von  $W$  zu den zweiten und höheren Differentialquotienten von  $V$  nur konstante Beiträge oder null hinzufügt.

Hiermit ist der an die Spitze des Paragraphen gestellte Satz für jeden Differentialquotienten von angebar hoher Ordnung bewiesen.

Das Vorstehende läßt unentschieden, wie sich die Differentialquotienten beim Durchgange von  $P'$  durch die Singularitätsstellen der Dichtigkeit gestalten. Aus der im Folgenden für die zweiten Differentialquotienten angestellten Untersuchung wird hervorgehen, daß sie sich dabei unstetig ändern.

### § 18. Die zweiten Differentialquotienten von $V$ beim Durchgange von $P'$ durch Singularitätsstellen der Dichtigkeit.

Die zweiten Differentialquotienten von  $V$  und damit diejenigen von  $W$  würden auch hier mit stetig veränderlicher Lage von  $P'$  bestimmte endliche Werte in stetiger Änderung durchlaufen, wenn nicht die Flächenintegrale der Ausdrücke (7) des § 16 S. 24 für  $e = \text{null}$  unendlich werdende Elemente erhielten. Nehmen wir nun an, daß an der Stelle  $P_0$  der Punkt  $P'$  eine Fläche durchdringt, in welcher Singularitäten von  $\Theta$  auftreten und die wir kurz Grenzfläche nennen. Es hängt dann der Ausnahmezustand der zweiten Differentialquotienten nur von demjenigen Teile der Flächenintegrale ab, welcher sich auf die Umgebung von  $P_0$  bezieht. Wir haben also nur diese ins Auge zu fassen; dabei ist die Begrenzung der Umgebung willkürlich.

Die Betrachtung würde sehr einfach werden, wenn wir diese Umgebung als eben voraussetzen wollten. Indessen erscheint vielleicht die Berechtigung zu dieser Voraussetzung zweifelhaft, obgleich man es bei der Zerlegung der Erde in Abteilungen von stetig verlaufender Dichtigkeit jedenfalls nur mit einer Annäherung zu thun hat. Wir stellen daher eine Untersuchung an die Spitze, wobei die Grenzfläche gekrümmt vorausgesetzt wird, ohne daß in dieser Krümmung Singularitäten auftreten, was vollkommen den Verhältnissen genügt. \*)

\*) Im wesentlichen nach „*Bernhard Riemann, Schwere, Elektrizität und Magnetismus. Nach den Vorlesungen bearbeitet von Karl Hattendorff. Hannover 1876.*“ S. 52—56.

Am Schlusse des § 19 geben wir aber auch noch die Ableitung des Resultates unter der vereinfachenden Voraussetzung der Ebenheit.

Den Punkt  $P_0$  nehmen wir als Anfang der Koordinaten  $a, b, c$  eines rechtwinkligen Axensystems und legen die  $a$ -Axe in die Normale der Grenzfläche an der Stelle  $P_0$ ; die  $bc$ -Ebene ist alsdann Tangentialebene. In derselben denken wir uns Polarkoordinaten nach den Formeln

$$b = t \cos \psi \quad c = t \sin \psi \quad (1)$$

eingeführt. Dementsprechend ist zu setzen für die Projektion des Flächenelementes  $ds$  auf die  $bc$ -Ebene der Ausdruck  $t dt d\psi$ . Es ist daher

$$\cos \alpha ds = t dt d\psi, \quad (2)$$

wenn wir mit  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  wieder die Neigungswinkel der Normale des Flächenelements bzw. gegen die  $a$ -,  $b$ - und  $c$ -Axe bezeichnen. Zugleich bemerken wir, daß  $\Delta\Theta_0$  nunmehr bezeichnet den Sprung in  $\Theta$  bei Überschreitung der Grenzfläche an der Stelle  $P_0$  in Richtung der positiven  $a$ -Axe.

Denken wir uns nun  $V$  auf die Axen der  $a, b, c$  bezogen und bedeuten ferner  $a', b'$  und  $c'$  die Koordinaten von  $P'$ , so kommt es an auf die Untersuchung von (vergl. § 16 (7) S. 24):

$$\begin{aligned} k^2 \int \frac{\Delta\Theta \cos \alpha}{e} ds & \text{ als Teil von } \frac{\partial V}{\partial a'} \\ k^2 \int \frac{\Delta\Theta \cos \beta}{e} ds & \text{ „ „ „ } \frac{\partial V}{\partial b'} \\ k^2 \int \frac{\Delta\Theta \cos \gamma}{e} ds & \text{ „ „ „ } \frac{\partial V}{\partial c'}, \end{aligned} \quad (3)$$

wobei die Integration über die Umgebung von  $P_0$  auszudehnen ist.

Zunächst untersuchen wir den Differentialquotienten des ersten Ausdrucks, genommen nach  $a'$ , also

$$k^2 \int \frac{a - a'}{e^3} \Delta\Theta \cos \alpha ds \text{ als Teil von } \frac{\partial^2 V}{\partial a'^2}. \quad (4)$$

Das hierin auftretende Integral heiße  $J$ . Mit Rücksicht auf (2) wird, wenn  $T$  der Wert von  $t$  für den Rand der in betracht gezogenen Umgebung von  $P_0$  ist:

$$J = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^T \frac{a - a'}{e^3} \Delta\Theta t dt. \quad (5)$$

Hierbei ist zu beachten, daß  $\psi$  und  $t$  zwei von einander unabhängige Variable sind, welche  $a$  nach Maßgabe der Gleichung der Grenzfläche bestimmen. Ferner ist unter Annahme von  $b' = c' = \text{null}$ :

$$e^2 = t^2 + (a - a')^2. \quad (6)$$

Durch Differentiation nach  $t$  und Division mit  $e^3$  folgt hieraus:

$$\frac{1}{e^2} \frac{\partial e}{\partial t} a t = \frac{t}{e^3} d t + \frac{a - a'}{e^3} \frac{\partial a}{\partial t} d t$$

und wegen  $\frac{1}{e^2} \frac{\partial e}{\partial t} = - \frac{\partial \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial t}$  hieraus weiter:

$$\int \frac{a - a'}{e^3} \Delta \Theta t d t = - \int \frac{(a - a')^2}{e^3} \Delta \Theta \frac{\partial a}{\partial t} d t - \int (a - a') \Delta \Theta \frac{\partial \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial t} d t. (7)$$

Das zweite Integral rechter Hand wandeln wir durch partielle Integration um. Es ist

$$\frac{\partial \left\{ (a - a') \frac{\Delta \Theta}{e} \right\}}{\partial t} = (a - a') \Delta \Theta \frac{\partial \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial t} + \frac{1}{e} \left\{ \Delta \Theta \frac{\partial a}{\partial t} + (a - a') \frac{\partial \Delta \Theta}{\partial t} \right\};$$

hiermit wird

$$\int_0^T (a - a') \Delta \Theta \frac{\partial \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial t} d t = \left\{ \left\{ \frac{(a - a') \Delta \Theta}{e} \right\}_{t=T} - \left\{ \frac{(a - a') \Delta \Theta}{e} \right\}_{t=0} - \int_0^T \left\{ \frac{\Delta \Theta}{e} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{a - a'}{e} \frac{\partial \Delta \Theta}{\partial t} \right\} d t \right\} (8)$$

Diese Transformation ist sicher zulässig, wenn  $(a - a')$ ,  $\Delta \Theta$  und  $\frac{1}{e}$  nebst ihren ersten Differentialquotienten nach  $t$  innerhalb der Integrationsgrenzen endlich und mit  $t$  stetig veränderlich sind. Für  $a - a'$  ist diese Bedingung durch Einschränkung der Umgebung sicher erfüllbar, wenn die Fläche in der Umgebung von  $P_0$  stetig gebogen ist.  $\Delta \Theta$  ist als Unterschied zweier endlichen und stetigen Funktionen  $\Theta$  auf jeder Grenzfläche endlich und stetig. Dasselbe gilt für seine ersten Differentialquotienten.  $\frac{1}{e}$  mit seinen Differentialquotienten ist endlich und stetig, solange  $P'$  nicht nach  $P_0$  selbst fällt.

Die Formel (8) führen wir in (7) ein. In den Integralen tritt dabei eine Vereinfachung ein, da die beiden,  $\frac{\partial a}{\partial t}$  enthaltenden Integrale, auf den Nenner  $e^3$  gebracht, sich wegen (6) zusammenziehen lassen. Wir erhalten:

$$\int_0^T \frac{a - a'}{e^3} \Delta \Theta t d t = \left\{ - \frac{(A - a') \Delta \Theta_A}{E} + \Delta \Theta_0 + \int_0^T \frac{a - a'}{e} \frac{\partial \Delta \Theta}{\partial t} d t + \int_0^T \Delta \Theta \frac{t^2}{e^3} \frac{\partial a}{\partial t} d t \right\},$$

wenn für  $t = T$  bezeichnet werden  $a, e$  und  $\Delta \Theta$  mit  $A, E$  und  $\Delta \Theta_A$  und wenn ferner berücksichtigt wird, daß für  $t = \text{null}$   $a' = e$  ist, falls  $P'$  auf der positiven  $a$ -Axe liegt, daß dagegen  $-a' = e$  ist, falls  $P'$  auf der negativen  $a$ -Axe liegt. Das obere Zeichen in vorstehender Formel,



für welche  $P'$  nun jedenfalls in der Normale von  $P_0$  gedacht ist, gilt für  $a'$  positiv, das untere für  $a'$  negativ.

Führen wir die zuletzt erhaltene Formel in (5) ein, so wird

$$J = \left\{ \begin{array}{l} \mp 2\pi \Delta\Theta_0 \quad \begin{array}{l} a' \text{ pos.} \\ a' \text{ neg.} \end{array} \\ - \int_0^{2\pi} \frac{(A - a') \Delta\Theta_A}{E} d\psi \\ + \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^r \frac{a - a'}{e} \frac{\partial \Delta\Theta}{\partial t} dt \\ + \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^r \Delta\Theta \frac{t^2}{e^3} \frac{\partial a}{\partial t} dt. \end{array} \right\} \quad (9)$$

§ 19. Fortsetzung:  $\frac{\partial^2 V}{\partial a'^2}$ . Wir können nunmehr untersuchen, wie sich der von der Umgebung von  $P_0$  abhängende Teil von  $\partial^2 V : \partial a'^2$  beim Durchgange von  $P'$  durch  $P_0$  verhält. Nach (4) und (5) des vorigen Paragraphen ist  $k^2 J$  dieser Teil. Betrachten wir vorerst die drei Integrale in (9), so zeigt sich, daß sie sich bei Verschiebungen von  $P'$  in der  $a$ -Axe, auch durch  $P_0$  hindurch, stetig ändern.

Bei dem ersten Integral ist dies sofort ersichtlich, da  $a'$  und  $\frac{1}{E}$  endlich sind und sich mit  $a'$  stetig ändern.

Bei dem zweiten Integral ist dasselbe der Fall, insoweit wir nicht von null bis  $T$ , sondern von  $r$  bis  $T'$  integrieren, wobei  $r$  kleiner als  $T$  ist, aber nicht null genommen werden darf. Da aber  $\frac{a - a'}{e}$  absolut genommen  $< 1$  ist, so ist der absolute Wert des verbleibenden Restes des zweiten Integrals, nämlich

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^r \frac{a - a'}{e} \frac{\partial \Delta\Theta}{\partial t} dt, \quad (1)$$

kleiner als der absolute Wert desjenigen Doppelintegrals, welches wir erhalten, wenn  $\frac{a - a'}{e}$  gleich 1 und für  $\frac{\partial \Delta\Theta}{\partial t}$  sein größter absoluter Wert im Integrationsbereich gesetzt wird, also kleiner als der absolute Wert von

$$\left( \frac{\partial \Delta\Theta}{\partial t} \right)_{\max} \cdot \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^r dt$$

oder

$$2\pi r \left( \frac{\partial \Delta\Theta}{\partial t} \right)_{\max}. \quad (1^*)$$

Diese Formel zeigt, daß die unendlich nahe Umgebung von  $P_0$  nur unendlich wenig zu dem zweiten Integral in (9) beiträgt. Mit-

hin kann diese Umgebung bei einer Verschiebung von  $P'$ , auch durch  $P_0$  hindurch, insoweit das zweite Integral von (9) in betracht kommt, nichts Endliches beitragen.

Bei dem dritten Integral von (9) integrieren wir auch von null bis  $r$  und von  $r$  bis  $T$ ; der letztere Teil ist dann unzweifelhaft auch bei Durchdringung der Grenzfläche in  $P_0$  stetig veränderlich. Das Verhalten des ersten Teiles hängt ab von  $\frac{\partial a}{\partial t}$ . Wir haben bereits angenommen, daß die Grenzfläche an der Stelle  $P_0$  eine bestimmte Normale hat und überhaupt in der Umgebung von  $P_0$  von  $t = 0$  bis  $T$  stetig gekrümmt ist. Dann können wir setzen

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \mu t, \quad (2)$$

wenn  $\mu$  den zweiten Differentialquotienten von  $a$  nach  $t$  für eine nicht näher bekannte, im Intervall  $t = 0$  bis  $r$  gelegene Stelle bezeichnet.  $\mu$  ist ein endlicher Wert, wenn das Krümmungsmaß der Grenzfläche innerhalb des Integrationsgebiets nirgends unendlich groß wird (Bd. 1, S. 59, § 15). Sollte letzteres doch der Fall sein, so kann die betreffende Stelle durch Verkleinerung von  $r$  ausgeschlossen werden mit Ausnahme des Falles, daß  $P_0$  selbst ein unendlich großes Krümmungsmaß hat. Diesen Fall, der ja nur ein Ausnahmefall sein kann, betrachten wir nicht weiter.\*)

Die nächste Umgebung von  $P_0$  liefert zu dem dritten Integral von (9) unter Annahme von (2) den Beitrag

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^r \Delta\Theta \mu \frac{t^3}{e^3} dt. \quad (3)$$

Nun ist  $t < e$ . Setzen wir jetzt für  $t^3 : e^3$  die Einheit, für  $\Delta\Theta$  den Maximalwert im Integrationsbezirk, ebenso für  $\mu$  den Maximalwert in den verschiedenen Richtungen, so erhalten wir zu viel. Der Beitrag ist somit absolut genommen kleiner als der absolute Wert von

$$2\pi r (\mu \Delta\Theta)_{\max}. \quad (3^*)$$

Die unendlich nahe Umgebung trägt somit nur unendlich wenig bei, insoweit das dritte Integral in betracht kommt.

Wenn nun  $P'$  unendlich nahe an  $P_0$  auf der negativen Seite der  $a$ -Axe (der Grenzflächennormale) liegt und durch  $P_0$  hindurch nach einem der Grenzfläche unendlich nahen Punkte der positiven Seite geht, so beträgt die Änderung von  $\frac{\partial^2 V}{\partial a'^2}$  wegen der drei Integrale

---

\*) Vergl. übrigens „C. F. Gauss, Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstößungskräfte. Art. 15 und 16. Leipzig 1840.“ (Gauss' Werke, Bd. 5.)

in (9) nur unendlich wenig, dagegen wegen des ersten Teiles von (9) —  $4\pi k^2 \Delta\Theta_0$ , wobei  $\Delta\Theta_0$  die entsprechende Dichtigkeitsänderung ist. Wir haben hierin die Änderung des durch (4) S. 26 gegebenen Teiles von  $\frac{\partial^2 V}{\partial a'^2}$ . Die andern Teile von  $\frac{\partial^2 V}{\partial a'^2}$  ändern sich stetig und also im betrachteten Falle unendlich wenig.

Daher ist also die Änderung von  $\frac{\partial^2 V}{\partial a'^2}$  bei dem normalen Durchgange durch eine Grenzfläche an einer Stelle  $P_0$ , wo plötzlich die Dichtigkeit um  $\Delta\Theta_0$  sich ändert, wenn in der Umgebung dieses Punktes die Grenzfläche stetig gekrümmt ist und ein endliches Krümmungsmaß besitzt, gleich

$$\Delta \frac{\partial^2 V}{\partial a'^2} = -4\pi k^2 \Delta\Theta_0. \quad (4)$$

Nehmen wir innerhalb der Integrationsgrenzen die Grenzfläche als eben und die Größe  $\Delta\Theta$  konstant an, so giebt (4) S. 26:

$$-a' k^2 \Delta\Theta_0 \iint \frac{t dt d\psi}{Vt^2 + a'^2^3}$$

d. i.

$$2\pi k^2 \Delta\Theta_0 \left( \frac{a'}{Vt^2 + a'^2} - \frac{a'}{Va'^2} \right),$$

worin die  $Va'^2$  immer positiv zu nehmen ist. Ist  $a'$  unendlich klein, so verschwindet der erste Teil, es bleibt nur der zweite, welcher gleich  $-1$  ist für positives  $a'$ ,  $+1$  für negatives  $a'$ , und man gelangt wieder zu dem Resultat (4).

Da man nun, um im allgemeinen die Voraussetzungen plausibel erscheinen zu lassen, sich  $T$  unendlich klein zu denken hat, so ist in den Schriften, welche vorstehende kurze Darstellungsweise acceptieren, hervorgehoben, man müsse sich  $a'$  immer im Verhältnisse zu  $T$  unendlich klein denken (also unendlich klein zweiter Ordnung). Die Darstellung des § 18 und § 19 vermeidet eine solche Vorstellung und die Zweifel, die mit jener verknüpft sind.

**§ 20. Die übrigen zweiten Differentialquotienten** erleiden bei dem normalen Durchgange durch eine Grenzfläche keinen Sprung. Hierzu betrachten wir zwei charakteristische Beispiele:

$$k^2 \int \frac{a - a'}{e^3} \Delta\Theta \cos \beta ds \text{ als Teil von } \frac{\partial^2 V}{\partial a' \partial b'} \quad (1)$$

und

$$k^2 \int \frac{b - b'}{e^3} \Delta\Theta \cos \beta ds \text{ „ „ „ } \frac{\partial^2 V}{\partial b'^2}, \quad (2)$$

die Integration bezogen auf die Umgebung von  $P_0$ .

Würden wir voraussetzen, daß innerhalb derselben die Grenzfläche als eben anzusehen sei, so wäre  $\cos \beta = \text{null}$  und es würde mithin ein Sprung in den betreffenden Differentialquotienten beim Durchgange von  $P'$  durch  $P_0$  hindurch nicht entstehen. Dasselbe Resultat ist indessen auch leicht zu erzielen, wenn wir die Grenzfläche gekrümmt annehmen.

Auf den Ausdruck (1) ist nämlich die betreffende Entwicklung der Paragraphen 18 und 19 sofort anwendbar, wenn man für  $\Delta\Theta$  setzt  $\Delta\Theta \sec \alpha \cos \beta$ . Da  $\cos \beta$  im Punkte  $P_0$  in null übergeht, so tritt in (4) des vorigen Paragraphen an Stelle von  $\Delta\Theta_0$  null und es ergibt sich beim normalen Durchgange durch  $P_0$  die Änderung

$$\Delta \frac{\partial^2 V}{\partial a' \partial b'} = 0.$$

Ebenso ist

$$\Delta \frac{\partial^2 V}{\partial a' \partial c'} = 0.$$
(3)

Betrachten wir das in (2) auftretende Integral, welches wir  $J'$  nennen wollen, so wird zunächst durch Substitution von  $t dt d\psi \sec \alpha$  für  $ds$  nach S. 26 § 18 (2) erhalten:

$$J' = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^T \frac{b - b'}{e^3} \Delta\Theta \sec \alpha \cos \beta t dt. \quad (4)$$

Hierbei haben wir nun noch zu beachten, daß  $b' = \text{null}$  ist, wenn wir wieder festsetzen, daß  $P'$  auf der  $a$ -Axe liegt. Mit Rücksicht auf eine bekannte Relation der analytischen Geometrie, wonach

$$\cos \beta = - \frac{\frac{\partial a}{\partial b}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial c}\right)^2}}$$

wird, können wir ferner annehmen, daß

$$\cos \beta = \lambda t \quad (5)$$

sei, wenn  $\lambda$  einen endlichen, von  $\psi$  und  $t$  abhängenden Wert bezeichnet. Denn wegen der vorausgesetzten stetigen Krümmung und des endlichen Krümmungsmaßes der Grenzfläche in der gehörig eingeschränkten Umgebung von  $P_0$  ist

$$\frac{\partial a}{\partial b} = \lambda_1 b + \lambda_2 c = (\lambda_1 \cos \psi + \lambda_2 \sin \psi) \cdot t,$$

wobei  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  zweite Differentialquotienten von  $a$  nach  $b$  und  $c$  für eine nicht näher bekannte, im Integrationsbereiche gelegene Stelle bedeuten. Diese Relation aber führt an der Hand des allgemeinen Ausdrucks für  $\cos \beta$  leicht zu (5).

Es wird nun

$$J' = \int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi \int_0^T \lambda \Delta\Theta \sec \alpha \frac{t^3}{e^3} dt. \quad (6)$$

Nehmen wir das innere Integral nur von  $r > \text{null}$  bis  $T$ , so ändert sich der entsprechende Teil von  $J$  bei Verschiebung von  $P'$  stetig, auch wenn dieselbe  $P'$  durch  $P_0$  hindurchführt. Um zu erkennen, welchen Einfluß derjenige Teil von  $J'$  hat, welcher bei der Integration von  $t = \text{null}$  bis  $r$  entsteht, beachten wir, daß  $t < e$  ist. Setzen

wir nun für  $t^3 : e^3$  und für  $\cos \psi$  die Einheit, sowie für  $\lambda \triangle \Theta \sec \alpha$  seinen größten absoluten Wert  $(\lambda \triangle \Theta \sec \alpha)_{\max}$  innerhalb des Integrationsbereiches, so wird der absolute Wert des betreffenden Teiles von  $J'$  kleiner als

$$2\pi r (\lambda \triangle \Theta \sec \alpha)_{\max}. \quad (7)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die unendlich nahe Umgebung von  $P_0$  zu  $J'$  nur unendlich wenig beiträgt und wir haben somit bei normalem Durchgange durch  $P_0$  die Änderung

$$\triangle \frac{\partial^2 V}{\partial b'^2} = 0,$$

und ebenso ist

$$\triangle \frac{\partial^2 V}{\partial c'^2} = 0. \quad (8)$$

§ 21. Transformation der Koordinaten; Differentialgleichung für  $V$  und  $W$ . Haben wir irgend ein rechtwinkeliges Axensystem, dessen  $u$ -Axe mit den Axen  $a, b, c$  bzw. die Winkel  $\lambda, \mu, \nu$  bildet, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial u'} = \frac{\partial V}{\partial a'} \frac{\partial a'}{\partial u'} + \frac{\partial V}{\partial b'} \frac{\partial b'}{\partial u'} + \frac{\partial V}{\partial c'} \frac{\partial c'}{\partial u'},$$

insofern wir uns das  $V$  des Punktes  $P'$  als Funktion von  $a', b'$  und  $c'$  gegeben denken. Differenzieren wir abermals nach  $u'$ , so folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial u'^2} &= \frac{\partial^2 V}{\partial a'^2} \left( \frac{\partial a'}{\partial u'} \right)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial b'^2} \left( \frac{\partial b'}{\partial u'} \right)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial c'^2} \left( \frac{\partial c'}{\partial u'} \right)^2 \\ &+ 2 \frac{\partial^2 V}{\partial a' \partial b'} \frac{\partial a'}{\partial u'} \frac{\partial b'}{\partial u'} + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial a' \partial c'} \frac{\partial a'}{\partial u'} \frac{\partial c'}{\partial u'} \\ &+ 2 \frac{\partial^2 V}{\partial b' \partial c'} \frac{\partial b'}{\partial u'} \frac{\partial c'}{\partial u'}. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf die Ergebnisse des § 20 verschwindet alles bis aufs erste Glied, wenn wir uns die Differenz der vorstehenden Gleichung für beide Seiten einer Grenzfläche gebildet denken, und es entsteht also beim normalen Durchgange durch dieselbe in  $\partial^2 V : \partial u'^2$  ein Sprung

$$\triangle \frac{\partial^2 V}{\partial u'^2} = -4\pi k^2 \triangle \Theta_0 \cos^2 \lambda, \quad (1)$$

wobei berücksichtigt ist, daß einer Verschiebung des Punktes  $P'$  in der  $u$ -Axe um  $\partial u'$  entsprechen die Änderungen:

$$\partial u' \cos \lambda = \partial a', \quad \partial u' \cos \mu = \partial b', \quad \partial u' \cos \nu = \partial c'. \quad (2)$$

In gleicher Weise findet sich eine der Gleichung (1) entsprechende Formel für jede der beiden andern Axenrichtungen, die mit der  $u$ -Axe kombiniert sind, nur ist für  $\lambda$  der betreffende Neigungswinkel zur  $a$ -Axe, der Grenzflächennormale, zu setzen. Sind z. B. die drei Axen die früher benutzten der  $x, y, z$  und sind  $\alpha, \beta, \gamma$  bzw. die Winkel der Grenzflächennormale mit diesen drei Axen, so wird

$$\begin{aligned}\Delta \frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} &= -4\pi k^2 \Delta \Theta_0 \cos^2 \alpha \\ \Delta \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} &= -4\pi k^2 \Delta \Theta_0 \cos^2 \beta \\ \Delta \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} &= -4\pi k^2 \Delta \Theta_0 \cos^2 \gamma.\end{aligned}\tag{3}$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die bekannte Relation

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

dafs

$$\Delta \frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \Delta \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} + \Delta \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} = -4\pi k^2 \Delta \Theta_0 \tag{4}$$

ist. Diese Gleichung giebt zunächst den Unterschied von  $\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2}$  zu beiden Seiten einer Grenzfläche, Unstetigkeitsfläche der Dichtigkeit.

Man kann aus ihr eine andere Gleichung ableiten, wenn man zunächst bemerkt, dafs aufserhalb der Erde

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} = 0 \tag{5}$$

ist. In Bezug auf die Potentialfunktion eines beliebigen Körpers heifst (5) die *Gleichung von Laplace*. Aufserhalb der Erde können wir setzen, vergl. S. 19 § 15 (1):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} &= k^2 \int \frac{-e^2 + 3(x-x')^2}{e^5} \frac{dm}{e^2} + \omega^2 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} &= k^2 \int \frac{-e^2 + 3(y-y')^2}{e^5} \frac{dm}{e^2} + \omega^2 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial z'^2} &= k^2 \int \frac{-e^2 + 3(z-z')^2}{e^5} \frac{dm}{e^2},\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z'^2} = 2\omega^2. \tag{6}$$

Läfst man  $\omega$  weg, so geht  $W$  in  $V$  und (6) in (5) über; folglich gilt (5) aufserhalb.

Nehmen wir in (4) die Oberfläche als Grenzfläche und treten von außen nach innen ein, so ist  $\Delta \Theta_0 = \Theta$  in der Oberfläche, und die Addition von (4) und (5) giebt

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} = -4\pi k^2 \Theta. \tag{7}$$

Diese Gleichung giebt den Wert von  $\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2}$  für einen der Oberfläche unendlich nahen Punkt, in dem die Dichtigkeit gleich  $\Theta$  ist. Sie gilt aber auch für jeden andern Punkt, in welchem die Dichtigkeit regelmäfsig verläuft. Denn führt man unendlich nahe einem solchen einen Schnitt, der die Erde in zwei Teile teilt, so ist in Bezug auf den einen Teil  $P'$  ein äußerer Punkt und für das be-

treffende  $V$  gilt (5); in Bezug auf den andern Teil gilt dann (7), weil in diesem Teil  $P'$  ein innerer, der Oberfläche unendlich naher Punkt ist. Es gilt daher für das totale  $V$  wieder Gleichung (7).\*)

Abgesehen von denjenigen Flächen, in welchen  $\Theta$  Singularitäten hat, ist daher allgemein für einen Punkt  $P'$  mit den Koordinaten  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$ , sowie mit der Dichtigkeit  $\Theta'$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z'^2} &= -4\pi k^2 \Theta'; \\ \text{ferner wegen (6):} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z'^2} &= -4\pi k^2 \Theta' + 2\omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Diese Differentialgleichung zeigt, daß  $W$  nur innerhalb eines solchen Teiles der Erde, in welchem  $\Theta'$  durch ein und dieselbe Funktion der Koordinaten darstellbar ist, einer einzigen Funktion der Koordinaten im gewöhnlichen Sinne der Analysis (einer analytischen Funktion) entspricht, daß aber bei wechselnder Funktionsform für  $\Theta'$  auch der analytische Ausdruck für  $W$  wechseln muß.

Kehren wir noch einmal zurück zu der eingangs dieses Paragraphen eingeführten  $u$ -Axe und nehmen wir an, daß sie durch Drehung des Axensystems  $abc$  um die  $c$ -Axe als Endlage der  $a$ -Axe hervorgegangen sei. Wir haben dann ein Axensystem, dessen Koordinatenanfang im Punkte  $P_0$  der Grenzfläche liegt, gegen welche zwei der Axen geneigt sind, während die dritte, die  $c$ -Axe, dieselbe in  $P_0$  tangiert. Differenzieren wir jetzt die Identität

$$\frac{\partial V}{\partial c'} = \frac{\partial V}{\partial c'}$$

nach  $u'$ , so folgt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial c' \partial u'} = \frac{\partial^2 V}{\partial c' \partial a'} \frac{\partial a'}{\partial u'} + \frac{\partial^2 V}{\partial c' \partial b'} \frac{\partial b'}{\partial u'} + \frac{\partial^2 V}{\partial c'^2} \frac{\partial c'}{\partial u'},$$

und hieraus ergibt sich, wenn wieder die Differenz dieser Gleichung für beide Seiten der Grenzfläche gebildet wird, mit Rücksicht auf die Ergebnisse von § 20 bei normalem Durchgange durch eine Grenzfläche:

$$\Delta \frac{\partial^2 V}{\partial c' \partial u'} = 0. \quad (9)$$

Wegen des Umstandes, daß die zweiten Differentialquotienten der Potentialfunktion der Zentrifugalkraft entweder konstant oder null sind, gelten die Formeln (1) und (9), von denen wir nun Gebrauch machen werden, unmittelbar auch für  $W$ .

*Laplace* glaubte, daß die Differentialgleichung (5) für  $V$  auch innerhalb des Körpers gelte, und *Méc. cél.*, t. I, l. II, p. 136–137 zeigt, wie er zu dieser Ansicht gelangt ist. Er übersieht nämlich, daß die Differentiation unter dem Integralzeichen an Bedingungen geknüpft ist. Erst *Poisson* fand für das Innere des Körpers die richtige Differentialgleichung.

\*) *Gustav Kirchhoff*, *Mechanik*. 2. Auflage, Leipzig 1877, S. 179 unten.



§ 22. Die Unstetigkeit in der Krümmung der Niveauflächen bei dem Durchgange derselben durch eine Unstetigkeitsstelle der Dichtigkeit. Wir betrachten eine Niveaufläche zunächst innerhalb eines Raumes, wo die Dichtigkeit keine Singularitäten hat. Dann ist die Vorbedingung für die Entwicklung von  $W$  nach *Taylor's* Satz in eine endliche Reihe, nämlich die Bedingung der Endlichkeit und Stetigkeit der Funktion  $W$  und ihrer in betracht kommenden Differentialquotienten, erfüllt. Nach diesem auf drei Variable ausgedehnten Satze hat man für ein rechtwinkeliges, durch den Punkt  $P_0$  gelegtes Koordinatensystem der  $\xi \eta \zeta$ , wenn in  $P_0$  das Potential  $W = W_0$  ist:

$$W = W_0 + (W_1\xi + W_2\eta + W_3\zeta) + \frac{1}{2}(W_{1.1}\xi^2 + W_{2.2}\eta^2 + W_{3.3}\zeta^2) + (W_{1.2}\xi\eta + W_{1.3}\xi\zeta + W_{2.3}\eta\zeta) + Gl_3. \quad (1)$$

Hierin bedeuten  $W_1, W_2, W_3$  die ersten Differentialquotienten nach  $\xi, \eta, \zeta$ , ferner  $W_{1.1}, W_{2.2}, W_{3.3}$  die zweiten Differentialquotienten nach  $\xi, \eta, \zeta$  und endlich  $W_{1.2}, W_{1.3}, W_{2.3}$  die zweiten Differentialquotienten nach  $\xi$  und  $\eta$ ,  $\xi$  und  $\zeta$  und  $\eta$  und  $\zeta$ , genommen für den Koordinatenanfang  $P_0$ . Der mit  $Gl_3$  bezeichnete Rest der Entwicklung hat in Bezug auf die Koordinaten den dritten Grad; die in diese Koordinatenausdrücke multiplizierten Differentialquotienten dritter Ordnung gelten aber nicht für  $P_0$ , sondern für irgend welchen, nicht näher bekannten Punkt der geraden Linie zwischen  $P_0$  und dem Punkt  $P = (\xi \eta \zeta)$ .\*

Die Entwicklung (1) kann immer dadurch zu einer brauchbaren gemacht werden, daß man  $\xi, \eta, \zeta$  auf ein dem Punkte  $P_0$  überall hinreichend nahes Gebiet beschränkt — so nahe, daß der Rest  $Gl_3$ , welcher aus einer endlichen Anzahl von Produkten endlicher Größen (der 3. Differentialquotienten) in Potenzen und Produkte 3. Grades von  $\xi, \eta, \zeta$  besteht, als verschwindend angesehen werden kann.

Für die Punkte  $P$  einer durch  $P_0$  gelegten Niveaufläche ist  $W$  überall gleich  $W_0$ . Hierdurch vereinfacht sich (1); noch mehr aber, wenn wir die Normale der Fläche zur  $\zeta$ -Axe nehmen. Dann verschwinden  $W_1$  und  $W_2$ , wie die Differentiation von (1) zeigt, weil die beiden Differentialquotienten  $\partial\zeta:\partial\xi$  und  $\partial\zeta:\partial\eta$ , entsprechend der tangentialen Lage der  $\xi$ - und  $\eta$ -Axe, für  $\xi, \eta$  und  $\zeta$  gleich null verschwinden müssen.  $W_3$  stellt nun nach § 8 (1) S. 10 die Schwerkraft  $g$  negativ genommen dar, wenn wir festsetzen, daß die  $\zeta$ -Axe die Flächennormale in der Richtung abnehmender  $W$  angiebt. Indem wir unsere Betrachtung auf die Nähe der physischen Erdoberfläche beschränken, ist der Wert von  $g$  d. i.  $-W_3 > 0$  und die Niveaufläche daher stetig gebogen.

\*) Vergl. z. B. *Hattendorff*, Höhere Analysis, Bd 1, Hannover 1880. S. 287 und 288.

Wir erhalten jetzt als Gleichung der Niveaufläche in der Umgebung des Punktes  $P_0$ , bezogen auf  $P_0$  als Koordinatenanfang und die Normale als  $\xi$ -Axe:

$$\left\{ \begin{aligned} &W_3\xi + \frac{1}{2}(W_{1.1}\xi^2 + W_{2.2}\eta^2 + W_{3.3}\xi^2) \\ &+ (W_{1.2}\xi\eta + W_{1.3}\xi\xi + W_{2.3}\eta\xi) + Gl_3 \end{aligned} \right\} = 0. \quad (2)$$

Sind aber  $\xi$  und  $\eta$  Größen 1. Ordnung, so hat  $\xi$  hiernach die 2. Ordnung,  $\xi\xi$  und  $\eta\xi$  haben die 3. und  $\xi^2$  die 4. Ordnung. Damit ist noch einfacher:

$$W_3\xi + \frac{1}{2}(W_{1.1}\xi^2 + W_{2.2}\eta^2) + W_{1.2}\xi\eta + Gl_3 = 0. \quad (3)$$

In der  $\xi\eta$ -Ebene führen wir nun Polarkoordinaten  $\vartheta$  und  $\alpha$  ein nach den Relationen:

$$\xi = \vartheta \cos \alpha \quad \eta = \vartheta \sin \alpha. \quad (4)$$

Die Gleichung (3) giebt dann:

$$\xi = -\vartheta^2 \frac{W_{1.1} \cos^2 \alpha + W_{2.2} \sin^2 \alpha + 2 W_{1.2} \sin \alpha \cos \alpha}{2 W_3} + Gl_3. \quad (5)$$

Dies ist für konstantes  $\alpha$  zugleich die Gleichung der Schnittkurve einer Normalebene in  $P_0$ . Ein Kreisbogen vom Radius  $\varrho_\alpha$ , der die Schnittkurve in  $P_0$  tangiert, hat die Gleichung\*)  $\vartheta^2 = -\xi(2\varrho_\alpha + \xi)$ , woraus, wenn  $\vartheta$  eine Größe 1. Ordnung ist, folgt:

$$\xi = -\vartheta^2 \cdot \frac{1}{2\varrho_\alpha} + Gl_4. \quad (6)$$

Die Gleichungen (5) und (6) stimmen für unendlich kleine  $\vartheta$ , wo die  $Gl_3$  und  $Gl_4$  gegen  $\vartheta^2$  zu vernachlässigen sind, mit einander überein für

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = \frac{W_{1.1} \cos^2 \alpha + W_{2.2} \sin^2 \alpha + 2 W_{1.2} \sin \alpha \cos \alpha}{W_3}. \quad (7)$$

Diese Formel bestimmt den Krümmungsradius der durch  $\alpha$  fixierten Normalebene der Niveaufläche in  $P_0$  und zwar in dem Sinne, daß bei positivem Werte von  $\varrho_\alpha$  der Differentialquotient  $W_3$  in Bezug auf die wachsende Richtung von  $\varrho_\alpha$  zu verstehen ist.

Differenziert man den Ausdruck (7) für  $\frac{1}{\varrho_\alpha}$  nach  $\alpha$ , so findet sich als Bedingungsgleichung des Maximums und Minimums:

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2 W_{1.2}}{W_{1.1} - W_{2.2}}, \quad (8)$$

worin wir  $\alpha$  sogleich einen Index angehängen haben, um es von dem allgemeinen Symbol zu unterscheiden. Eliminiert man nun  $W_{1.2}$  aus dem Zähler rechter Hand in der auf  $\alpha_0$  angewandten Gleichung (7) mittelst (8), unter gleichzeitiger Einführung der trigonometrischen Funktionen von  $2\alpha_0$  für  $\cos^2 \alpha_0$ ,  $\sin^2 \alpha_0$  und  $\sin \alpha_0 \cos \alpha_0$ , so folgt:

\*) Vergl. Bd. 1 Fig. 2 S. 58. Es ist aber dort die  $\xi$ -Axe nach dem Mittelpunkt des Kreises gerichtet, während wir jetzt besser das Gegenteil annehmen.

$$\frac{1}{\varrho_{\alpha_0}} = \frac{W_{1,1} + W_{2,2}}{2W_3} + \frac{W_{1,1} - W_{2,2}}{2W_3} \sec 2\alpha_0. \quad (9)$$

Diese Formel giebt die beiden extremen Werte von  $\varrho$  für die beiden um  $90^\circ$  verschiedenen, aus (8) zu berechnenden Werte von  $\alpha_0$ . Nennen wir diese beiden Hauptkrümmungsradien  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  und verstehen unter  $2\alpha_0$  den positiven oder negativen *spitzen* Winkel, den (8) ergibt und setzen endlich

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{W_{1,1} + W_{2,2}}{2W_3} + \frac{W_{1,1} - W_{2,2}}{2W_3} \sec 2\alpha_0, \quad (10)$$

so wird

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{W_{1,1} + W_{2,2}}{2W_3} - \frac{W_{1,1} - W_{2,2}}{2W_3} \sec 2\alpha_0.$$

Hiernach besteht für das arithmetische Mittel der beiden Hauptkrümmungsradien, d. i. nach Bd. 1 S. 64 oben der Durchschnittswert aller  $\frac{1}{\varrho_\alpha}$ , oder der *Durchschnittswert der Krümmungsmasse aller Normalschnitte* in  $P_0$ , die Gleichung:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right) = \frac{W_{1,1} + W_{2,2}}{2W_3}; \quad (11)$$

ferner findet sich, wenn aus  $1 : \varrho_1, \varrho_2$  mittelst (8)  $\sec 2\alpha_0$  unter Benutzung der Relation  $\sec^2 = 1 + \tan^2$  eliminiert wird, für das *Krümmungsmass der Niveaufläche* in  $P_0$  die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{W_{1,1} W_{2,2} - W_{1,2}^2}{W_3^2}. \quad (12)$$

Die Hauptkrümmungsradien können noch dazu benutzt werden, um die Formel für  $1 : \varrho_\alpha$  umzugestalten. Man gelangt dann wieder zu *Eulers Satz*, vergl. Bd. 1 S. 57 (1), worin aber zur Anwendung auf den vorliegenden Fall  $\varrho_m$  und  $\varrho_n$  mit  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  zu vertauschen sind und unter  $\alpha$  nunmehr der Winkel zwischen den Ebenen von  $\varrho_1$  und  $\varrho_\alpha$  zu verstehen ist, welcher in obiger Entwicklung durch  $\alpha - \alpha_0$  bezeichnet wird.

§ 23. Fortsetzung. Wir nehmen jetzt an, daß durch den Punkt  $P_0$  der Niveaufläche eine Grenzfläche zweier Räume hindurchführt, in welchen  $\Theta$  stetig verläuft, während in der Grenzfläche  $\Theta$  unstetig wird. Wir wissen nun bereits, daß die Niveaufläche durch jene Unstetigkeitsfläche stetig gebogen hindurchgeht; aber wir werden an der Hand der Paragraphen 21 und 22 demnächst erkennen, daß die Krümmung bei dem Durchgange der Niveaufläche durch die Unstetigkeitsfläche sich unstetig ändert.

Infolge der stetigen Biegung können wir ohne weiteres in jedem der beiden Räume für sich die Entwicklung des § 22 auf  $P_0$  und seine Umgebung anwenden, wenn bei Berechnung der zweiten Differentialquotienten  $P_0$  ein Mal als Punkt des einen Raumes, ein ander Mal als Punkt des andern Raumes aufgefaßt wird.

Wird nun die  $\eta$ -Axe tangential an die Unstetigkeitsfläche gelegt und schließt die  $\xi$ -Axe mit der positiven Richtung der Normale dieser Fläche den Winkel  $90^\circ - \nu$  ein, ist also  $\nu$  der Neigungswinkel der Unstetigkeitsfläche zur Niveaufläche in  $P_0$ , so ergeben sich nach § 21 (1) und (9), indem die  $c$ - und  $u$ -Axe daselbst jetzt als  $\eta$ - und  $\xi$ -Axe genommen werden, nachstehende Änderungen beim Durchgange durch die Unstetigkeitsfläche nach der Seite der positiven Normale:

$$\begin{aligned}\Delta W_{1,1} &= \Delta \frac{\partial^2 W}{\partial u'^2} = -4\pi k^2 \Delta \Theta_0 \sin^2 \nu \\ \Delta W_{2,2} &= \Delta \frac{\partial^2 W}{\partial c'^2} = 0 \\ \Delta W_{1,2} &= \Delta \frac{\partial^2 W}{\partial u' \partial c} = 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Außerdem ist, wie schon bemerkt,  $W_3 = -g$  in beiden Räumen.

Man erhält jetzt als Sprünge in  $\frac{1}{e_\alpha}$ ,  $\frac{1}{e_1 e_2}$ ,  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} \right)$  und in  $\cot 2\alpha_0$  beim Durchgange durch  $P_0$  nach der Seite der positiven Normale nach § 22 (7), (8), (11) und (12) S. 36 u. 37:

$$\begin{aligned}\Delta \frac{1}{e_\alpha} &= -\frac{\Delta W_{1,1}}{g} \cos^2 \alpha, \\ \Delta \left\{ \frac{1}{e_1 e_2} \right\} &= \frac{W_{2,2} \Delta W_{1,1}}{g^2}, \\ \Delta \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} \right) \right\} &= -\frac{\Delta W_{1,1}}{2g}, \\ \Delta \cot 2\alpha_0 &= \frac{\Delta W_{1,1}}{2W_{1,2}}.\end{aligned}$$

Führt man den Wert von  $\Delta W_{1,1}$  nach (1) ein, so folgt:

$$\begin{aligned}\Delta \frac{1}{e_\alpha} &= +\frac{4\pi k^2}{g} \Delta \Theta_0 \sin^2 \nu \cos^2 \alpha \\ \Delta \left\{ \frac{1}{e_1 e_2} \right\} &= -\frac{4\pi k^2 W_{2,2}}{g^2} \Delta \Theta_0 \sin^2 \nu \\ \Delta \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} \right) \right\} &= +\frac{4\pi k^2}{2g} \Delta \Theta_0 \sin^2 \nu \\ \Delta \cot 2\alpha_0 &= -\frac{4\pi k^2}{2W_{1,2}} \Delta \Theta_0 \sin^2 \nu.\end{aligned}\tag{2}$$

Diese Formeln geben an, wie sich der reziproke Krümmungsradius im Azimut  $\alpha$ , das Krümmungsmaß, der Durchschnittswert der reziproken Krümmungsradien und die Cotangente der Azimute der Hauptschnitte (die Azimute von der zur gemeinsamen Tangente der Unstetigkeitsfläche und Niveaufläche rechtwinkeligen Tangente der letzteren im üblichen Drehungssinne gerechnet) ändern, wenn die Niveaufläche durch eine Unstetigkeitsfläche im Neigungswinkel  $\nu$  hindurchgeht und dabei an der betreffenden Stelle die Dichtigkeit um  $\Delta \Theta_0$

wächst. Die Art und Weise, wie die Differentialquotienten  $W_{2,2}$  und  $W_{1,2}$  zu verstehen sind, erhellt aus der zweiten und dritten Relation (1).

Die erste der Formeln (2) zeigt, daß die Änderung in  $\frac{1}{\varrho_\alpha}$  für  $\alpha = 90^\circ$  gleich null, für  $\alpha = 0^\circ$  ein Maximum ist. Man kann daher sagen: *Bei dem Durchgange durch eine Unstetigkeitsfläche der Dichtigkeit ändert sich die Krümmung der Niveauläche nicht in demjenigen Normalschnitte, welcher parallel ist zur gemeinsamen Tangente beider Flächen, dagegen ist die Änderung der Krümmung ein Maximum in demjenigen Normalschnitte, welcher zu dieser Tangente rechtwinkelig steht.*

Um eine Vorstellung von dem Betrage dieser Änderung zu gewinnen, führen wir für die Schwerkraft  $g$  einen Näherungsausdruck ein. Abgesehen von Gliedern mit der Abplattung und der Zentrifugalkraft, kann man, wie das zweite Kapitel zeigen wird,  $g$  für die Erdoberfläche berechnen, als wäre die Gesamtmasse der Erde im Schwerpunkt vereinigt. Dieser Annäherung entsprechend betrachtet man dabei die physische Erdoberfläche als Kugelfläche.

Ist  $R$  der Radius der letzteren [vergl. Bd. 1, S. 68, § 21 (1)], so ist die Erdmasse  $\frac{4}{3} R^3 \pi \Theta_m$ , wenn  $\Theta_m$  die mittlere Dichte der Erde ist, welche im Vergleich zu Wasser 5,6 beträgt. Wir haben daher

$$g = \frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R, \quad (3)$$

und es ist die maximale, sprungweise Änderung in  $\frac{1}{\varrho_\alpha}$  gleich

$$+ \frac{1}{R} \cdot \frac{3 \Delta \Theta_0}{\Theta_m}. \quad (4)$$

Eine Niveauläche, die aus der Luft in eine senkrechte Felswand eintritt, erleidet für einen Normalschnitt normal zu letzterer in  $\frac{1}{\varrho}$  einen Zuwachs, der rund gleich  $\frac{3}{2R}$  ist, da hier  $\Delta \Theta_0$  etwa  $2,8 = \frac{1}{2} \Theta_m$  beträgt. Bezeichnet man das betreffende  $\varrho$  in der Luft mit  $\varrho_a$ , im Gestein mit  $\varrho_i$ , so hat man

$$\frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{3}{2R}. \quad (5)$$

Bei spezieller Untersuchung der Wirkung der Anziehungseffekte der Massen auf der physischen Erdoberfläche im vierten Kapitel werden wir diese Relation bestätigt finden.

Auf die Diskontinuitäten der Krümmung aufmerksam gemacht zu haben, ist das Verdienst von *H. Bruns*. In seinen beiden, S. 19 citierten Abhandlungen entwickelt er die Formeln (2) und in der *Figur der Erde* insbesondere auch den Ausdruck (4). Der Gang der Entwicklung ist jedoch ein wesentlich anderer. Namentlich wird vor allem auf grund der *Dirichlet*-schen Kriterien für  $V$  (vergl. die oben citierten *Vorlesungen* S. 29) nachgewiesen, daß in einem Raume, wo  $\Theta$  regulär ist, d. h. sich innerhalb

endlicher Konvergenzbereiche nach Potenzen der rechtwinkligen Koordinaten entwickeln läßt, auch  $W$  regulär ist. Wenn wir oben § 17 S. 24 gefunden haben, daß in einem solchen Raume  $W$  und seine sämtlichen Differentialquotienten von angebar hoher Ordnung endlich und stetig sind, so ist dies für den Nachweis der Existenz einer *unendlichen* Potenzreihe mit endlichem Konvergenzbezirk noch nicht zureichend, wohl aber reicht es aus für die Krümmungsuntersuchung, bei welcher nur eine *endliche Taylorsche* Entwicklung erforderlich wird [S. 35 § 22 (1)]. Über den praktischen Wert solcher Entwicklungen vergl. übrigens § 25.

Für diejenigen Leser, welche sich für den Beweis der Regularität von  $W$  interessieren, bemerken wir, daß *Kirchhoff* in seiner *Mechanik* S. 184 § 4  $V$  durch ein Oberflächenintegral darstellt, welches ebenfalls diesen Beweis liefert, wenn man sich den reziproken Radiusvektor so entwickelt denkt, wie es *W. Stahl* in *Crelles Journal* 1875 Bd. 79 S. 269 und 270 o. angiebt. Jene Darstellung von  $V$  ist sehr einfach, wenn der Satz von *Green* bereits bekannt ist.

Sie wird aber überflüssig, sobald man eine Niveauläche außerhalb der Erde (oder falls man die Luftmasse als unerheblich ansieht, eine Niveauläche außerhalb der physischen Erdoberfläche) betrachtet. Nehmen wir einen außerhalb gelegenen Punkt  $P_0$  als Koordinatenanfang und ist  $P'$  ein anderer außerhalb gelegener beweglicher Punkt mit den Koordinaten  $x', y', z'$ , für welchen  $V$  zu berechnen ist, bezeichnet man endlich mit  $x, y, z$  die Koordinaten eines Massenelementes  $dm$  der Erde, so ist

$$e^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

oder

$$e = r \sqrt{1 - \frac{2(xx' + yy' + zz') - (x'^2 + y'^2 + z'^2)}{r^2}},$$

für  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Ist nun  $r' = P_0P'$  hinreichend klein, so kann man  $1 : e$  nach Potenzen des Subtrahenden unter der Wurzel entwickeln (d. h. nach Potenzen von  $\frac{r'}{r}$ , welche Entwicklung im zweiten Kapitel eingehend untersucht wird). Dadurch erhält man  $1 : e$  als Potenzreihe in  $x', y'$  und  $z'$ ; die Integration für

$$V = \int \frac{dm}{e}$$

ergibt  $V$  als ebensolche Reihe und auf demselben Gebiete gültig, nämlich innerhalb einer um  $P'$  als Zentrum geschlagenen Kugelfläche, welche überall von der Erdoberfläche in meßbarem Abstände bleibt.

§ 24. **Wirkungssphäre der Unstetigkeitsstellen der Dichtigkeit.** Nach der ersten Formel (2) des vorigen Paragraphen ist die sprungweise Änderung von  $\frac{1}{\rho_a}$  an einer Unstetigkeitsstelle der Dichtigkeit unabhängig von den Massen, welche Ursache der Unstetigkeit sind. Thatsächlich erzeugt ein Gesteinsbrocken bei gleichem  $\nu$  und  $\alpha$  ganz dieselben Sprünge wie ein Gebirge desselben Gesteins. Nichtsdestoweniger besteht doch ein erheblicher Unterschied im Gesamteinfluß auf die Niveauläche, also in der Wirkungssphäre. Wenn auch wegen der beiderseits der Unstetigkeitsfläche stetig verlaufenden Dichtigkeit die sprungweise Änderung von  $\frac{1}{\rho_a}$  schon in einiger Entfernung von

dieser Fläche durch allmählich eintretende Änderungen vorbereitet werden muß, so ist doch unmittelbar so viel klar, daß wenigstens innerhalb einer Unstetigkeiten erzeugenden Masse die Wirkungssphäre nicht größer sein kann als ihre Dimension entlang der betreffenden Niveaufläche. Aber auch außerhalb der Masse muß die Wirkungssphäre in Beziehung zu ihrer Größe stehen. Um hierin deutlicher zu sehen, stellen wir eine Betrachtung unter idealen einfachen Verhältnissen an, welche aber vollkommen ausreicht.

Indem wir von der Zentrifugalkraft und dem Luftmeere absehen, denken wir uns die Anziehung außerhalb der Erde so beschaffen, als ob alle ihre Masse  $M$  in ihrem Schwerpunkte vereinigt wäre. Es wird dann das Potential

$$W = \frac{M}{R+H} = \frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m \frac{R^3}{R+H} \quad (1)$$

für einen Punkt im Schwerpunktsabstand  $R+H$ . Dabei ist der Schwerpunktsabstand der physischen Erdoberfläche gleich  $R$  angenommen, die mittlere Dichtigkeit der Erde gleich  $\Theta_m$ . Wenn nun  $W$  konstant gleich  $W_0$  ist, so ist auch  $R+H$  konstant: der Radius der entsprechenden kugelförmigen Niveaufläche. Zugleich erscheint die physische Erdoberfläche als Niveaufläche (Meeresfläche) und  $H$  als Höhe darüber.

Die Gleichung (1) wird rechter Hand einen Zuwachs erhalten, wenn wir uns noch eine kleine, in roher Annäherung kugelige Masse  $m$  auf der physischen Erdoberfläche zugefügt denken, wobei wir annehmen wollen, daß der Schwerpunkt von  $m$  sehr nahe der ursprünglichen Niveaufläche liegt. Ist  $e$  der Abstand eines Punktes  $P$  außerhalb dieser Masse von ihrem Schwerpunkt, so ist in erster Annäherung die Potentialfunktion der Anziehung dieser Masse auf  $P$  gleich  $k^2 m : e$  und daher die Gleichung der Niveaufläche  $W = W_0$  mit der jetzt veränderlichen Meereshöhe  $H+h$ , außerhalb der Masse  $m$ , angenähert:

$$W = \frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m \frac{R^3}{R+H+h} + \frac{k^2 m}{e} = W_0. \quad (2)$$

Mit Rücksicht auf die geringe Größe von  $H+h$  gegen  $R$  folgt aus der Differenz von (2) und der auf  $W_0$  angewandten Gleichung (1) angenähert:

$$\frac{m}{e} = \frac{4}{3} \pi \Theta_m R h \quad (3)$$

oder

$$h = \frac{3}{4} \frac{m}{\pi \Theta_m R e}.$$

Zufolge dieser Formel tritt eine merkbare Hebung  $h$  der ursprünglich vorhandenen Niveaufläche in einer Entfernung  $e$  ein, welche direkt proportional der wirkenden Masse  $m$  ist. Wie also auch der



Verlauf der Krümmungsradien sein mag, eine merkbare Wirkung wird jedenfalls bei kleinen Massen auf einen kleineren Wirkungskreis als bei großen beschränkt sein, und zwar gilt die Regel: *Die Wirkungssphäre ist proportional der Masse.*

Wir können nun aber auch ermitteln, wie sich bei verschiedenen Massen die Entfernungen verhalten, in welchen eine gleiche Änderung von  $\varrho$  eintritt. Die Gleichung (2) zeigt, daß die Niveaufläche eine Rotationsfläche in Bezug auf eine Linie durch die Schwerpunkte von  $m$  und der ursprünglichen Erdmasse  $M$  ist. Ein Schnitt durch diese Linie ist ein sogenannter Meridianschnitt der Rotationsfläche, also auch für alle Punkte der Schnittlinie Normalschnitt. Die Krümmungsradien des Meridianschnittes interessieren aber am meisten, weil sie augenscheinlich durch die lotablenkende Wirkung der Masse  $m$  am meisten beeinflusst werden. Denken wir uns nun im Anschluß an § 22 S. 36 einen Punkt  $P_0$  als Koordinatenanfang, die  $\xi$ -Axe in die Normale (nach außen) und die  $\xi$ -Axe in den Meridianschnitt (nach  $m$  hin) gelegt, so wird der Krümmungshalbmesser  $\varrho_\alpha$  desselben für außerhalb der Masse  $m$  befindliche Punkte aus Formel (7) S. 36 erhalten, indem  $\alpha = \text{null}$  gesetzt wird. Also ist

$$\varrho_\alpha = W_3 : W_{1,1} . \quad (4)$$

Hierzu berechnen wir  $W_{1,1}$  aus (2), indem wir die Koordinaten eines beliebigen Punktes des Meridianschnitts mit  $\xi$  und  $\zeta$ , diejenigen des Schwerpunkts von  $m$  mit  $\xi_1$  und  $\zeta_1$  und diejenigen des Schwerpunkts  $M$  der Erde mit  $\xi_0$  und  $\zeta_0$  bezeichnen, demgemäß also in (2) einführen:

$$\begin{aligned} R + H + h &= \sqrt{(\xi_0 - \xi)^2 + (\zeta_0 - \zeta)^2} \\ c &= \sqrt{(\xi_1 - \xi)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2} . \end{aligned} \quad (5)$$

Es folgt, wenn wir nach geschehener Differentiation  $\xi$  und  $\zeta$  gleich null setzen, den Differentialquotienten also auf  $P_0$  beziehen:

$$\begin{aligned} W_{1,1} = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right)_0 &= \frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m \frac{R^3}{(R + H + h)^3} \left( -1 + \frac{3\xi_0^2}{(R + H + h)^2} \right) \\ &+ k^2 \frac{m}{e^3} \left( -1 + \frac{3\xi_1^2}{e^2} \right) , \end{aligned} \quad (6)$$

wobei  $e^2 = \xi_1^2 + \zeta_1^2$  ist.

Diese Formel läßt sich wesentlich vereinfachen, wenn wir uns auf Punkte  $P_0$  beschränken, die in der Nähe der störenden Masse liegen. Dann ist der Faktor der zweiten Parenthese etwa von derselben Ordnung, wie derjenige der ersten Parenthese, wie man erkennt, wenn man sich  $m$  als Kugel vom Radius  $a$  denkt und beachtet, daß  $a : c$  nach unserer Annahme ein von 1 nicht allzu verschiedener Bruch sein wird. Im ersten Faktor dürfen wir den nach (3) kleinen Wert  $h$  gegen  $R + H$  vernachlässigen und ebenso das Glied mit  $\xi_0^2$ ;

denn  $\xi_0 : (R + H + h)$  ist nichts anderes als der Arcus der Lotablenkung in  $P_0$ , welcher nur ein kleiner Bruch sein kann. Setzen wir zugleich  $\xi_1^2 = e^2 - \xi_0^2$ , so folgt aus (6) in hinreichender Annäherung für Punkte, welche der störenden Masse nahe, jedoch außerhalb derselben liegen:

$$W_{1,1} = -\frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m \frac{R^3}{(R+H)^3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{m}{\pi \Theta_m e^3} \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{\xi_1^2}{e^2} \right] \right\} \quad (7)$$

Ferner findet man mit Rücksicht darauf, daß  $\xi_0$  sehr nahe gleich  $-(R + H + h)$  ist, ebenso genau:

$$W_3 = \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_0 = -\frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m \frac{R^3}{(R+H)^2} \quad (8)$$

Mithin ist nach (4)

$$\frac{1}{\varrho_a} = \frac{1}{R+H} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{m}{\pi \Theta_m e^3} \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{\xi_1^2}{e^2} \right] \right\} \quad (9)$$

Diese Formel zeigt, daß die gleiche Änderung von  $1 : \varrho_a$  für verschiedene Massen in solchen Entfernungen  $e$  eintritt, für welche  $\frac{m}{e^3}$  gleichen Betrag hat; denn der Wert der eckigen Parenthese ist jedenfalls angenähert gleich 1. In Bezug auf Krümmungsänderung ist sonach die Wirkungssphäre der durchschnittlichen linearen Dimension der Masse näherungsweise proportional — ein Resultat, welches mit dem an der Hand von (3) gefundenen nicht in Widerspruch steht, weil dort eine integrale, hier nur eine differentiale Wirkung in betracht kommt.

Wie gering die Totalwirkung von Massen ist, die im gewöhnlichen Leben schon für bedeutend gelten, ersehen wir an der Wirkung eines Berges von der Form eines *Kubus von 100<sup>m</sup> Seite* und der Dichte  $2,8 = \frac{1}{2} \Theta_m$ .

Aus Formel (3) folgt als Hebung  $h$  einer Niveaufläche, die nahezu durch den Schwerpunkt von  $m$  geht, bei ihrem Eintritte in den Kubus rund  $0,4^{mm}$ .  $h$  wächst im Innern noch fort bis auf nicht ganz den doppelten Betrag beim Eintritt, welches Maximum natürlicherweise in der Mitte eintritt und dadurch hervorgerufen wird, daß die Potentialfunktion der Anziehung des Kubus von der Oberfläche nach dem Zentrum des Kubus rund aufs Doppelte ansteigt. Hiervon überzeugt man sich leicht, wenn man den Kubus durch eine Vertikalebene durch den Schwerpunkt in zwei kongruente Hälften teilt und beachtet, daß zu dem innern Punkte die Hälften beide so nahe liegen, wie zu dem äußern nur die eine.

Trotz dieser geringen Totalwirkung erleidet  $\varrho$  beträchtliche Änderungen. Nach (9) ist beim Eintritt in den Kubus angenähert  $\varrho_a = -R$  und nach Formel (5) S. 39 springt  $\varrho$  an dieser Stelle innerhalb auf

den Wert  $\rho_i = +2R$ . Diese Werte sind von der Seitenlänge des Kubus unabhängig. Abhängig von dieser ist aber die Dauer negativer  $\rho_a$ . Denn  $\rho_a$  springt von  $-\infty$  auf  $+\infty$  bei  $e = 0,63$  Seitenlänge, im obigen Falle also bei  $e = 63^m$ .

§ 25. Potenzreihen für Niveauflächen sind unpraktikabel. In § 13 wurde gefunden, daß die Biegung der Niveauflächen (für  $g > \text{null}$ ) jedenfalls stetig ist, wie auch die immer endliche Dichtigkeit verläuft. Folgende Paragraphen haben dagegen gezeigt, daß die Krümmung an jeder Unstetigkeitsstelle der Dichtigkeit erheblich wechselt. In den Materialien der Erdkruste ändert sich nun die Dichtigkeit schon vielfach in sehr kleinen Räumen, so daß faktisch auch die Krümmung vielfach wiederholten starken Änderungen in sehr kleinen Gebieten einer Niveaufläche unterliegt; indessen hierauf brauchen wir nach § 24 selbst bei feinen Untersuchungen keine Rücksicht zu nehmen. Denn wenn die totale Wirkung von kubischen Massen bis zu  $100^m$  Seitenlänge so gering ist, wie dort berechnet, dann kann man sich in der That bei den feinsten Untersuchungen die wirkliche Massenordnung durch eine ideale ersetzt denken, welche deren Unstetigkeiten von geringerer Ausdehnung innerhalb größerer Räume, die in stetig gebogenen Grenzflächen aneinanderstoßen, ausgleicht. Man wird immer durch ähnliche Betrachtungen wie in § 24 überschlagen können, ob die durch die Anlage der Grenzflächen und durch die Interpolation der Dichtigkeit vernachlässigten, bzw. zugefügten Massen für die betreffende Untersuchung von Belang sind oder nicht, in welchem letzteren Falle dann der idealisierte Zustand für die betreffende Untersuchung ausreicht.

Innerhalb der einzelnen Räume sind aber nach § 17 S. 24 die Differentialquotienten von  $W$  endlich und stetig. Hier können wir daher  $W$  nach *Taylor's* Satz in eine Reihe nach Potenzen der Koordinatendifferenzen entwickeln (vergl. die Anm. zu § 23 S. 39). Ebenso können wir die Gleichung einer Niveaufläche in Reihenform bringen und es ist ohne weiteres ersichtlich, daß hier auch Entwicklungen wie in Bd. 1 S. 573 u. ff. möglich sein werden.

Diese Entwicklungen haben praktischen Wert aber nur dann, wenn sie auf wenige Glieder eingeschränkt werden dürfen. Außerdem wird man solche Entwicklungen eben nur innerhalb eines Raumes benutzen können, für welchen die stetige Interpolation der Dichtigkeit gerade noch als ausreichend erscheint; denn für verschiedene Räume sind nach § 21 S. 34 die analytischen Ausdrücke für  $W$  verschieden, also auch die Reihen. Wir fanden nun zwar im vorigen Paragraphen, daß kubische Massen bis zu  $100^m$  Seitenlänge wenig Gesamtwirkung haben; dieselbe Rechnung würde aber zeigen, daß mit wachsender Ausdehnung die Wirkung von Massen, welche eine sonst regelmäßige Massenverteilung unterbrechen, bei feinen Untersuchungen

nicht mehr zu vernachlässigen ist. Man schließt hieraus weiter, daß für Niveaulächen im Hügelland und im Gebirge, sowie an der Meeresküste Potenzreihenentwicklungen von starker Konvergenz in der Regel auf Gebiete von wenigen Kilometern linearer Ausdehnung beschränkt sein werden, selbst bei solchen Niveaulächen, die ganz in der Luft über die Massenunstetigkeiten hinweglaufen oder in einiger Tiefe unter denselben liegen. Denn wegen des Satzes (1) § 8 S. 10 nehmen Niveaulächen, welche in der Nähe von Massenunstetigkeiten vorbeiführen, an den Formveränderungen derjenigen Niveaulächen, welche durch letztere hindurchführen, mehr oder weniger teil.

Niveaulächen im Flachlande werden, durch unterirdische Massenunregelmäßigkeiten beeinflusst, dasselbe Verhalten zeigen.

Zwei belehrende Beispiele zu Vorstehendem geben § 22 und § 23 bis 27 Bd. 1 S. 568 u. ff. Insbesondere Figur 45 S. 570 weist darauf hin, daß im Harzgebiet von einer konvergenten Entwicklung ganz und gar nicht, sondern höchstens von einer interpolatorischen, aber jedenfalls unbeholfen ausfallenden Entwicklung die Rede sein kann. Sogar bei Figur 46 S. 572, wo es sich hauptsächlich nur um eine grobe Darstellung der Alpenwirkung handelt, zeigten sich Schwierigkeiten bei der Potenzreihenentwicklung, vergl. S. 578 § 26.

Dies hat zur Folge, daß man bei der mathematischen Behandlung der geodätischen Aufgaben die Niveaulächen selbst nicht zu grunde legen kann und daß für beliebige Flächen abgeleitete geodätische Formeln, welche konvergente (meist sogar stark konvergente) Potenzreihenentwicklungen voraussetzen, für wirkliche Niveaulächen geradezu wertlos sind — worauf schon Bd. 1 S. 22 und namentlich S. 513 hingewiesen wurde.

Mit Rücksicht auf die Untersuchungen der Paragraphen 12 und 13 Bd. 1, S. 611 u. ff. müssen wir hier noch erwähnen, daß die daselbst gemachte Annahme der Stetigkeit der Krümmung (S. 619) und der Möglichkeit der Reihenentwicklung (5) S. 620 (vergl. auch S. 622) mit obigen Resultaten in Widerspruch zu stehen scheint. Indessen handelt es sich dort nicht um eine eingehende Darstellung der Eigenschaften des Geoids, sondern nur um die Konstatierung des Rotationscharakters im großen und ganzen. Dieser wird aber, wenn überhaupt vorhanden, durch die kontinentalen Massenunregelmäßigkeiten auf der physischen Erdoberfläche, abgesehen von der Nähe der Küsten und einzelnen andern Anomalieen, in den Gebieten, welche Gradmessungen zugänglich sind, nicht verwischt, weil die Gestalt des Geoids nach Untersuchungen, welche im dritten Kapitel gegeben werden, sich nicht wesentlich ändert, wenn die Massenunregelmäßigkeiten, wie überhaupt die äußersten Massenschichten um etwa drei geographische Meilen nach innen verschoben werden. Betrachten wir aber das Geoid als eine Niveauläche außerhalb der Erde, so ist sie nach S. 40 § 23 Anm. eine reguläre Fläche, für welche eine Gleichung im gewöhnlichen Sinne der analytischen Geometrie der analytische Ausdruck ist und für welche ferner sich auch Reihen nach Potenzen rechtwinkliger Koordinaten ansetzen lassen. Die Möglichkeit einer Reihenentwicklung von

der Form (5) S. 620 erscheint nun auch gegeben, da die Differentialquotienten von  $z$  nach  $P$  bei angemessener Beschränkung des Gebietes endlich und stetig sind; doch würde eine vollständige Untersuchung der Sache noch nachzuweisen haben, daß wirklich ein endliches Konvergenzgebiet vorhanden ist.

### § 26. Schwerkraft und Lotlinien beim Durchgange durch eine Unstetigkeitsfläche der Dichtigkeit.

Die *Schwerkraft*  $g$  hängt nach GröÙe und Richtung von den ersten Differentialquotienten von  $W$  ab; wir wissen, daß beide sich stetig mit dem Orte ändern (die Richtung allerdings nur für  $g > \text{null}$ ). Die Geschwindigkeit aber, mit der sich GröÙe und Richtung ändern, hängt von den zweiten Differentialquotienten ab, und beide sind daher beim Durchgange durch eine Unstetigkeitsfläche unstetig.

Nach Paragraph 8 (1) S. 10 ist die Geschwindigkeit  $dg : dh$  der Änderung von  $g$  bei Verschiebungen eines Punktes  $P$  entlang der Lotlinie gleich

$$= \frac{d^2 W}{dh^2},$$

wenn die Verschiebungen in Richtung der Abnahme von  $W$ , d. h. mit zunehmender Höhe erfolgen. Bildet nun die Lotrichtung in  $P$  mit der Normale einer Unstetigkeitsfläche, welche durch  $P$  hindurchführt, den Winkel  $\nu$ , so wird nach § 21 (1) S. 32 die sprungweise Änderung der Geschwindigkeit  $dg : dh$  beim Durchgange durch die Unstetigkeitsfläche gleich

$$\Delta \frac{dg}{dh} = 4\pi k^2 \Delta \Theta_0 \cos^2 \nu. \quad (1)$$

Führen wir für die Nähe der physischen Erdoberfläche wie S. 39 (3) den Ausdruck

$$g = \frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R$$

ein, welcher im vorliegenden Falle eine völlig ausreichende Annäherung gewährt, so ergibt sich:

$$\Delta \frac{dg}{dh} = \frac{3 \Delta \Theta_0}{\Theta_m} \frac{g}{R} \cos^2 \nu. \quad (2)$$

Für die Änderung der Schwerkraft mit der Höhe auÙerhalb der physischen Erdoberfläche erhält man nun eine ganz brauchbare Annäherung, wenn man, vergl. S. 41 (1), in der Meereshöhe  $H$

$$g = \frac{M}{(R+H)^2}$$

setzt, womit sofort folgt:

$$\left( \frac{dg}{dh} \right)_a = \left( \frac{dg}{dH} \right) = - \frac{2g}{R}. \quad (3)$$

Insofern beim Übergang aus der Luft in horizontales Gestein  $\nu = \text{null}$

ist und  $\Delta\Theta_0$  sehr nahe gleich der Gesteinsdichte  $\Theta_i$  wird, folgt aus der Addition von (2) und (3):

$$\left(\frac{dg}{dh}\right)_i = -\frac{g}{R} \left(2 - \frac{3\Theta_i}{\Theta_m}\right). \quad (4)$$

Indem aber  $\Theta_i$  im allgemeinen gleich  $\frac{1}{2} \Theta_m$  gesetzt werden kann, zeigt diese Formel, daß die Änderungsgeschwindigkeit von  $g$  unterhalb der physischen Erdoberfläche nur etwa der vierte Teil des Betrages oberhalb derselben ist. Aber es findet jedenfalls eine Zunahme von  $g$  unterhalb der physischen Erdoberfläche bis zu einer gewissen Tiefe statt (vergl. hierzu 6. Kap. § 13).

Die *Kraft-* oder *Lotlinien* sind wegen der stetigen Änderung der Lotrichtung stetig gebogen, vergl. § 12 S. 14; jedoch ihre Krümmung ist wie bemerkt unstetig, derart, daß nicht nur die Größe des Krümmungsradius, sondern auch die Lage der Schmiegungebene sich bei unendlich kleinen Verschiebungen von  $P$  in der Lotlinie um endliche Beträge ändern kann. (Vergl. darüber *Bruns, Figur der Erde*, S. 12 und 13, sowie S. 20 o..)

§ 27. Die geographischen Meridiane und Parallelen einer Niveaufläche (Bd. 1 S. 8) sind überall unstetig gebogen, wo die Niveaufläche eine Unstetigkeitsfläche der Dichtigkeit durchschneidet. Um dies einzusehen, stellen wir ihre Gleichungen auf.

In Bezug auf ein beliebiges rechtwinkeliges Koordinatensystem seien  $\chi, \psi, \omega$  die Neigungswinkel der Erdaxe bezw. zu den drei Axen der  $x, y$  und  $z$ . Für die Normale einer Ebene, zu welcher die Meridianebenen aller Punkte eines geographischen Meridianes parallel liegen sollen, seien diese Stellungswinkel gleich  $\lambda, \mu, \nu$ . Da nun die Meridianebenen parallel zur Erdaxe laufen, steht letztere mithin auf der Normale  $(\lambda\mu\nu)$  senkrecht und es ist nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie:

$$\cos \chi \cos \lambda + \cos \psi \cos \mu + \cos \omega \cos \nu = 0. \quad (1)$$

Durch diese Gleichung ist zunächst ausgedrückt, daß die Meridianebenen parallel der Erdaxe sind. Sie sind aber auch Vertikalebene ihrer Punkte und es muß daher in irgend einem Punkt die Normale  $(\lambda\mu\nu)$  rechtwinkelig zur Lotrichtung sein. Die Richtungs cosinus der letzteren sind aber offenbar den Komponenten der Schwerkraft  $g$  für die drei Axen, d. h. nach (2) S. 9 den partiellen Differentialquotienten von  $W$  nach den drei Koordinaten, proportional. Mithin wird

$$\frac{\partial W}{\partial x} \cos \lambda + \frac{\partial W}{\partial y} \cos \mu + \frac{\partial W}{\partial z} \cos \nu = 0. \quad (2)$$

Diese Gleichung gilt auch insbesondere für einen Punkt  $P_0$ , dessen Meridianebene maßgebend sein soll:



$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_0 \cos \lambda + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0 \cos \mu + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_0 \cos \nu = 0. \quad (3)$$

Aus (1), (2) und (3) kann man  $\cos \lambda$ ,  $\cos \mu$  und  $\cos \nu$  eliminieren. In Determinantenform ist das Resultat:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial z} \\ \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0 & \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_0 \\ \cos \chi & \cos \psi & \cos \omega \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Hierzu tritt noch, um den *geographischen Meridian durch  $P_0$*  vollständig zu definieren, die Gleichung der Niveauläche durch  $P_0$ :

$$W = W_0. \quad (5)$$

Ohne diese Gleichung bedeutet (4) die Gleichung einer Fläche, welche alle Punkte gleicher geographischer Länge des ganzen Raumes enthält.

Um nun die Richtung eines Linienelementes  $ds$  des geographischen Meridianes, welches von  $P_0$  ausgeht, zu erhalten, haben wir für die Gleichungen (4) und (5) das totale Differential für eine Verschiebung von  $P$  auf der Niveauläche zu bilden, dann aber  $P$  mit  $P_0$  zusammenfallen zu lassen und also alle Differentialquotienten von  $W$  auf  $P_0$  zu beziehen. Wir bezeichnen dabei nach den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_0 &= W_1 & \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_0 &= W_{1.1} & \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_0 &= W_{1.2} \\ \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0 &= W_2 & \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_0 &= W_{2.2} & \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Es wird erhalten:

$$\begin{vmatrix} W_{1.1} & W_{1.2} & W_{1.3} \\ W_1 & W_2 & W_3 \\ \cos \chi & \cos \psi & \cos \omega \end{vmatrix} dx + \begin{vmatrix} W_{1.2} & W_{2.2} & W_{2.3} \\ W_1 & W_2 & W_3 \\ \cos \chi & \cos \psi & \cos \omega \end{vmatrix} dy + \begin{vmatrix} W_{1.3} & W_{2.3} & W_{3.3} \\ W_1 & W_2 & W_3 \\ \cos \chi & \cos \psi & \cos \omega \end{vmatrix} dz = 0 \quad (6)$$

$$W_1 dx + W_2 dy + W_3 dz = 0. \quad (7)$$

Hieraus kann man die Richtungscosinus des Linienelements des geographischen Meridianes in  $P_0$  berechnen. Diese Rechnung verfolgen wir aber nicht weiter und bemerken nur bezüglich des Koordinatensystems, daß man in dem Falle, wo als  $z$ -Axe die Erdaxe selbst genommen wird,

$$\cos \chi = 0 \quad \cos \psi = 0 \quad \cos \omega = 1 \quad (8)$$

einzuführen hat.

Wählt man dagegen die Tangentialebene in  $P_0$  als  $xy$ -Ebene und die Normale der Niveauläche als  $z$ -Axe, so ist zu setzen

$$W_1 = 0 = W_2. \quad (9)$$



Wegen (7) wird alsdann  $dz = \text{null}$  und (6) giebt, wenn wir anstatt  $xyz$  jetzt bezw.  $\xi\eta\zeta$  schreiben, um auf die Bezeichnungen der Paragraphen 22 und 23 zu kommen:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = - \left| \begin{array}{cc} W_{1.1} & W_{1.2} \\ \cos\chi & \cos\psi \end{array} \right| : \left| \begin{array}{cc} W_{1.2} & W_{2.2} \\ \cos\chi & \cos\psi \end{array} \right|. \quad (10)$$

Liegt nun  $P_0$  in einer Unstetigkeitsfläche und die  $\eta$ -Axe tangential an dieser, dann geben die Formeln (1) § 23 S. 38 für  $W_{1.1}$  u. s. f. die Unterschiede der Werte beiderseits der Unstetigkeitsfläche. Hiernach ist nur  $W_{1.1}$  unstetig und man sieht nun deutlich, daß die Kurve des geographischen Meridians im allgemeinen in  $P_0$  eine Ecke hat.

Um die Gleichung des *geographischen Parallels* abzuleiten, erinnern wir uns, daß die Richtung der Normale in  $P$  durch die Richtungs-cosinus  $\frac{\partial W}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial W}{\partial y}$  und  $\frac{\partial W}{\partial z}$  definiert ist, diejenige der Erdaxe aber durch die Werte  $\cos\chi$ ,  $\cos\psi$  und  $\cos\omega$ . Ist  $B$  die geographische Breite von  $P$ , so hat man nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie für  $\cos(90^\circ - B)$  oder  $\sin B$  die Gleichung:

$$\sin B = \frac{\partial W}{\partial x} \cos\chi + \frac{\partial W}{\partial y} \cos\psi + \frac{\partial W}{\partial z} \cos\omega, \quad (11)$$

wozu noch tritt:

$$W = W_0, \quad (12)$$

welche letztere Gleichung erforderlich ist, um diejenigen Punkte auszuscheiden, welche nicht auf einer bestimmten Niveaufläche liegen.

Die weitere Behandlung ist ähnlich wie oben. Wählt man das Koordinatensystem  $\xi\eta\zeta$ , so folgt

$$\frac{d\eta}{d\xi} = - \frac{W_{1.1} \cos\chi + W_{1.2} \cos\psi + W_{1.3} \cos\omega}{W_{1.2} \cos\chi + W_{2.2} \cos\psi + W_{2.3} \cos\omega}, \quad (13)$$

wodurch sich die Richtung eines von  $P_0$  ausgehenden Linienelements bestimmt. An einer Unstetigkeitsfläche ändern sich  $W_{1.1}$  und  $W_{1.3}$  sprungweise; nehmen wir aber der Einfachheit halber an, daß die Unstetigkeitsfläche die Niveaufläche bei  $P_0$  normal schneidet, mithin die  $\zeta$ -Axe ebenso wie die  $\eta$ -Axe die erstere tangiert, dann wird die Änderung von  $W_{1.3}$  gerade so wie diejenige von  $W_{1.2}$  gleich null und es ändert sich nur  $W_{1.1}$  sprungweise nach Maßgabe von Formel (1) S. 38, wobei  $\sin\nu = 1$  zu setzen ist.

Zur Berechnung von Näherungswerten für die in (10) und (13) auftretenden Differentialquotienten von  $W$  kann der Ausdruck (1) § 23 S. 41 dienen.

Zum Schlusse braucht kaum noch darauf hingewiesen zu werden, daß für Meridiane und Parallelen der analytische Ausdruck von Ecke zu Ecke ein anderer wird, da  $W$  beim Durchgange durch eine Fläche, wo die Dichtigkeit Singularitäten hat, einen anderen analytischen Ausdruck erhält.

## 2. Kapitel.

## Bestimmung der Abplattung aus Schweremessungen.

§ 1. Entwicklung von  $\frac{1}{e}$  in eine Potenzreihe. Um das Potential  $W$  der Schwerkraft in eine für die weitere Anwendung geeignete Form zu bringen, ist es erforderlich, in dem Ausdruck (1) § 6 S. 8:

$$W = k^2 \int \frac{dm}{e} + \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) \omega^2, \quad (1)$$

$\frac{1}{e}$  in nachstehender Weise in eine Reihe zu entwickeln.

Zunächst bringen wir in Erinnerung, daß bei Aufstellung des Ausdruckes (1) der Erdschwerpunkt als Koordinatenanfang, die Rotationsaxe der Erde als  $z$ -Axe und die Äquatorebene als  $xy$ -Ebene genommen ist. Die Koordinaten eines Punktes  $P'$ , auf welchen sich  $W$  bezieht, sind  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$ ; diejenigen eines Punktes der Erde, in welchem das Massenelement  $dm$  lagert, sind  $x$ ,  $y$  und  $z$ , so daß zu setzen ist

$$dm = \Theta \, dx \, dy \, dz, \quad (2)$$

wenn wie bisher  $\Theta$  die Dichtigkeit der Masse im Punkte  $(xyz)$  angiebt.

Bezeichnet man nun mit  $r'$  den Radiusvektor von  $P'$ , mit  $r$  denjenigen des Punktes  $(xyz)$  und mit  $\gamma$  den von beiden Radienvektoren eingeschlossenen Winkel, so hat man für den Abstand des Punktes  $(xyz)$  von  $P'$  die Gleichung

$$e^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma. \quad (3)$$

Andrerseits ist bekanntlich

$$e^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2;$$

löst man hier rechter Hand die Quadrate auf und beachtet die Beziehungen:

$$\begin{aligned} r'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \end{aligned}$$

so folgt aus der Vergleichung mit (3):

$$rr' \cos \gamma = xx' + yy' + zz'. \quad (4)$$

Hiermit ist  $\cos \gamma$  durch die rechtwinkligen Koordinaten ausgedrückt. Wir behalten aber einstweilen  $\cos \gamma$  bei und entwickeln  $\frac{1}{e}$  ausgehend von der aus (3) folgenden Gleichung

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'} \left( 1 - 2 \frac{r}{r'} \cos \gamma + \left( \frac{r}{r'} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (5)$$

unter der Voraussetzung  $r' > r$ .

Sei  $i = \sqrt{-1}$  und  $\varepsilon$  die Basis der natürlichen Logarithmen, so ist bekanntlich

$$\cos \gamma = \frac{\varepsilon^{\gamma i} + \varepsilon^{-\gamma i}}{2} \quad (6)$$

und hiermit

$$1 - 2 \frac{r}{r'} \cos \gamma + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 = \left(1 - \frac{r}{r'} \varepsilon^{\gamma i}\right) \left(1 - \frac{r}{r'} \varepsilon^{-\gamma i}\right).$$

Man hat ferner [vergl. Bd. 1 S. 27 (3)]:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{r}{r'} \varepsilon^{\pm \gamma i}\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{r}{r'} \varepsilon^{\pm \gamma i} + \frac{3}{8} \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \varepsilon^{\pm 2 \gamma i} + \frac{5}{16} \left(\frac{r}{r'}\right)^3 \varepsilon^{\pm 3 \gamma i} \\ &+ \frac{35}{128} \left(\frac{r}{r'}\right)^4 \varepsilon^{\pm 4 \gamma i} + \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

wobei in den Exponenten die oberen und unteren Zeichen einander entsprechen. Beide Reihen sind für  $r' > r$  absolut konvergent und ihre Multiplikation giebt daher unter dieser Bedingung eine ebenfalls absolut konvergente Reihe. In dem Produkt gehen wir mittelst der auf  $2\gamma$ ,  $3\gamma$  und  $4\gamma$  angewandten Formel (6) wieder auf reelle Werte zurück und erhalten so unter Beachtung von (5):

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'} \left\{ 1 + \frac{r}{r'} P_1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 P_2 + \left(\frac{r}{r'}\right)^3 P_3 + \left(\frac{r}{r'}\right)^4 P_4 + \dots \right\} \quad (8)$$

$r' > r$

mit

$$\begin{aligned} P_1 &= \cos \gamma \\ P_2 &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2\gamma \\ P_3 &= \frac{3}{8} \cos \gamma + \frac{5}{8} \cos 3\gamma \\ P_4 &= \frac{9}{64} + \frac{20}{64} \cos 2\gamma + \frac{35}{64} \cos 4\gamma. \end{aligned} \quad (9)$$

Da die Reihen (7) nur positive Koeffizienten enthalten, so sind in den Koeffizienten  $P$  auch alle Glieder, abgesehen vom Vorzeichen der Cosinus, positiv. Hiermit erkennt man leicht, daß die  $P$  für  $\gamma = \text{null}$  ihren größten absoluten Wert annehmen. Ist aber  $\gamma = \text{null}$ , so ist nach (5)

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r}{r'}}$$

oder

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'} \left\{ 1 + \left(\frac{r}{r'}\right) + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 + \left(\frac{r}{r'}\right)^3 + \left(\frac{r}{r'}\right)^4 + \dots \right\}.$$

Dies bestätigt einesteils die absolute Konvergenz von (8) für  $r' > r$ , insofern eben diese Reihe noch für die größten Koeffizientenwerte konvergiert, andernteils zeigt sich, daß der absolute Wert eines Koeffizienten  $P$  die Einheit nicht überschreitet, wie auch  $\gamma$  beschaffen ist.

Für  $r' = r$  gilt die Entwicklung (8) zufolge der Herleitung nicht ohne weiteres. Wir lassen diesen Fall einstweilen unerledigt und wenden uns zu dem Falle  $r' < r$ . Anstatt (5) ist jetzt zu setzen

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r} \left( 1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \gamma + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Man hat also nur  $r$  mit  $r'$  zu vertauschen und erhält dadurch, unter  $P_1, P_2$  u. s. f. immer die durch (9) bezeichneten Koeffizienten verstanden:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{r'}{r} P_1 + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 P_2 + \left( \frac{r'}{r} \right)^3 P_3 + \left( \frac{r'}{r} \right)^4 P_4 + \dots \right\} \quad (10)$$

$r' < r.$

§ 2. Fortsetzung: Die Koeffizienten  $P$ . Wir führen in die Ausdrücke (9) anstatt der Cosinus der Vielfachen von  $\gamma$  die Potenzen von  $\cos \gamma$  ein. Man hat aber

$$\cos 2\gamma = 2 \cos^2 \gamma - 1,$$

$$\cos 3\gamma = \cos 2\gamma \cos \gamma - \sin 2\gamma \sin \gamma = 4 \cos^3 \gamma - 3 \cos \gamma,$$

$$\cos 4\gamma = 2 \cos^2 2\gamma - 1 = 8 \cos^4 \gamma - 8 \cos^2 \gamma + 1,$$

und hiermit findet sich:

$$\begin{aligned} P_1 &= + \cos \gamma \\ P_2 &= - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \gamma \\ P_3 &= - \frac{3}{2} \cos \gamma + \frac{5}{2} \cos^3 \gamma \\ P_4 &= + \frac{3}{8} - \frac{30}{8} \cos^2 \gamma + \frac{35}{8} \cos^4 \gamma \end{aligned} \quad (1)$$

Zu dieser Form der Koeffizienten gelangt man direkt, wenn z. B. für  $r' > r$  gesetzt wird:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'} \left( 1 + \left( \frac{r}{r'} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( 1 - \frac{2 \frac{r}{r'} \cos \gamma}{1 + \left( \frac{r}{r'} \right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Man hat hier zuerst den  $\cos \gamma$  enthaltenden Faktor rechter Hand zu entwickeln und dann die negativen Potenzen von  $1 + \left( \frac{r}{r'} \right)^2$  einzuführen.

Schreiben wir anstatt  $\frac{r}{r'}$  für den Augenblick  $\alpha$ , so folgt zunächst:

$$\frac{r'}{e} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{(1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\alpha \cos \gamma}{(1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3}{1.2} \frac{\alpha^2 \cos^2 \gamma}{(1 + \alpha^2)^{\frac{5}{2}}} + \dots \\ & + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{1.2.3 \dots n} \frac{\alpha^n \cos^n \gamma}{(1 + \alpha^2)^{\frac{2n+1}{2}}} + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Da nun

$$\frac{1}{(1 + \alpha^2)^{\frac{2n+1}{2}}} = 1 - \frac{2n+1}{1 \cdot 2^1} \alpha^2 + \frac{(2n+1)(2n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} \alpha^4 - \dots, \quad (2^*)$$

so erhält man unter Substitution dieser Entwicklung für  $n = 0, 1, 2, \dots$  in die vorhergehende Reihe durch Zusammenfassung der in  $\alpha^n$  multiplizierten Glieder als Koeffizienten von  $\alpha^n$ :

$$P_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left\{ \begin{aligned} &\cos^n \gamma - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-2} \gamma \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \cos^{n-4} \gamma - \dots \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Bei dieser Art der Entwicklung ist indessen die Konvergenz der Entwicklung nicht evident, weshalb wir die andere vorangeschickt haben.

Wir haben oben gesehen, daß  $P_n$  höchstens gleich  $\pm 1$  werden kann. Diese Werte treten ein für  $\gamma = \text{null}$  und  $\pi$ . Für einen dazwischen liegenden Wert von  $\gamma$  ist  $P_n$  ein echter Bruch, welcher bei unendlich anwachsendem Index  $n$  absolut genommen gegen null konvergiert. Es ist nämlich\*):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \gamma + \frac{\pi}{4} \right] \cdot \sqrt{\frac{2}{n\pi \sin \gamma}}. \quad (4)$$

§ 3. Die Entwicklung von  $\frac{1}{e}$  für  $r' = r$ . In diesem Falle geben die Gleichungen (8) und (10) § 1 S. 51 und 52 beide

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'} \left\{ 1 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots \right\}. \quad (1)$$

Indessen ist aus der Entwicklung in § 1 nicht zu erkennen, inwieweit diese Formel gilt. Ebenso wenig zeigt dies § 2, denn die Entwicklung (2\*) konvergiert für  $\alpha = 1$  bekanntlich nur im Falle  $n = \text{null}$ .

Will man sich überzeugen, ob der Ansatz (1) zulässig ist, so kann man versuchen, direkt die Summe der geschlungenen Parenthese in (1) zu bilden. Man findet alsdann, daß in der That der Ansatz (1) richtig ist für

$$\cos^2 \gamma < 1.$$

Ist aber  $\cos^2 \gamma = 1$ , so ist er unzulässig.

Letzteres läßt sich leicht erkennen; schwieriger ist der erste Nachweis, der sich aber mit Hülfe einiger aus der höheren Analysis bekannter Entwicklungen führen läßt.

Für  $\cos \gamma = +1$  d. h. für  $\gamma = \text{null}$  sind nach S. 51 § 1 (5) und (8) alle  $P$  gleich 1, also ist dann ihre Summe  $\infty$  groß. Der Ansatz (1) giebt somit hier  $\frac{1}{e} = \infty$ . Wenngleich nun in der That für  $\gamma = \text{null}$

\*) E. Heyne, Theorie der Kugelfunktionen; 2. Auflage, Berlin 1878; S. 175 (28c) und S. 178 (29c).

auch  $e = \text{null}$  und  $\frac{1}{e}$  also  $\infty$  groß ist, so darf man doch nicht ohne weiteres den Ansatz (1) benutzen, da  $\infty$  kein bestimmter Wert ist.

Für  $\cos \gamma = -1$  d. h. für  $\gamma = \pi$  und  $2\gamma = 2\pi$  behalten nach (9) § 1 S. 51, oder besser nach (3) § 2 S. 53, die  $P$  mit geradem Index denselben Wert wie für  $\cos \gamma = +1$ , dagegen wechseln diejenigen mit ungeradem Index das Vorzeichen unter Beibehaltung des absoluten Wertes wie für  $\cos \gamma = +1$ . Mithin oscilliert jetzt die Reihe  $1 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots$ , d. i.  $+1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$  zwischen  $+1$  und null hin und her, während  $\frac{1}{e}$  gleich  $\frac{1}{r'} \cdot \frac{1}{2}$  ist.

Um die Reihe  $1 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots$  für  $\cos^2 \gamma < 1$  zu summieren, gehen wir von der Gleichung aus:

$$P_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \psi}{V^{2(\cos \psi - \cos \gamma)}} d\psi, \quad (2)$$

welche in der Lehre von den Kugelfunktionen bewiesen wird und gilt, wenn  $\gamma$  der Bedingung genügt:

$$0 < \gamma < \pi. *) \quad (2^*)$$

Diese Gleichung für kleine Werte von  $n$  zu verifizieren, ist nicht schwierig: Für  $n = \text{null}$  hat man

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos \frac{\psi}{2}}{V^{\sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\psi}{2}}} \frac{d\psi}{2}; \\ \text{setzt man nun } \sin \frac{\psi}{2} &= x \sin \frac{\gamma}{2}, \text{ so geht dieses über in} \\ P_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{V^{1-x^2}} \text{ d. i. } = 1. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Hiernach giebt (2) für  $n = \text{null}$  das erste Glied der zu summierenden Reihe.

Für  $n = 1$  ist aus (2) wegen  $\cos \frac{3\psi}{2} = \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\psi}{2}\right) \cos \frac{\psi}{2}$ :

$$P_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{1 - 4x^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{V^{1-x^2}} dx = 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \cos \gamma.$$

U. s. f.

Wenn wir nun die Summe aller  $P_n$  von  $n = \text{null}$  bis  $n = 1$  suchen, so ist zunächst die Summe von

$$\cos \frac{\psi}{2} + \cos \frac{3\psi}{2} + \cos \frac{5\psi}{2} + \dots + \cos \left( n - \frac{1}{2} \right) \psi$$

zu bilden. Dies geschieht nach einer bekannten Formel, welche auch leicht mittelst Projektion der Seiten eines regelmäßigen (einem Kreise eingeschriebenen) Polygons auf eine Axe, gegen welche sie die Neigungs-

\*) Heyne, Kugelfunktionen; S. 44 (7b).

winkel  $\frac{\psi}{2}$ ,  $\frac{3\psi}{2}$  u. s. f. besitzen, gewonnen werden kann. Die Summe ist

$$\frac{\sin n\psi}{2 \sin \frac{\psi}{2}}.$$

Hiernach erhält man:

$$1 + P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\gamma} \frac{\sin \left( 2n \frac{\psi}{2} \right)}{\sin \frac{\psi}{2} \sqrt{2} (\cos \psi - \cos \gamma)} \frac{d\psi}{2}. \quad (4)$$

Nach der Theorie der trigonometrischen Reihen\*) ist aber unter gewissen Voraussetzungen über die Funktion  $F(\beta)$ :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^h F(\beta) \frac{\sin m\beta}{\beta} d\beta = F(0). \quad (4^*)$$

Im Integral von (4) setzen wir im Zähler und Nenner  $\frac{\psi}{2}$  hinzu; dann gehen (4) und (4\*) in einander über für  $m = 2n$ ,  $\beta = \frac{\psi}{2}$ ,  $h = \frac{\gamma}{2}$  und

$$F(\beta) = \frac{\frac{\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2} (\cos \psi - \cos \gamma)},$$

sowie

$$F(0) = \frac{1}{2 \sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Es wird daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1}) = \frac{1}{2 \sin \frac{\gamma}{2}}. \quad (5)$$

Die Voraussetzung über  $F(\beta)$  ist (soweit sie hier in betracht kommt) die, daß es innerhalb der Integrationsgrenzen nicht unendlich wird. Falls ein Unendlichwerden eintritt, so kann die Rechnung auch noch gültig sein, es bedarf dieses aber besonderer Untersuchung. Im vorliegenden Falle wird  $F(\beta)$ , da  $\gamma < \pi$  ist und also  $\frac{\psi}{2} : \sin \frac{\psi}{2}$  innerhalb der Integrationsgrenzen endlich bleibt, nur für  $\psi = \gamma$  unendlich. Integrieren wir nun in (4) zunächst nur bis  $\gamma - \varepsilon$ , wo  $\varepsilon$  eine sehr kleine GröÙe und jedenfalls  $< \gamma$  sein soll, so gilt dafür die weitere Entwicklung; es ist aber zu (5) rechter Hand noch hinzu zusetzen:

$$+ \frac{2}{\pi} \int_{\gamma - \varepsilon}^{\gamma} \frac{\sin \left( 2n \frac{\psi}{2} \right)}{\sin \frac{\psi}{2} \sqrt{2} (\cos \psi - \cos \gamma)} \frac{d\psi}{2}, \quad (5^*)$$

oder nach Hinzufügen von  $\sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}$  im Zähler und Nenner:

\*) Heyne, Kugelfunktionen; S. 62 und 63, insbesondere (5a).



$$+ \frac{2}{\pi} \int_{\gamma-\varepsilon}^{\gamma} \frac{\sin n\psi}{\sin \psi \sin \frac{\psi}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\psi}{2}}} \frac{d\psi}{2}.$$

Da  $0 < \gamma < \pi$  ist, bleibt unter dem Integralzeichen der zweite Faktor innerhalb der Integrationsgrenzen positiv. Der erste Faktor hat einen endlichen Wert. Mithin ist (5\*) seinem absoluten Werte nach ein endliches Vielfaches von

$$\int_{\gamma-\varepsilon}^{\gamma} \frac{\sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\psi}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\psi}{2}}} \frac{d\psi}{2}.$$

Das unbestimmte Integral hiervon ist gleich

$$\text{Konst.} - \sqrt{\sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\psi}{2}};$$

man erhält somit (5\*) gleich einem endlichen Vielfachen von

$$\sqrt{\sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\gamma-\varepsilon}{2}} \quad \text{d. i.} \quad \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{2} \cdot \sin^2 \frac{2\gamma-\varepsilon}{2}}.$$

Hiernach kann man durch Voraussetzung eines geeignet kleinen Wertes für  $\varepsilon$  den Fehler der Formel (5) auf einen verschwindenden Betrag herabdrücken.

Aus Gleichung (5) ersieht man nun, daß die Summe  $1 + P_1 + P_2 + \text{u. s. f.}$  mit wachsender Anzahl der Glieder gegen  $1 : 2 \sin \frac{\gamma}{2}$  konvergiert (falls  $\cos^2 \gamma < 1$ ). Dieses ist aber der Wert von  $\frac{r'}{e}$  für  $r' = r$  nach (5) § 1 S. 50. Mithin gilt der Ansatz (1) im laufenden Paragraphen wirklich für  $r' = r$  und  $\cos^2 \gamma < 1$ .

#### § 4. Die Koeffizienten $P$ in rechtwinkligen und in Polarkoordinaten.

Um die Koeffizienten  $P$  durch rechtwinklige Koordinaten auszudrücken, bedarf es nur der Einführung des Ausdruckes

$$\cos \gamma = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'} \quad (1)$$

nach § 1 S. 50 (4) in die Formeln (1) § 2 S. 52.

Denken wir uns ferner den Punkt  $P'$  wie im vorigen Kapitel § 4 S. 5 im Anschluß an Fig. 1 durch Polarkoordinaten bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos \varphi' \cos \lambda' \\ y' &= r' \cos \varphi' \sin \lambda' \\ z' &= r' \sin \varphi'. \end{aligned} \quad (2)$$

Hierin bedeutet  $r'$  den Radiusvektor vom Erdschwerpunkt aus,  $\varphi'$  die geozentrische Breite und  $\lambda'$  die geozentrische Länge.

Für irgend einen Punkt  $(xyz)$  oder  $(r \varphi \lambda)$  hat man

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \lambda \\ y &= r \cos \varphi \sin \lambda \\ z &= r \sin \varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

und hiermit wird aus (1) ohne Schwierigkeit gefunden:

$$\cos \gamma = \cos \varphi \cos \varphi' \cos (\lambda - \lambda') + \sin \varphi \sin \varphi', \quad (4)$$

eine Formel, die man auch direkt mittelst sphärischer Trigonometrie hätte ableiten können.

Wenn man diesen Ausdruck für  $\cos \gamma$  in die Ausdrücke (1) § 2 S. 52 einführt, ist es vorteilhaft, anstatt der Potenzen von  $\cos (\lambda - \lambda')$  die Cosinus der Vielfachen von  $(\lambda - \lambda')$  anzuwenden. Es findet sich dann:

$$\begin{aligned} P_1 &= \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos (\lambda - \lambda'). \\ P_2 &= \frac{9}{4} \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \left( \sin^2 \varphi' - \frac{1}{3} \right) \\ &\quad + 3 \sin \varphi \cos \varphi \sin \varphi' \cos \varphi' \cos (\lambda - \lambda') \\ &\quad + \frac{3}{4} \cos^2 \varphi \cos^2 \varphi' \cos 2(\lambda - \lambda'). \\ P_3 &= \frac{25}{4} \left( \sin^3 \varphi - \frac{3}{5} \sin \varphi \right) \left( \sin^3 \varphi' - \frac{3}{5} \sin \varphi' \right) \\ &\quad + \frac{75}{8} \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{5} \right) \cos \varphi \left( \sin^2 \varphi' - \frac{1}{5} \right) \cos \varphi' \cos (\lambda - \lambda') \\ &\quad + \frac{15}{4} \sin \varphi \cos^2 \varphi \sin \varphi' \cos^2 \varphi' \cos 2(\lambda - \lambda') \\ &\quad + \frac{5}{8} \cos^3 \varphi \cos^3 \varphi' \cos 3(\lambda - \lambda'). \\ P_4 &= \frac{1225}{64} \left( \sin^4 \varphi - \frac{6}{7} \sin^2 \varphi + \frac{3}{35} \right) \left( \sin^4 \varphi' - \frac{6}{7} \sin^2 \varphi' + \frac{3}{35} \right) \\ &\quad + \frac{245}{8} \left( \sin^3 \varphi - \frac{3}{7} \sin \varphi \right) \cos \varphi \left( \sin^3 \varphi' - \frac{3}{7} \sin \varphi' \right) \cos \varphi' \cos (\lambda - \lambda') \\ &\quad + \frac{245}{16} \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{7} \right) \cos^2 \varphi \left( \sin^2 \varphi' - \frac{1}{7} \right) \cos^2 \varphi' \cos 2(\lambda - \lambda') \\ &\quad + \frac{35}{8} \sin \varphi \cos^3 \varphi \sin \varphi' \cos^3 \varphi' \cos 3(\lambda - \lambda') \\ &\quad + \frac{35}{64} \cos^4 \varphi \cos^4 \varphi' \cos 4(\lambda - \lambda'). \end{aligned}$$

Man bemerkt, daß nach Auflösung der Cosinus von  $(\lambda - \lambda')$  und seiner Vielfachen die  $P$  symmetrisch zu  $\varphi$  und  $\varphi'$ ,  $\lambda$  und  $\lambda'$  gebaut sind, was nicht anders sein kann, da  $\cos \gamma$  bereits diese Symmetrie besitzt. Eigentümlich bei dieser Symmetrie ist aber, daß jede in einen Cosinus von  $(\lambda - \lambda')$  oder seiner Vielfachen multiplizierte Funktion von  $\varphi$  und  $\varphi'$  in ein Produkt einer Funktion von  $\varphi$  allein

und einer solchen von  $\varphi'$  allein zerfällt. Dafs dies so sein muß, zeigt die Theorie ganz allgemein. Für unsere Zwecke genügt die obige Darstellung bis  $P_4$ , die leicht zu beschaffen ist.

Wir stellen hier noch die Formeln her, welche dabei zur Einführung der Vielfachen von  $(\lambda - \lambda')$  dienen. Man kann sie aus den Relationen für  $\gamma$  im Eingang des § 2 S. 52 ableiten:

$$\cos^2(\lambda - \lambda') = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\lambda - \lambda')$$

$$\cos^3(\lambda - \lambda') = \frac{3}{4} \cos(\lambda - \lambda') + \frac{1}{4} \cos 3(\lambda - \lambda')$$

$$\cos^4(\lambda - \lambda') = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} \cos 2(\lambda - \lambda') + \frac{1}{8} \cos 4(\lambda - \lambda').$$

**§ 5. Das Potential  $W$  der Schwerkraft aufserhalb.** Befindet sich ein von der Erde angezogener und mit ihr rotierender Punkt  $P'$  aufserhalb einer die ganze Erde gerade völlig einschließenden; zum Erdschwerpunkt konzentrischen Kugel, so ist nach (1) und (8) des § 1 S. 50 und 51 zu setzen das Potential

$$W = \left\{ \frac{k^2}{r'} \left[ \int dm + \frac{1}{r'} \int P_1 r dm + \frac{1}{r'^2} \int P_2 r^2 dm \right] + \frac{1}{r'^3} \int P_3 r^3 dm + \frac{1}{r'^4} \int P_4 r^4 dm + \dots \right\} + \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) \omega^2, \quad (1)$$

wobei die physische Möglichkeit des Falles gleichgültig ist.

Ohne zunächst auf die Frage einzugehen, inwieweit vorstehender Ausdruck für das Potential auf Punkte aufserhalb bis zur physischen und mathematischen Erdoberfläche Anwendung finden kann, erörtern wir vorerst die Bedeutung der drei, den Anfang der Reihe rechter Hand bildenden Integrale.

Zunächst hat man das 1. Integral

$$\int dm = M, \quad (2)$$

der Masse der ganzen Erde, wie unmittelbar ersichtlich.

Für das 2. Integral beachten wir die Relationen (1) § 2 S. 52 und (1) § 4 S. 56, wonach

$$P_1 = \cos \gamma = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}$$

zu setzen ist. Damit ergibt sich

$$\int P_1 r dm = \frac{1}{r'} \left\{ x' \int x dm + y' \int y dm + z' \int z dm \right\}.$$

Insofern wir aber den Erdschwerpunkt als Koordinatenanfang gewählt haben, sind die Integrale

$$\int x dm \quad \int y dm \quad \int z dm$$

gleich null, da sie nach der aus der Mechanik bekannten Definition des Schwerpunkts [vergl. S. 3 § 2 (4)] bzw. gleich sind

$$\xi M \quad \eta M \quad \zeta M,$$

wenn  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  die Schwerpunktskoordinaten vorstellen, welche im vorliegenden Falle gleich null gesetzt wurden. Wir haben somit

$$\int P_1 r dm = 0. \quad (3)$$

Für das 3. Integral wenden wir  $P_2$  in der S. 57 gegebenen Form an, wobei wir  $\cos(\lambda - \lambda')$  und  $\cos 2(\lambda - \lambda')$  auflösen. Es folgt alsdann:

$$\begin{aligned} \int P_2 r^2 dm &= \frac{3}{2} \left( \sin^2 \varphi' - \frac{1}{3} \right) \int \left( 1 - \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \right) r^2 dm \\ &+ 3 \sin \varphi' \cos \varphi' \left\{ \cos \lambda' \int \sin \varphi \cos \varphi \cos \lambda r^2 dm + \sin \lambda' \int \sin \varphi \cos \varphi \sin \lambda r^2 dm \right\} \\ &+ \frac{3}{4} \cos^2 \varphi' \left\{ \cos 2\lambda' \int \cos^2 \varphi \cos 2\lambda r^2 dm + \sin 2\lambda' \int \cos^2 \varphi \sin 2\lambda r^2 dm \right\}. \end{aligned}$$

In den Integralen rechter Hand führen wir wieder rechtwinkelige Koordinaten ein, um auf bekannte Ausdrücke zu kommen. Dazu dienen die Relationen (3) § 4 S. 57. Man findet ohne Schwierigkeit:

$$\begin{aligned} \int P_2 r^2 dm &= \frac{3}{2} \left( \sin^2 \varphi' - \frac{1}{3} \right) \int \left( z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right) dm \\ &+ 3 \sin \varphi' \cos \varphi' \left\{ \cos \lambda' \int xz dm + \sin \lambda' \int yz dm \right\} \\ &+ \frac{3}{4} \cos^2 \varphi' \left\{ \cos 2\lambda' \int (x^2 - y^2) dm + \sin 2\lambda' \int 2xy dm \right\}. \end{aligned}$$

Wegen des Umstandes, daß die  $z$ -Axe Rotationsaxe ist, sowie bei geeigneter Wahl der andern beiden Koordinatenachsen läßt sich die rechte Seite wesentlich vereinfachen. In der Dynamik wird nämlich gezeigt, daß es in jedem festen Körper drei zu einander rechtwinkelige Axen durch den Schwerpunkt giebt — die drei Hauptaxen des Körpers — für welche als Koordinatenachsen die Integrale

$$\int xz dm \quad \int yz dm \quad \int xy dm \quad (4)$$

verschwinden. Dieses gilt auch für die Erde, wenn wir wie bisher die in § 5 S. 7 eingeführte Annahme festhalten, daß die Teile der Erde in relativer Ruhe zu einander sind.

Mit dem Verschwinden jener Integrale hängt nun zusammen, daß eine Rotation um eine in dem Körper feste, sonst aber freie Axe dauernd nur dann stattfinden kann, wenn diese Axe eine Hauptaxe ist. Die Rotationsaxe der Erde muß also eine solche Hauptaxe sein (§ 4 S. 5). Sie ist bereits als  $z$ -Axe eingeführt. Rechtwinkelig zu ihr liegen in der Äquatorebene die beiden andern Hauptaxen, die

wir als  $x$ - und  $y$ -Axe annehmen. (Bei beliebiger Lage dieser letzteren Koordinatenachsen würde das 3. Integral (4) nicht verschwinden).

Wir führen nun noch die Hauptträgheitsmomente ein, die wir bezw. für die Axen der  $x$ ,  $y$  und  $z$  mit  $A$ ,  $B$  und  $C$  bezeichnen:

$$\begin{aligned} A &= \int (y^2 + z^2) dm, \\ B &= \int (x^2 + z^2) dm, \\ C &= \int (x^2 + y^2) dm. \end{aligned} \quad (5)$$

Hiermit wird

$$\int P_2 r^2 dm = \frac{3}{2} \left( \frac{A+B}{2} - C \right) \left( \sin^2 \varphi' - \frac{1}{3} \right) + \frac{3}{4} (B-A) \cos^2 \varphi' \cos 2\lambda'. \quad (6)$$

Der Ausdruck (1) geht jetzt über in den nachstehenden, wobei also Voraussetzung ist, daß die beiden Hauptträgheitsaxen in der Äquatorebene als Axen der  $x$  und  $y$  dienen:

$$W = \left\{ \frac{k^2}{r'} \left[ M + \frac{1}{2r'^2} \left( C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3 \sin^2 \varphi') + \frac{3}{4r'^2} (B-A) \cos^2 \varphi' \cos 2\lambda' \right] + \frac{1}{r'^3} \int P_3 r^3 dm + \frac{1}{r'^4} \int P_4 r^4 dm + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 \cos^2 \varphi' \right\} \quad (7)$$

Im letzten Gliede rechter Hand von (1) ist zugleich  $x'^2 + y'^2 = r'^2 \cos^2 \varphi'$  gesetzt, um in allen Gliedern nur die Polarkoordinaten von  $I'$ , dem angezogenen Punkte, zu haben.

Es entsteht jetzt die Frage, ob die Formel (7) auch noch gilt innerhalb der eingangs erwähnten Kugelfläche bis zur physischen und mathematischen Erdoberfläche. Zunächst wollen wir den Einfluß des Luftmeeres schätzen und beginnen zu dem Zwecke damit, das Potential für eine homogene Kugelschale abzuleiten, woran sich einige Notizen über Kugelfunktionen schließen werden.

§ 6. Das Potential der Anziehung einer homogenen Kugelschale läßt sich leicht durch direkte Integration nach der Formel

$$v = k^2 \int \frac{dm}{e} \quad (1)$$

ermitteln, wenn räumliche Polarkoordinaten eingeführt werden. Der Übergang von rechtwinkligen Koordinaten zu diesen Polarkoordinaten ist schon § 4 S. 6 angegeben. Man vergl. insbesondere Fig. 1 S. 5. Für die Anwendung auf (1) ist nun zunächst das Massenelement  $dm$  auszudrücken.

Zu dem Zwecke denke man sich mit dem Radiusvektor  $r$  des Punktes  $(r, \varphi, \lambda)$  konzentrisch zum Koordinatenanfang eine Kugel beschrieben und auf derselben den geozentrischen Breiten  $\varphi$  und  $\varphi + d\varphi$  entsprechend zwei Parallelkreise, sowie den geozentrischen Längen  $\lambda$

und  $\lambda + d\lambda$  entsprechend zwei Meridiankreise gezogen. Dann entsteht am Punkte  $(r, \varphi, \lambda)$  ein Flächenelement auf der Kugel, welches als Rechteck mit den Seiten  $r d\varphi$  und  $r \cos \varphi d\lambda$  berechnet werden darf. Wächst nunmehr  $r$  um  $dr$ , so liegt über jenem Flächenelement ein Volumenelement von der Höhe  $dr$ . Es wird also

$$dm = \Theta r^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda dr. \quad (2)$$

Bezeichnet endlich  $\gamma$  den Winkel zwischen den Radienvektoren  $r$  und  $r'$ , letzterer in Bezug auf den angezogenen Punkt  $P'$ , so kann (1) auf die nachstehende Form gebracht werden:

$$v = k^2 \iiint \frac{\Theta r^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda dr}{V r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}. \quad (3)$$

In diesem Ausdruck, welcher noch ganz allgemein gilt, ist die dreifache Integration über den anziehenden Körper zu erstrecken. Indem wir ihn auf eine homogene Kugelschale von gleichmäßiger Stärke  $dr$  beziehen, können wir unbeschadet der Allgemeinheit die  $z$ -Axe durch den angezogenen Punkt  $P'$  legen, Fig. 3, womit  $\gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi$  wird, und (3) übergeht in:

$$v = k^2 \Theta r^2 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi d\lambda}{V r^2 + r'^2 - 2rr' \sin \varphi}. \quad (4)$$

Die Integration nach  $\lambda$  läßt sich ohne weiteres ausführen und giebt als Resultat den Faktor  $2\pi$  vor dem Integralzeichen. Unter dem Integralzeichen schreiben wir für  $\cos \varphi d\varphi$  besser  $d(\sin \varphi)$  und setzen für  $\sin \varphi$  das Symbol  $t$ ; dann wird

$$v = 2\pi k^2 \Theta r^2 dr \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{V r^2 + r'^2 - 2rr't}. \quad (5)$$

Das unbestimmte Integral des unter dem Integralzeichen stehenden Differentialausdruckes ist

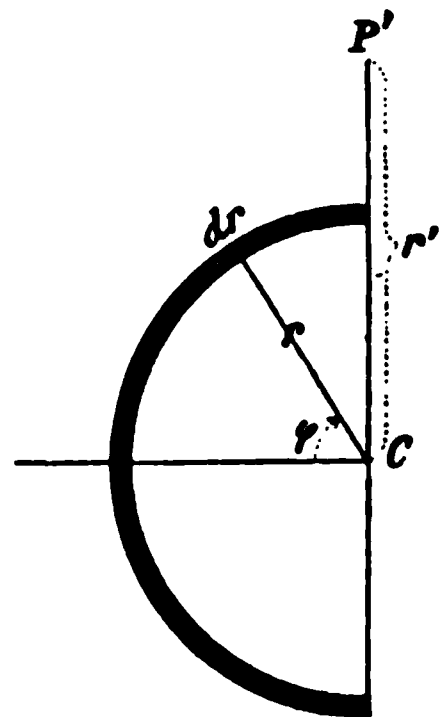
$$\frac{-V r^2 + r'^2 - 2rr't}{rr'};$$

das bestimmte Integral wird hiernach gleich

$$\frac{V(r' + r)^2 - V(r' - r)^2}{rr'}.$$

Die Quadratwurzeln sind (insofern sie die Distanz  $e$  in zwei besonderen Fällen bedeuten) positiv zu nehmen. Man muß daher unterscheiden zwischen  $r' > r$  und  $r' < r$ .

Fig. 3.



Liegt  $P'$  außerhalb der Kugelschale, ist also  $r' > r$ , so wird das bestimmte Integral gleich

$$\frac{(r' + r) - (r' - r)}{rr'} = \frac{2}{r'}$$

und das Potential

$$v = \frac{4\pi k^2 \Theta r^2 dr}{r'} = k^2 \frac{\text{Masse}}{r'}. \quad (6)$$

Liegt  $P'$  innerhalb der Kugelschale, ist also  $r' < r$ , so wird das bestimmte Integral gleich

$$\frac{(r' + r) - (r - r')}{rr'} = \frac{2}{r}$$

und das Potential

$$v = 4\pi k^2 \Theta r dr = k^2 \frac{\text{Masse}}{r}. \quad (7)$$

Für  $r = r'$  gehen beide Formeln (6) und (7) in einander über und haben wegen des stetigen Verlaufes von  $v$ , trotzdem in (4) unter dem Integralzeichen der Nenner einmal null wird, auch noch Geltung. Die Gleichungen (6) und (7) sagen aus: *Das Potential der Anziehung einer homogenen, gleichstarken Kugelschale für einen außerhalb gelegenen Punkt ist ebensogroß als das Potential ihrer im Mittelpunkt konzentrierten Masse; für einen innerhalb des Hohlraumes gelegenen Punkt ist es konstant.*

Für das Potential einer homogenen Kugel vom Radius  $R$  und der Dichtigkeit  $\Theta$  ergibt sich aus (6) und (7), wenn der Punkt  $P'$  außerhalb liegt:

$$v = k^2 \frac{\text{Masse}}{r'} = \frac{4\pi k^2 \Theta R^3}{3 r'}, \quad (8)$$

wenn derselbe innerhalb liegt:

$$v = 2\pi k^2 \Theta \left( R^2 - \frac{1}{3} r'^2 \right). \quad (8^*)$$

Die Konstanz des Potentials innerhalb des Hohlraumes einer homogenen Kugelschale läßt sich geometrisch sehr leicht nach einem bereits von *Newton* angegebenen Verfahren einsehen. \*) Liegt  $P'$  nämlich innerhalb einer Kugelfläche und ist  $A_1 B_1$  ein Linienelement derselben, so ziehe man die Linien  $A_1 P'$  und  $B_1 P'$  bis sie die Kugelfläche in  $A_2$  und  $B_2$  zum zweiten Male schneiden. Da  $A_1 B_1$  und  $A_2 B_2$  unendlich klein sind, erkennt man ohne weiteres, daß sie im Verhältnis  $A_1 P' : A_2 P'$  stehen. Dreht man  $A_1 B_1$  um den Punkt  $A_1$  um  $360^\circ$ , wobei außerdem  $A_1 B_1$  seine Länge ändern darf, so beschreibt  $A_1 B_1$  ein Oberflächenelement, welches zu dem gleichzeitig von  $A_2 B_2$  beschriebenen im Verhältnis  $\bar{A}_1 P'^2 : A_2 P'^2$  steht, wie man sofort erkennt, wenn man zunächst nur eine unendlich kleine Drehung ausführt. Die Anziehungen beider Elemente auf  $P'$  verhalten

\*) *Sir Isaac Newtons mathematische Prinzipien der Naturlehre.* Mit Bemerkungen und Erläuterungen herausgegeben von Prof. Dr. O. Ph. Wolfers. Berlin 1872; S. 191.





bei veränderter Entfernung  $P'C = r'$  sich im Ausdruck für  $dX$  nur der Nenner  $r'^2$  ändert, falls  $\gamma$  und  $\gamma + d\gamma$  unverändert (nach Newton) beibehalten werden. Damit ist also der eingangs angeführte Satz bewiesen. Übrigens hat die Integration gar keine Schwierigkeit; sie ergibt  $X$  in der bekannten Form. (Newton vervollständigt den Satz auf andre Art in § 114 a. a. O. S. 194 und 195.)

§ 7. Kugelfunktionen. Eine Eigenschaft der Koeffizienten  $P$  verdient, ehe wir unsere Betrachtungen über den Gültigkeitsbereich des Potentialausdruckes (7) § 5 S. 60 fortsetzen, an der Hand des Vorigen hervorgehoben zu werden. Wir entwickeln zu diesem Zwecke das Potential  $v$  für eine unendlich dünne, gleichstarke, homogene Kugelschale nochmals, aber unter Einführung der Reihe (8) § 1 S. 51 für  $\frac{1}{e}$  in den Ausdruck (1) § 6 S. 60. Zugleich setzen wir  $dm = \Theta r^2 dr d\sigma$ , wobei  $d\sigma$  das Oberflächenelement einer zum Koordinatenanfang konzentrischen Kugel vom Radius 1 vorstellt. Damit wird

$$v = k^2 \frac{\text{Masse}}{r'} + \left\{ \left( \frac{r}{r'} \right)^2 \int P_1 d\sigma + \left( \frac{r}{r'} \right)^3 \int P_2 d\sigma + \dots \right\} k^2 \Theta r dr. \quad (1)$$

Nach dem vorhergehenden Paragraphen reduziert sich aber die rechte Seite auf ihr erstes Glied und wir erhalten daher, da dies für jeden Betrag von  $r < r'$  der Fall ist, als Resultat den Satz: Es ist das über die Kugeloberfläche ausgedehnte Integral

$$\int P_i d\sigma = 0; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Hierbei ist zunächst Voraussetzung, daß die Lage von  $d\sigma$  durch die Variablen  $\varphi$  und  $\lambda$  angegeben, also  $d\sigma = \cos \varphi d\varphi d\lambda$  gesetzt wird.

Da  $P_i$  aber symmetrisch ist zu  $\varphi$  und  $\varphi'$ ,  $\lambda$  und  $\lambda'$ , so hat man auch, wenn  $d\sigma' = \cos \varphi' d\varphi' d\lambda'$  gesetzt wird:

$$\int P_i d\sigma' = 0; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Betrachtet man jetzt die Ausdrücke § 4 S. 57 für  $P_1, P_2$  u. s. f., und denkt sich zugleich die Cosinus von  $(\lambda - \lambda')$  und seiner Vielfachen aufgelöst, so erkennt man ohne weiteres, daß die über die Kugeloberfläche erstreckten Integrale, insoweit sie von Gliedern herühren, welche  $\lambda'$  enthalten, verschwinden. Nicht unmittelbar ersichtlich ist dies für die von  $\lambda'$  freien Glieder; es sind das immer die zuerst stehenden. Hier hilft nun Gleichung (3) aus.

Damit läßt sich weiter einsehen, daß Gleichung (3) auch noch besteht, wenn man für  $P_i$  einen allgemeineren Ausdruck setzt, der aus  $P_i$  dadurch hervorgeht, daß man in demselben die Funktionen von  $\varphi'$  und  $\lambda'$  beibehält, sie aber nicht mit gleichgebauten Funktionen von  $\varphi$  und  $\lambda$ , sondern mit beliebigen, von  $\varphi'$  und  $\lambda'$  freien Größen multipliziert. Bezeichnen wir diese Koeffizienten allgemein

mit  $p$  und  $q$  mit verschiedenen Indices und die aus den  $P_i$  hervorgehenden Funktionen mit  $K'_i$ , so ist nach S. 57 § 4 z. B.:

$$\begin{aligned}
 K'_1 &= p_{1.0} \sin \varphi' + (p_{1.1} \cos \lambda' + q_{1.1} \sin \lambda') \cos \varphi' \\
 K'_2 &= p_{2.0} \left( \sin^2 \varphi' - \frac{1}{3} \right) + (p_{2.1} \cos \lambda' + q_{2.1} \sin \lambda') \sin \varphi' \cos \varphi' \\
 &\quad + (p_{2.2} \cos 2\lambda' + q_{2.2} \sin 2\lambda') \cos^2 \varphi' \\
 K'_3 &= p_{3.0} \left( \sin^3 \varphi' - \frac{3}{5} \sin \varphi' \right) \\
 &\quad + (p_{3.1} \cos \lambda' + q_{3.1} \sin \lambda') \left( \sin^2 \varphi' - \frac{1}{5} \right) \cos \varphi' \\
 &\quad + (p_{3.2} \cos 2\lambda' + q_{3.2} \sin 2\lambda') \sin \varphi' \cos^2 \varphi' \\
 &\quad + (p_{3.3} \cos 3\lambda' + q_{3.3} \sin 3\lambda') \cos^3 \varphi' \\
 K'_4 &= p_{4.0} \left( \sin^4 \varphi' - \frac{6}{7} \sin^2 \varphi' + \frac{3}{35} \right) \\
 &\quad + (p_{4.1} \cos \lambda' + q_{4.1} \sin \lambda') \left( \sin^3 \varphi' - \frac{3}{7} \sin \varphi' \right) \cos \varphi' \\
 &\quad + (p_{4.2} \cos 2\lambda' + q_{4.2} \sin 2\lambda') \left( \sin^2 \varphi' - \frac{1}{7} \right) \cos^2 \varphi' \\
 &\quad + (p_{4.3} \cos 3\lambda' + q_{4.3} \sin 3\lambda') \sin \varphi' \cos^3 \varphi' \\
 &\quad + (p_{4.4} \cos 4\lambda' + q_{4.4} \sin 4\lambda') \cos^4 \varphi'.
 \end{aligned}$$

Eine solche Funktion  $K'$  heißt *Kugelfunktion* und zwar je nach dem Index 1, 2, 3 . . . *ersten, zweiten, dritten Ranges*. Als Kugelfunktion nullten Ranges kann man ihnen hinzufügen  $K'_0 = \text{Konstante}$ .

Die Kugelfunktionen haben dadurch eine hohe Bedeutung erlangt, daß man jede beliebige (sogar auch nicht analytische) Funktion zweier Variablen, welche wie Breite und Länge auf der Kugelfläche variieren, nach Kugelfunktionen entwickeln kann und zwar nur auf *eine* Art. Man weiß also z. B. vor jeder speziellen Untersuchung, daß die Beschleunigung  $g$  im Niveau der Meeresfläche sich in der Form

$$g = K'_0 + K'_1 + K'_2 + K'_3 + K'_4 + \dots$$

muß darstellen lassen, wobei in obigen Ausdrücken der  $K'$  gesetzt werden dürfen an Stelle von  $\varphi'$  und  $\lambda'$  auch die geographische Breite  $B'$  und Länge  $L'$ , während die  $p$  und  $q$  zu bestimmende Konstanten bezeichnen.

Setzt man in (7) § 5 S. 60 für  $\cos^2 \varphi'$  das Aggregat  $\frac{2}{3} + \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right)$ , so bemerkt man sofort, daß auch  $W$  eine Entwicklung nach Kugelfunktionen ist. Die Koeffizienten derselben sind Funktionen von  $r'$  und der Massenanzordnung. Trennen wir  $r'$  von den Koeffizienten ab, verstehen also unter  $K'_3, K'_4 \dots$  Ausdrücke wie oben die  $K'$ , worin nun die  $p$  und  $q$  nur noch von der Massenanzordnung abhängen, und behalten wir für die Kugelfunktionen 1. und 2. Ranges die entwickelteren Ausdrücke bei, wie sie in (7) auftreten, so wird

$$W = \frac{Mk^2}{r'} \left\{ \begin{aligned} & \left\{ 1 + \frac{1}{3} \frac{\omega^2 r'^3}{Mk^2} \right\} \\ & - \left\{ \frac{3}{2} \left( C - \frac{A+B}{2} \right) + \frac{\omega^2 r'^3}{2 Mk^2} \right\} \left( \sin^2 \varphi' - \frac{1}{3} \right) \\ & + \frac{3(B-A)}{4 Mk'^2} \cos^2 \varphi' \cos 2\lambda' \\ & + \frac{K'_3}{r'^3} + \frac{K'_1}{r'^1} + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Die 1. Zeile der grossen Parenthese ist in Bezug auf  $\varphi'$  und  $\lambda'$  konstant, sie entspricht also der Kugelfunktion nullten Ranges; die 2. und 3. Zeile sind Kugelfunktionen 2. Ranges. Es fehlt mithin die Kugelfunktion 1. Ranges; ebenso fehlen auch einige Glieder im Vergleich zu dem allgemeinen Ausdruck von  $K'_2$ : eine Folge der Wahl des Koordinatensystems.

Die nach dem oben Entwickelten stattfindende Gleichung

$$\int K'_i d\sigma' = 0; \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (5)$$

stellt eine interessante Eigenschaft der Kugelfunktionen dar, von der wir sogleich auf  $W$  eine Anwendung machen.

Betrachtet man nämlich das Potential  $W$  für alle Punkte  $P'$  einer Kugelfläche, so findet sich, daß das konstante Glied der Entwicklung (4):

$$\frac{Mk^2}{r'} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \frac{\omega^2 r'^3}{Mk^2} \right\}, \quad (6)$$

der Mittelwert aller  $W$  für diese Fläche ist. Um zu diesem Wert zu gelangen, hat man den Quotienten

$$\int W r'^2 d\sigma' : \int r'^2 d\sigma'$$

zu bilden, indem man die Anzahl der  $W$  für ein Oberflächenelement  $r'^2 d\sigma'$  diesem proportional setzt. Da  $r'^2$  konstant ist, fallen alle Integrale im Zähler, welche sich auf Kugelfunktionen beliebigen Ranges  $> 0$  beziehen, nach Gleichung (5) weg, und es bleibt in der That nur dasjenige übrig, welches sich aus dem konstanten Anfangsglied der grossen Parenthese in (4) ergibt.

Ebenso ist in der oben aufgestellten Entwicklung von  $\gamma$  das Anfangsglied  $K'_0$  der Mittelwert aller Werte  $\gamma$  für alle Punkte  $(\varphi', \lambda')$  oder  $(B', L')$ , wenn man sich diese auf einer Kugelfläche ausgebreitet denkt.

Im einzelnen schwanken  $W$  und  $\gamma$  um ihre Mittelwerte herum nach Maßgabe der von den Kugelfunktionen gegebenen Änderungen. Diese sind mit der Lage von  $P'$  periodisch veränderlich und zwar ist die Periode um so kleiner, je höher der Rang der Kugelfunktionen ist.

Wegen der Konvergenz der Reihen müssen im allgemeinen die Koeffizienten (Amplituden) der Kugelfunktionen höheren Ranges kleiner sein als diejenigen der Kugelfunktionen niederen Ranges.

Einen Beweis des Satzes von der Entwickelbarkeit beliebiger Funktionen nach Kugelfunktionen gab *Dirichlet* 1837 in *Crelles Journal für reine und angewandte Math.* Bd. 17 S. 35—56; derselbe ist auch abgedruckt in seinen *Vorlesungen* S. 165—176. Über andere Beweise vergl. *Heyne, Theorie der Kugelfunktionen*, 2. Auflage, Berlin 1878, S. 432—441 und *H. Bruns* in *Borchardts Journal für reine und angewandte Math.* 1881, Bd. 90 S. 322—328.

Auf diese schwierigen, rein mathematischen Darstellungen können wir hier nicht eingehen. Um aber die Möglichkeit der Existenz des Satzes zu erkennen, reproduzieren wir eine Darstellung von *Dirichlet, Vorlesungen* S. 73 u. ff. (auch bei *Riemann*, auf S. 350 und 351 in *Schwere, Elektrizität und Magnetismus*, bearbeitet v. *Hattendorff*), welche zwar nicht durchaus einwurfsfrei ist, aber auch von *Dirichlet* benutzt wurde, um auf den Satz hinzuweisen.

Wir denken uns demgemäß auf einer Kugeloberfläche vom Radius  $r$  Masse ausgebreitet, so daß im Punkte mit der Breite  $\varphi$  und Länge  $\lambda$  die Dichtigkeit  $\vartheta$ , d. i. die Masse für die Flächeneinheit, der gegebenen Funktion  $f(\varphi, \lambda)$  gleich ist. Dann hat man das Potential der Anziehung auf einen außerhalb gelegenen Punkt  $(r', \varphi', \lambda')$  nach Gleichung (8) § 1 S. 51 gleich:

$$v = k^2 r \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{r'} \right)^{n+1} \cdot \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n f(\varphi, \lambda) \cos \varphi d\varphi,$$

wobei zu beachten ist, daß das Flächenelement auf der Kugel die Form  $r^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi$  annimmt und  $P_0$  gleich 1 wird.

Für einen Punkt  $(r', \varphi', \lambda')$  innerhalb ergibt sich dagegen nach (10) § 1 S. 52:

$$v = k^2 r' \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^n \cdot \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n f(\varphi, \lambda) \cos \varphi d\varphi.$$

Nun läßt sich zeigen, daß der 1. Differentialquotient von  $v$  nach  $r'$ , wenn der angezogene Punkt von außen nach innen durch die Fläche hindurchgeht, den Sprung  $-4\pi k^2 \vartheta$  macht, was wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$\left( \frac{\partial v}{\partial r'} \right)_{r'=r+0} - \left( \frac{\partial v}{\partial r'} \right)_{r'=r-0} = -4\pi k^2 \vartheta.$$

Der Beweis wird ganz ebenso wie für den Satz (4) § 19 S. 30 geführt. Dies zeigt ein Blick auf die Formeln (7) § 16 S. 24 und den Anfang des § 18 S. 26.

Setzt man in die letzte Gleichung linker Hand im 1. Glied den ersten Wert von  $v$ , im 2. Glied den zweiten, und nimmt nach geschehener Differentiation  $r' = r$ , so folgt  $\vartheta$ , d. i. die Dichtigkeit im Punkte  $(\varphi', \lambda')$  der Kugeloberfläche, gleich

$$f(\varphi', \lambda') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n f(\varphi, \lambda) \cos \varphi d\varphi. \quad (7)$$

Die einzelnen Glieder rechter Hand sind aber für  $n = 0, 1, 2 \dots$  wegen  $P_0 = 1$  und mit Rücksicht auf die, Seite 57 angegebenen Werte von  $P_1, P_2$  u. s. f. genau von der Form der oben eingeführten Funktionen  $K'$ . Wir haben also  $f(\varphi', \lambda')$  nach Kugelfunktionen entwickelt und zugleich eine neue Darstellung derselben gewonnen.

Bedenken erregt bei vorstehender Herleitung die Anwendung der beiden Entwicklungen von  $v$  auf den Fall  $r' = r$ , wofür sie als gültig nicht bewiesen sind. Die rein mathematischen Beweise befreien außer hiervon auch von der Beschränkung, daß die überall endliche Funktion  $f(\varphi, \lambda)$  allenthalben stetig verläuft.

Die wichtigsten Sätze, die bei der Entwicklung nach Kugelfunktionen in betracht kommen, sind in § 28 dieses Kapitels zusammengestellt.

**§ 8. Der Einfluß des Luftmeeres auf das Potential  $W$  der Schwerkraft.** Nach Gesetzen der Hydrostatik ist im Zustande der relativen Ruhe jede das Luftmeer durchschneidende Niveaulfläche zugleich eine Fläche gleichen Druckes und gleicher Dichtigkeit; letztere nimmt nach außen hin ab. Nehmen wir die Niveaulflächen als Kugelflächen und sehen davon ab, daß die Unregelmäßigkeiten der physischen Erdoberfläche den Verlauf der Luftschichten unterbrechen, so läßt sich der Einfluß der Luft auf  $W$  in aller Strenge angeben: die Luft außerhalb der durch den angezogenen Punkt  $P'$  führenden Niveaulfläche zieht gar nicht an; die Luft innerhalb zieht so an, als ob ihre Masse im Mittelpunkt vereinigt wäre.

Die Masse der Luft von der äußeren Grenze des Luftmeeres bis zur Niveaulfläche mit dem Barometerstand  $b'''$  ist näherungsweise gleich

$$4\pi R^2 \cdot 13,6 \cdot b, \quad (1)$$

wenn als Masseneinheit 1 Kubikmeter Wasser angenommen wird. Zu diesem Werte gelangt man, wenn man den Radius aller Niveaulflächen im Luftmeer konstant gleich  $R$ , dem mittlern Radius der physischen Erdoberfläche setzt und beachtet, daß 13,6 das spezifische Gewicht des Quecksilbers ist. Ferner ist die Masse der Luft von der Niveaulfläche mit dem Barometerstand  $b'''$  bis zur physischen Erdoberfläche d. h. bis zur Meeresfläche, da von den Unregelmäßigkeiten jener abgesehen werden soll, gleich

$$4\pi R^2 \cdot 13,6 (0,76 - b), \quad (2)$$

da  $b$  im Meeresniveau nahezu 0,76<sup>m</sup> beträgt.

Die Masse der Erde innerhalb der physischen Erdoberfläche ist aber sehr nahe gleich

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \cdot 5,6; \quad (3)$$

demnach ist die gesamte Luftmasse im Verhältniß zu dieser Erdmasse gleich dem kleinen Bruche

$$\frac{3 \cdot 13,6 \cdot 0,76}{5,6 R} \text{ d. i. rund } \frac{1}{1000000}. \quad (4)$$

Dagegen ist z. B. die Luftmasse zwischen den Niveauflächen mit  $b = 0,76^m$  und  $0,50^m$ , ungefähr den Meereshöhen null und  $3500^m$  entsprechend, mit Rücksicht auf (2) nur  $\frac{1}{3000000}$  der Erdmasse.

Nur diese Luftmasse aber wird nach dem eingangs Gesagten auf Punkte zwischen null und  $3500^m$  Meereshöhe verschieden wirken; für die Höhe null wirkt sie gar nicht, für  $3500^m$  Höhe wirkt sie, als wäre sie im Erdschwerpunkt vereinigt. Jedoch ist die Differenz dieser Wirkungen eben nur  $\frac{1}{3000000}$  der Schwerkraft.

Diese Betrachtungen dürften zur Genüge zeigen, daß man bei der theoretischen Behandlung der Schwerkraft auf der physischen Erdoberfläche von der Wirkung der Luft absehen kann, da dieselbe wenigstens innerhalb der oben durchgeführten Annäherung so klein ist, daß sie durch Fehler in der Beobachtung der Schwerkraft ganz und gar verdeckt wird. Es kommt hinzu, daß in allen Fällen größerer Meereshöhe, wo die Anziehung der Luft überhaupt erst zu erwägen ist, bei der Reduktion der beobachteten Schwerkraft auf das Meeresniveau Ungenauigkeiten eintreten, die die Beobachtungsfehler weit übersteigen.

Nun sind allerdings unsere Betrachtungen insofern unrichtig, als sie die Luftschichten gleicher Dichtigkeit als konzentrische Kugelflächen voraussetzen und davon absehen, daß die Erhebungen der physischen Erdoberfläche über das Meeresniveau die Luftschichten unterbrechen. Da jedoch die Kugelform jedenfalls eine Annäherung ist, so wird auch die oben ermittelte GröÙe des Unterschieds der Wirkungen einer Luftschicht zwischen zwei Flächen verschiedenen Barometerstandes auf einen Punkt auÙerhalb und innerhalb einen Näherungswert des thatsächlichen Wirkungsunterschiedes vorstellen — dies bedarf wohl keines Beweises (geht übrigens aus den Newtonischen Betrachtungen über die Anziehung von Kugelschalen, Anm. S. 62, unschwer hervor). Was ferner den Einfluß der Unterbrechungen der Luftschichten durch das Terrain anlangt, so ist leicht ersichtlich, daß derselbe für Punkte der physischen Erdoberfläche nur eine Verminderung der oben berechneten Wirkungen erzeugt, weil auf hochgelegenen Terrainpunkten die anziehende Wirkung der vom Terrain verdrängten benachbarten Luftmassen fehlt (und diese nach Anm. S. 63 etwa halbsogroß ist wie die Gesamtanziehung der betreffenden Schichten). Außerdem kombiniert sich dieser Einfluß mit der Anziehung des Terrains selbst, welche wegen der Unsicherheit der Dichtigkeits-



bestimmung nicht so genau angegeben werden kann, daß dagegen die Anziehung der verdrängten Luftmassen eine Bedeutung gewinnt.

§ 9. Erweiterung des Gültigkeitsbereichs der Reihenentwicklung für  $W$ . Indem wir nach dem Vorhergehenden keine weitere Rücksicht auf das Luftmeer nehmen, erstreckt sich der Gültigkeitsbereich des Ausdrucks (7) § 5 S. 60 für das Potential  $W$  der Schwerkraft von außen her bis zu einer zum Erdschwerpunkt konzentrischen Kugelfläche, welche die physische Erdoberfläche gerade noch völlig umschließt. Wenden wir den Ausdruck auf einen Punkt  $P'$  innerhalb dieser Kugelfläche an, so verliert er in Strenge seine Brauchbarkeit, auch wenn dieser Punkt noch außerhalb der physischen Erdoberfläche liegt, wie wir zunächst voraussetzen wollen. Dies folgt ohne weiteres aus der Betrachtung des Anteils eines Elementes  $dm$  der Masse der Erde am Potential  $W$ , wenn für dieses Element  $r > r'$  ist; solche Elemente werden aber existieren, sobald der Punkt  $P'$  innerhalb der umschließenden Kugel liegt. Denn während Ausdruck (7) § 5 für  $\frac{1}{e}$  die Formel (8) S. 51 voraussetzt, d. i.

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'} \left\{ 1 + \frac{r}{r'} P_1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 P_2 + \dots \right\}, \quad (1)$$

muß eigentlich für jedes Teilchen, dessen  $r > r'$  ist, angewandt werden:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{r'}{r} P_1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_2 + \dots \right\}. \quad (2)$$

Die erste Reihe divergiert sogar für  $r > r'$ , weil dann  $r : r' > 1$  ist und somit die Faktoren der Koeffizienten  $P$  ins Unendliche wachsen. Für einzelne Fälle kann man sich von der Divergenz leicht überzeugen, z. B. für  $\cos \gamma = -1$  (der Fall  $+1$  kommt nicht vor) und für  $\cos \gamma = \text{null}$ ; (sie ergibt sich aber auch allgemein aus dem Umstand, daß mit Rücksicht auf die Anmerkung zu § 2 S. 53 bei unendlich anwachsendem Index  $n$  des Koeffizienten  $P_n$  nach Formel (4) daselbst dieser Koeffizient mit  $\sqrt{1:n}$  abnimmt, also weit langsamer abnimmt, als sein Faktor  $(r : r')^n$  zunimmt, wie wenig auch  $r : r'$  die Einheit überschreiten mag).

Trotz dieser Divergenz für einzelne Massenteile kann aber doch bei der Integration über einen Körper, abgesehen vom wirklichen Erdkörper, ein konvergentes Resultat entstehen, welches nun das Potential bis zur Oberfläche darstellt. Dies läßt sich z. B. für ein homogenes Rotationsellipsoid nachweisen (vergl. § 29 dieses Kapitels). Hiernach würde also Ausdruck (7) § 5 bis zur physischen Erdoberfläche gelten, falls die Masse zwischen dieser und einer ihr eingeschriebenen Kugelfläche als zu einem oder mehreren, zum Erdschwerpunkt konzentrischen und zur Rotationsaxe coaxialen, homogenen Rotationsellipsoiden gehörig betrachtet werden könnte. Ohne

weiter an einer solchen Annahme festzuhalten, ersehen wir doch soviel, daß der betrachtete Ausdruck nur dann bis zur physischen Erdoberfläche Anwendung finden kann, wenn wir davon abssehen, durch ihn das Potential streng darzustellen und uns vielmehr begnügen, ihn auf eine gewisse, nicht ohne weiteres angebbare, jedenfalls aber die Unregelmäßigkeiten der Massenlagerung in der Nähe der physischen Erdoberfläche irgendwie ausgleichende, ideelle Massenlagerung zu beziehen — wobei wir zu der Nähe der physischen Erdoberfläche mindestens den ganzen Raum zwischen ihr und einer berührend eingeschriebenen, zum Erdschwerpunkt konzentrischen Kugelfläche zu rechnen haben. Da wir jedoch demnächst die Gültigkeit des betrachteten Potentialausdruckes sogar bis zur mathematischen Erdoberfläche annehmen werden, wollen wir uns sogleich die letztgenannte Kugelfläche der mathematischen Erdoberfläche eingeschrieben denken.

Welcher Fehler im Potential durch eine gewisse, zweckmäßige Art der Idealisierung der Massenlagerung entsteht, wird im nächsten Kapitel eingehend untersucht werden. Wir können hier im voraus erwähnen, daß diese Idealisierung lediglich eine Reduktion der auf der physischen Erdoberfläche beobachteten Schwerkraft erfordert, während die Flächen bestimmten Potentialwertes nur unerheblich durch dieselbe verändert werden. Die Formel für die Schwerebeschleunigung im Meeresniveau unter der geographischen Breite  $B$ :

$$g = 9,7806'' (1 + 0,0052 \sin^2 B), \quad (3)$$

welche den Beobachtungen nach bisher angestellten Interpolationsrechnungen bis auf lokale und kontinentale Abweichungen von einem im Vergleiche zur Breitenvariation mäßigen Betrage genügt, kann als auf die Massenidealisierung passend angesehen werden, doch werden wir im 3. Kap. die Konstanten der Formel etwas modifizieren, sowie es der eingeführten Idealisierung am besten entspricht.

In diesem Kapitel werden wir nunmehr die Zulässigkeit der Entwicklung (7) § 5 S. 60 bis zur mathematischen Erdoberfläche einfach voraussetzen. Unsere Aufgabe ist es jetzt, die Konstanten dieser Entwicklung aus der Formel (3) oder einer ähnlichen, den Schwerebeobachtungen entsprechenden, herzuleiten. Da der Ausdruck für  $g$  kein ganz strenger ist, so vereinfachen wir das Verfahren dahin, von der Entwicklung (7) § 5 versuchsweise nur die ersten Glieder anzusetzen, also eine starke Konvergenz dieser Entwicklung, entsprechend der starken Konvergenz der Reihe für  $g$ , anzunehmen.

Die vereinfachten Ausdrücke für  $W$  bezeichnen wir mit  $U$ . Bei der Ausführung der Rechnung ist von Wichtigkeit, daß wir auf grund von astronomischen Messungen wissen, daß die physische und die mathematische Erdoberfläche im wesentlichen Kugelform haben

und zwar konzentrisch zum Erdschwerpunkt (vergl. das 6. Kap. § 1). Hiernach entspricht in der Nähe der physischen Erdoberfläche einem konstanten  $r'$  ein nahezu konstanter Wert von  $W$  und also auch von  $U$ ; es muß daher das 1. Glied  $\frac{Mk^2}{r'}$  in dem Potentialausdruck (7) § 5 beträchtlich über die anderen, welche alle wesentlich periodisch sind, dominieren. Erst hierdurch wird es überhaupt möglich, aus  $U$  einen Ausdruck für  $g$  herzustellen, wie man sich leicht durch einen Versuch, ohne diese Kenntnis zu rechnen, überzeugt.

§ 10. Erste Annäherung für das Potential  $W$  (außerhalb). Wir setzen versuchsweise

$$U = \frac{Mk^2}{r} \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{K}{2r^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) \\ &+ \frac{3(B-A)}{4Mr^2} \cos^2 \varphi \cos 2\lambda \\ &+ \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2} \cos^2 \varphi \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

Hierin sind die Koordinaten des angezogenen Punktes mit  $r$ ,  $\varphi$  und  $\lambda$  bezeichnet. Ferner ist gesetzt

$$K = \frac{C - \frac{A+B}{2}}{M}. \quad (2)$$

$M$ ,  $A$ ,  $B$  und  $C$  bedeuten die Masse bzw. die Hauptträgheitsmomente für die ideelle Massenverteilung.  $A$ ,  $B$  und  $C$  sind also nicht mehr in Strenge Trägheitsmomente der Erde, aber doch sehr nahe. Es wird später zu untersuchen sein, inwieweit die ideelle Massenverteilung die Trägheitsmomente ändert und etwa auch den Schwerpunkt verschiebt.

Nennen wir die Flächen konstanten Wertes  $U$  *Niveausphäroide*, so zeigt die Formel, daß die Niveausphäroide  $U$  zu ihren Äquatorebenen symmetrisch sind, weil nur  $\sin^2 \varphi$  und  $\cos^2 \varphi$  vorkommen.

Um nun aus  $U$  einen Ausdruck für die Beschleunigung  $g$  der Schwerkraft abzuleiten, sowie die Richtung derselben anzugeben, denken wir uns den angezogenen Punkt der Reihe nach in drei zu einander normalen Richtungen verschoben.

Zunächst in Richtung von  $r$ , also bei konstantem  $\varphi$  und  $\lambda$ , um  $\partial r$ ; alsdann bei konstantem  $r$  und  $\lambda$  auf einem Kreise durch die  $z$ -Axe, also einem Meridiankreise der geozentrischen Kugel vom Radius  $r$ , um  $r \partial \varphi$ ; endlich bei konstantem  $r$  und  $\varphi$  auf einem Kreise, dessen Ebene normal zur  $z$ -Axe steht, einem Parallelkreise, um  $r \cos \varphi \partial \lambda$ . Nach S. 9 § 6 sind die Ausdrücke

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\partial U}{\partial r}, \\ U_2 &= \frac{\partial U}{r \partial \varphi}, \\ U_3 &= \frac{\partial U}{r \cos \varphi \partial \lambda} \end{aligned} \quad (3)$$

die Komponenten von  $g$ , welche in die Richtung der Verschiebungen  $\partial r$ ,  $r \partial \varphi$  und  $r \cos \varphi \partial \lambda$  fallen. Da diese Richtungen normal aufeinanderstehen, haben wir

$$g^2 = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2. \quad (4)$$

Ein Blick auf (1) zeigt, daß  $U_2$  und  $U_3$  klein gegen  $U_1$  sind, wenn die Parenthese rechter Hand daselbst nahezu den Wert eins hat, wie wir nach den Bemerkungen am Schlusse des vorigen Paragraphen für die Nähe der physischen Erdoberfläche annehmen müssen. Es wird demnach aus der Gleichung

$$g^2 = U_1^2 \left( 1 + \frac{U_2^2 + U_3^2}{U_1^2} \right)$$

mit Rücksicht darauf, daß  $g$  positiv gerechnet wird,  $U_1$  sich aber negativ ergibt, erhalten:

$$g = -U_1 \left( 1 + \frac{U_2^2 + U_3^2}{2U_1^2} + \dots \right). \quad (5)$$

Vernachlässigen wir Größen der Ordnung des Quadrates der zur Einheit in Formel (1) rechter Hand tretenden Glieder d. h., wie wir demnächst sehen werden, Größen der Ordnung des Quadrates der Abplattung der Niveausphäroide, also Größen 4. Ordnung, so folgt weiter:

$$g = -U_1 + \dots = -\frac{\partial U}{\partial r} + \dots \quad (6)$$

Dies führt zu der Formel:

$$g = -\frac{Mk^2}{r^2} \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{3K}{2r^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) \\ &+ \frac{9(B-A)}{4Mr^2} \cos^2 \varphi \cos 2\lambda \\ &- \frac{\omega^2 r^4}{Mk^2} \cos^2 \varphi + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

Da wir nun  $g$  für ein bestimmtes Niveausphäroid, dessen  $U$  gleich einer Konstanten  $W_0$  ist, haben wollen, so ist in (7)  $r$  durch  $W_0$  auszu-drücken. Nach (1) ist aber

$$r = \frac{Mk^2}{W_0} \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{K}{2r^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) \\ &+ \frac{3(B-A)}{4Mr^2} \cos^2 \varphi \cos 2\lambda \\ &+ \frac{\omega^2 r^4}{2Mk^2} \cos^2 \varphi \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Wird dieser Wert von  $r$  in (7) substituiert, so gelangt man mit gleichen Vernachlässigungen wie bisher zu der Formel:

$$g = \frac{W_0^2}{Mk^2} \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{K}{2r^2} (1 - 3\sin^2 \varphi) \\ &+ \frac{3(B-A)}{4Mr^2} \cos^2 \varphi \cos 2\lambda \\ &- \frac{2\omega^2 r^3}{Mk^2} \cos^2 \varphi + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

Die Genauigkeit ändert sich hierin nicht, wenn für  $r$  in der Parenthese irgend ein, dem betreffenden Niveausphäroid angehöriger Wert des Radiusvektors substituiert wird. Außerdem können wir zufolge einer leicht ersichtlichen Transformation setzen:

$$g = \frac{W_0^2}{Mk^2} \left( 1 + \frac{K}{2r^2} - \frac{2\omega^2 r^3}{Mk^2} + \dots \right) \left\{ \begin{aligned} &1 + \left( \frac{2\omega^2 r^3}{Mk^2} - \frac{3K}{2r^2} \right) \sin^2 \varphi \\ &+ \frac{3(B-A)}{4Mr^2} \cos^2 \varphi \cos 2\lambda + \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

und hierin endlich  $B$ , die geographische Breite, mit der geozentrischen Breite  $\varphi$  vertauschen. Denn man erkennt ohne weiteres, daß die Richtung der Resultante  $g$  von derjenigen der großen Komponente  $U_1$  nur um eine GröÙe der Ordnung  $\sqrt{U_2^2 + U_3^2} : U_1$  abweicht und daß die Unterschiede von  $\varphi$  und  $B$ , sowie von  $\sin^2 \varphi$  und  $\sin^2 B$  die gleiche Ordnung besitzen.

Vergleichen wir die Formel (10), in welcher also  $B$  für  $\varphi$  gesetzt zu denken ist, (wonach aber beachtet werden muß, daß in der Differenz  $(B - A)$  der Buchstabe  $B$  *nicht* die Bedeutung der geographischen Breite hat), mit dem Ergebnis der auf das Meeresniveau reduzierten Schwerebeobachtungen

$$g = 9,7806^m (1 + 0,0052 \sin^2 B), \quad (11)$$

so zeigt sich, daß der Ausdruck  $U$  in der That ausreicht, um dieses Ergebnis bis auf kleine, der Ordnung der lokalen und kontinentalen Abweichungen in  $g$  völlig entsprechende GröÙen darzustellen. Es erübrigt nur, die in  $U$  auftretenden Konstanten durch diejenigen von (11) darzustellen.

Als erstes Resultat erweist sich die Relation  $(B - A) = \text{null}$ , oder

$$A = B.$$

Hiernach sind die Trägheitsmomente für die  $x$ - und  $y$ -Axe, d. h. für die beiden Äquatoraxen, einander gleich. Für die Erde hat diese Gleichung allerdings nur die Bedeutung einer Näherungsrelation, da die Formel (11) keine ganz strenge ist und nach früheren Bemerkungen  $A$  und  $B$  nicht vollständig den Trägheitsmomenten für die beiden in der Äquatorebene liegenden Hauptaxen zu entsprechen brauchen. Jedenfalls sind aber *die beiden Trägheitsmomente der Erde für die beiden Äquator-*

*Hauptaxen in erster Annäherung einander gleich. (Damit sind nach den Lehren der Mechanik überhaupt die Trägheitsmomente für beliebige Äquatoraxen in erster Annäherung einander gleich.)*

Wird in (1) die Differenz  $(B - A)$  gleich null gesetzt, so verschwindet die geozentrische Länge  $\lambda$  aus dem Ausdruck für  $U$ , d. h. *die Niveausphäroide, somit auch die Niveauflächen selbst, sind in erster Annäherung zur Äquatorebene symmetrische Rotationsflächen mit der Erdaxe als Drehaxe.*

§ 11. Fortsetzung: Theorem von Clairaut. Wir können jetzt als erste Annäherung für das Potential  $W$  (außerhalb) setzen:

$$U = \frac{Mk^2}{r} \left\{ 1 + \frac{K}{2r^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2} \cos^2 \varphi \right\}. \quad (1)$$

Hieraus folgt, wenn in der Klammer für  $r$  der Äquatorialhalbmesser  $a$  eines Niveausphäroids  $U = W_0$  gesetzt wird:

$$r = \frac{Mk^2}{W_0} \left\{ 1 + \frac{K}{2a^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{\omega^2 a^3}{2Mk^2} \cos^2 \varphi + \dots \right\}, \quad (2)$$

oder

$$r = \frac{Mk^2}{W_0} \left( 1 + \frac{K}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2Mk^2} + \dots \right) \left\{ 1 - \left( \frac{3K}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2Mk^2} \right) \sin^2 \varphi + \dots \right\}; \quad (2^*)$$

ferner ergibt sich mittelst (7) und (10) des vorigen Paragraphen:

$$g = \frac{Mk^2}{r^2} \left\{ 1 + \frac{3K}{2r^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) - \frac{\omega^2 r^3}{Mk^2} \cos^2 \varphi + \dots \right\} \quad (3)$$

und

$$g = \frac{W_0^2}{Mk^2} \left( 1 + \frac{K}{2a^2} - \frac{2\omega^2 a^3}{Mk^2} + \dots \right) \left\{ 1 + \left( \frac{2\omega^2 a^3}{Mk^2} - \frac{3K}{2a^2} \right) \sin^2 \varphi + \dots \right\}. \quad (4)$$

Die erstere Formel giebt  $g$  allgemein im Punkte  $(r, \varphi)$ , die letztere im Punkte  $\varphi$  eines Niveausphäroids  $U = W_0$ . In den Parenthesen von (3) und (4) sind, ebenso wie in (2) und  $(2^*)$ , Glieder von der Ordnung des Quadrates der Größen  $\omega^2 a^3 : Mk^2$  und  $K : a^2$  vernachlässigt, d. h. Größen der vierten Ordnung, wenn jenen die zweite Ordnung zugeschrieben wird.

Es sei nun für ein Niveausphäroid  $U = W_0$  durch Beobachtungen gegeben:

$$g = g_a (1 + \mathfrak{h} \sin^2 B), \quad (5)$$

so ist, wenn dem Koeffizienten  $\mathfrak{h}$  die zweite Ordnung beigelegt und von Gliedern vierter Ordnung in der Parenthese abgesehen wird:

$$g = g_a (1 + \mathfrak{h} \sin^2 \varphi + \dots). \quad (5^*)$$

Schreiben wir außerdem für den Radiusvektor  $r$ , ebenfalls abgesehen von Gliedern vierter Ordnung:

$$r = a(1 - \mathfrak{a} \sin^2 \varphi + \dots), \quad (6)$$

so zeigt die Vergleichung mit (4) bzw.  $(2^*)$ , daß

$$b = \frac{2\omega^2 a^3}{Mk^2} - \frac{3K}{2a^2} + \dots, \quad (7)$$

$$a = \frac{\omega^2 a^3}{2Mk^2} + \frac{3K}{2a^2} + \dots. \quad (8)$$

Die Vergleichung von (5\*) und (3) zeigt außerdem, daß bis auf Glieder zweiter Ordnung in der Parenthese

$$g_a = \frac{Mk^2}{a^2} (1 + \dots). \quad (9)$$

Mit Benutzung dessen erhalten wir aus (7) zur *Bestimmung von K* die bis auf Glieder vierter Ordnung genaue Relation:

$$\frac{3K}{2a^2} = 2\epsilon - b + \dots \quad (10)$$

und zur *Bestimmung von a* aus (7) + (8) die ebenso genaue Relation:

$$a + b = \frac{5}{2}\epsilon + \dots, \quad (11)$$

wobei der GröÙe  $\epsilon$  die nachstehende Bedeutung beigelegt ist:

$$\epsilon = \frac{\omega^2 a}{g_a}. \quad (12)$$

Bedenkt man, daß  $\omega^2 a$  die Zentrifugalbeschleunigung am Äquator des Niveausphäroids vorstellt und daß deren Verhältnis zur Schwerebeschleunigung  $g_a$  daselbst, wie wir weiterhin ausführlich berechnen werden, für die Meeresfläche nahe gleich  $1/289$  ist, berücksichtigt man ferner den der Meeresfläche entsprechenden Wert von  $b$  gleich 0,0052, so sind nach (10) und (11)  $K : a^2$  und  $a$  in der That für alle Niveausphäroide (außerhalb) *in der Nähe* der physischen Erdoberfläche Größen zweiter Ordnung und es ist damit die angegebene Größenordnung der vernachlässigten Glieder in den Formeln dieses Paragraphen bestätigt.

Die GröÙe  $a$  ist nun bis auf Glieder vierter Ordnung zufolge (6) die Abplattung des Niveausphäroids  $U = W_0$ ; die Formel (11) giebt daher ein Mittel zur Berechnung der Abplattung des der Meeresfläche zugehörigen Niveausphäroids und also auch in erster Annäherung der Abplattung der Meeresfläche selbst aus der den Schwerebeobachtungen im Meeresniveau entsprechenden Formel. In Worten hat man zufolge dieser Formel:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Die Abplattung} \\ \text{der Meeresfläche} \end{array} \right\} + \frac{\text{Zunahme der Schwerkraft vom Äquator bis zum Pol}}{\text{Schwerkraft am Äquator}} = \frac{5}{2} \frac{\text{Zentrifugalkraft am Äquator}}{\text{Schwerkraft am Äquator}}.$$

Dieser (keineswegs ganz strenge) Satz wird nach seinem Entdecker *das Theorem von Clairaut* benannt. Der Satz wurde 1738 veröffentlicht. Über die Art seiner Ableitung durch den Erfinder vergl. § 26 dieses Kapitels.



## § 12. Theorem von Clairaut für ein Niveausphäroid mit dem Potentialausdruck

$$U = \frac{Mk^2}{r} \left\{ 1 + \frac{K}{2r^2} (1 - 3\sin^2\varphi) + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2} \cos^2\varphi + \frac{D}{r^4} \left( \sin^4\varphi - \frac{6}{7}\sin^2\varphi + \frac{3}{35} \right) \right\}. \quad (1)$$

Entsprechend dem Umstande, daß bereits von einigen versucht worden ist, in der Formel für die Beschleunigung  $g$  im Meeresniveau ein Glied mit der vierten Potenz des Sinus der geographischen Breite aufzunehmen, haben wir dem Ausdruck für  $U$  in § 10 noch das von der geozentrischen Länge freie Glied der Kugelfunktion vierten Ranges beigelegt, vergl. (4) S. 66 und  $K_1'$  S. 65; für  $p_{4,0}$  ist  $D$  geschrieben. Die Niveausphäroide verlieren hierdurch ihren Charakter als zur Äquatorebene symmetrische Rotationssphäroide nicht.

Der Koeffizient  $D$  ist aus den Schwerebeobachtungen abzuleiten. Wir nehmen einstweilen an, daß  $\frac{D}{r^4}$  die vierte Ordnung hat, während wie bekannt  $\frac{K}{r^2}$  und  $\frac{\omega^2 r^3}{Mk^2}$  für die Nähe der physischen Erdoberfläche die zweite Ordnung besitzen.

Wir könnten nun so vorgehen, daß aus (1) zunächst die Polargleichung der Meridiankurve abgeleitet und alsdann der Ausdruck für  $g$  aufgestellt würde. Anstatt aber hierauf als letzte Folgerung das Theorem von Clairaut zu entwickeln, ziehen wir es vor, mit diesem zu beginnen. Es tritt dadurch in einfacherer Entwicklung und von vornherein in eleganterer Form auf.

Wenden wir (1) auf Äquator und Pol an mit  $r = a$ ,  $\sin\varphi = 0$ ,  $\cos\varphi = 1$  bzw.  $r = b$ ,  $\sin\varphi = 1$ ,  $\cos\varphi = 0$ , so giebt die Gleichsetzung beider Werte von  $U$  ohne Schwierigkeit:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{K}{2a^3} + \frac{K}{b^3} + \frac{\omega^2 a^2}{2Mk^2} + \frac{3}{35} \frac{D}{a^5} - \frac{8}{35} \frac{D}{b^5}.$$

Hierin setzen wir  $b = a(1 - \alpha)$ , wobei  $\alpha$  die Abplattung bezeichnet, und erhalten mit Vernachlässigung von Größen sechster Ordnung:

$$\alpha(1 + \alpha) = \frac{3K}{2a^2} (1 + 2\alpha) + \frac{\omega^2 a^3}{2Mk^2} - \frac{D}{7a^4} + Gl_6. \quad (2)$$

Differenzieren wir  $U$  nach  $r$ , so giebt dies, abgesehen vom Vorzeichen, für Äquator und Pol sofort die Beschleunigung  $g$  selbst, weil an diesen Stellen der Radiusvektor die Richtung der Normale annimmt. Es wird bezw.:

$$\begin{aligned} g_a &= \frac{Mk^2}{a^3} \left( 1 + \frac{3K}{2a^2} - \frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} + \frac{3D}{7a^4} \right) \\ g_b &= \frac{Mk^2}{b^3} \left( 1 - \frac{3K}{b^2} + \frac{8D}{7b^4} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

oder

$$g_p = \frac{Mk^2}{a^2} \left( 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 - \frac{3K}{a^2} [1 + 4\alpha] + \frac{8D}{7a^4} + Gl_6 \right).$$

Man hat daher

$$\frac{g_p - g_a}{Mk^2 : a^2} = \alpha(2 + 3\alpha) - \frac{3K}{2a^2} (3 + 8\alpha) + \frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} + \frac{5D}{7a^4} + Gl_6. (4)$$

Aus (4) + 3  $\times$  (2) folgt ohne weiteres:

$$\alpha + \frac{g_p - g_a}{Mk^2 : a^2} = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{Mk^2 : a^2} - \frac{3K}{a^2} \alpha + \frac{2D}{7a^4} + Gl_6.$$

Dividieren wir diese Gleichung mit  $1 + \frac{3K}{2a^2} - \frac{\omega^2 a^3}{Mk^2}$ , so geht sie mit Rücksicht auf (3) über in

$$\alpha + \frac{g_p - g_a}{g_a} = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{g_a} - \alpha \left( \frac{3K}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} \right) + \frac{2D}{7a^4} + Gl_6,$$

oder nach Elimination von  $K$  mittelst (2) und unter Einführung abkürzender Bezeichnungen:

$$\alpha + \mathfrak{b} = \frac{5}{2} \mathfrak{r} - \alpha \left( \alpha + \frac{1}{2} \mathfrak{r} \right) + \frac{2}{7} \mathfrak{D} + Gl_6. (5)$$

Hierin haben die Größen  $\alpha$ ,  $\mathfrak{b}$ ,  $\mathfrak{r}$  und  $\mathfrak{D}$  nachstehende Bedeutung:

$$\alpha = \frac{a - b}{a} = \text{Abplattung},$$

$$\mathfrak{b} = \frac{g_p - g_a}{g_a} = \frac{\text{Zunahme der Schwerkraft vom Äquator bis zum Pol}}{\text{Schwerkraft am Äquator}}$$

$$\mathfrak{r} = \frac{\omega^2 a}{g_a} = \frac{\text{Zentrifugalkraft am Äquator}}{\text{Schwerkraft am Äquator}},$$

$$\mathfrak{D} = \frac{D}{a^4},$$

wobei  $D$  noch der Bestimmung aus der Formel für die Schwerkraft im Meeresniveau bedarf.

Aus (5) und (2) kann man durch Elimination von  $\alpha$  noch eine Gleichung für  $K : a^2$  ableiten, die wir mit Benutzung der Relation

$$\frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} = \mathfrak{r} \frac{g_a a^2}{Mk^2} = \mathfrak{r} \left( 1 + \frac{3K}{2a^2} - \mathfrak{r} + Gl_4 \right) (6)$$

zunächst in der Form

$$\frac{3K}{2a^2} \left( 1 + 2\alpha + \frac{\mathfrak{r}}{2} \right) = 2\mathfrak{r} - \mathfrak{b} - \frac{\alpha\mathfrak{r}}{2} + \frac{\mathfrak{r}^2}{2} + \frac{3}{7} \mathfrak{D} + Gl_6$$

erhalten. Hieraus folgt mit Benutzung der Relation

$$\alpha + \mathfrak{b} = \frac{5}{2} \mathfrak{r} + Gl_4$$

zum Zwecke der Elimination von  $\mathfrak{b}$  aus den Gliedern vierter Ordnung (was die Formel vereinfacht):

$$\frac{3K}{2a^2} = 2\epsilon - \mathfrak{b} - 2\mathfrak{a}^2 + \frac{3}{4}\epsilon^2 + \frac{3}{7}\mathfrak{D} + Gl_6. \quad (7)$$

Zugleich geht (6) über in:

$$\frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} = \epsilon(1 + \epsilon - \mathfrak{b} + Gl_4), \quad (8)$$

eine Gleichung, der wir zur Reduktion bei Entwicklungen weiterhin bedürfen.

§ 13. Polargleichung der Meridiankurve für das Niveausphäroid  $U = W_0$ , wobei

$$U = \frac{Mk^2}{r} \left\{ 1 + \frac{K}{2r^2} (1 - 3s^2) + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2} (1 - s^2) + \frac{D}{r^4} \left( s^4 - \frac{6}{7}s^2 + \frac{3}{35} \right) \right\}. \quad (1)$$

Hierin bezeichnet  $s$  den  $\sin \varphi$ . Setzen wir nun an:

$$r = a(1 - \mathfrak{a}_2 s^2 + \mathfrak{a}_4 s^4 - \dots), \quad (2)$$

so ist die Abplattung

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_4 + \dots \quad (3)$$

Um  $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_4, \dots$  zu bestimmen, führen wir in (1) für  $r$  den Ausdruck (2) ein, wobei es vorteilhaft ist, in (1) zuvor das  $r$  vor der Klammer rechts nach links zu bringen. Es folgt mit Rücksicht darauf, daß  $\mathfrak{a}_4$  eine GröÙe vierter Ordnung sein muß:

$$\frac{W_0 a}{Mk^2} (1 - \mathfrak{a}_2 s^2 + \mathfrak{a}_4 s^4 - \dots) = \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{K}{2a^2} (1 - 3s^2) (1 + 2\mathfrak{a}_2 s^2) \\ &+ \frac{\omega^2 a^3}{2Mk^2} (1 - s^2) (1 - 3\mathfrak{a}_2 s^2) \\ &+ \frac{D}{a^4} \left( s^4 - \frac{6}{7}s^2 + \frac{3}{35} \right) + Gl_6 \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Indem wir die Faktoren gleich hoher Potenzen von  $s^2$  linker und rechter Hand nach Ordnung der rechten Seite einander gleich setzen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{W_0 a}{Mk^2} &= 1 + \frac{K}{2a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2Mk^2} + \frac{3}{35} \frac{D}{a^4} + Gl_6, \\ \mathfrak{a}_2 \frac{W_0 a}{Mk^2} &= \frac{K}{a^2} \left( \frac{3}{2} - \mathfrak{a}_2 \right) + \frac{\omega^2 a^3}{2Mk^2} (1 + 3\mathfrak{a}_2) + \frac{6}{7} \frac{D}{a^4} + Gl_6, \quad (5) \\ \mathfrak{a}_4 \frac{W_0 a}{Mk^2} &= \mathfrak{a}_2 \left( \frac{3\omega^2 a^3}{2Mk^2} - \frac{3K}{a^2} \right) + \frac{D}{a^4} + Gl_6. \end{aligned}$$

Da wir  $\mathfrak{a}$  im vorigen Paragraphen bereits entwickelt haben, so ist von diesen Gleichungen nur die erste und dritte noch zu benutzen. Sie geben:

$$\mathfrak{a}_4 = \mathfrak{a}_2 \left( \frac{3\omega^2 a^3}{2Mk^2} - \frac{3K}{a^2} \right) + \frac{D}{a^4} + Gl_6$$

oder unter Elimination von  $K$  mittelst (2) des vorigen Paragraphen,

sowie unter Substitution von  $\mathfrak{a}$  für  $\mathfrak{a}_2$ , von  $\mathfrak{r}$  für  $\omega^2 a^3 : Mk^2$  und von  $\mathfrak{D}$  für  $D : a^4$ ,

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} \left( \frac{5}{2} \mathfrak{r} - 2\mathfrak{a} \right) + \mathfrak{D} + Gl_6, \quad (6)$$

oder endlich nach (5) des vorigen Paragraphen mittelst Elimination von  $\mathfrak{r}$ :

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} (\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) + \mathfrak{D} + Gl_6. \quad (6^*)$$

Die Gleichung der *Meridiankurve des Niveausphäroids* wird hiernach mit Vernachlässigung von Gliedern sechster Ordnung die folgende:

$$r = a \left\{ 1 - [\mathfrak{a}(1 + \mathfrak{b} - \mathfrak{a}) + \mathfrak{D}] \sin^2 \varphi + [\mathfrak{a}(\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) + \mathfrak{D}] \sin^4 \varphi - \dots \right\}. \quad (7)$$

Hierzu giebt die Gleichung (5) des vorigen Paragraphen die Abplattung  $\mathfrak{a}$ . Ferner stellt die erste Gleichung (5) dieses Paragraphen die Beziehung zwischen  $a$  und  $W_0$  her, wobei  $Mk^2$  mittelst (3) des vorigen Paragraphen eliminiert werden kann. Es hat aber die Entwicklung dieser Beziehung hier weiter keinen Wert.

Für eine *Ellipse* mit dem Äquatorialhalbmesser  $a$  und der Abplattung  $\mathfrak{a}$  können wir nach Bd. 1 S. 60 (6) und mit Rücksicht auf die Bedeutung von  $\delta$  nach Bd. 1 S. 38 o. ansetzen:

$$r = a \left\{ 1 - \mathfrak{a} \left( 1 + \frac{3}{2} \mathfrak{a} \right) \sin^2 \varphi + \frac{3}{2} \mathfrak{a}^2 \sin^4 \varphi - \dots \right\}. \quad (8)$$

Verstehen wir unter  $r_U$  den Radiusvektor des Sphäroids, unter  $r_E$  den des Ellipsoids, so ist

$$r_U - r_E = a \left\{ \left[ \mathfrak{a} \left( \frac{5}{2} \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \right) - \mathfrak{D} \right] \cdot \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi + Gl_6 \right\}. \quad (9)$$

Für  $\sin^2 2\varphi = 1$  d. h.  $\varphi = \pm 45^\circ$  erlangt  $r_U - r_E$  seinen Maximalwert und zwar wird

$$(r_U - r_E)_{\max} = \frac{1}{4} a \left\{ \mathfrak{a} \left( \frac{5}{2} \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \right) - \mathfrak{D} + Gl_6 \right\}. \quad (10)$$

§. 14. Formeln für die Beschleunigung  $g$  der Schwerkraft in Bezug auf das Niveausphäroid  $U = W_0$ ; Bestimmung von  $\mathfrak{D}$ . Wenn wir denselben Ausdruck für  $U$  wie in den vorigen beiden Paragraphen zu grunde legen, so läßt sich für  $g$  in Bezug auf alle Punkte des Niveausphäroids  $U = W_0$  ein Ausdruck von der Form

$$g = g_a (1 + \mathfrak{b}_2 \sin^2 B + \mathfrak{b}_4 \sin^4 B + Gl_6) \quad (1)$$

herstellen, worin  $\mathfrak{b}_2$  und  $\mathfrak{b}_4$  bezw. die zweite und vierte Ordnung haben, falls  $D : r^4$ , wie angegeben, die vierte Ordnung hat. Mit Rücksicht darauf, daß wir bereits mit  $\mathfrak{b}$  den Quotienten  $(g_p - g_a) : g_a$  bezeichnet haben, ist jetzt zu setzen:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_4 + \dots \quad (2)$$

$\mathfrak{b}_2$  und  $\mathfrak{b}_4$  denken wir uns aus den Beobachtungen der Schwerkraft auf der betreffenden Niveaufläche abgeleitet. Um nun  $\mathfrak{b}_2$  und

$b_1$  mit den Konstanten des Niveausphäroids in Beziehung zu setzen, führen wir zunächst in den Ausdruck (1) für  $B$  die geozentrische Breite  $\varphi$  ein. Wir können dabei entweder von den drei Komponenten  $U_1$ ,  $U_2$  und  $U_3$  der Beschleunigung  $g$  ausgehen wie in § 10 S. 72, oder einfacher, da bereits festgestellt ist, daß die Meridiankurve der Fläche  $U = W_0$  bis auf Größen vierter Ordnung mit der Ellipse gleicher Abplattung zusammenfällt, die bekannte Relation für die Ellipse benutzen.

Nach Bd. 1 S. 60 (4) ist, wenn wir für  $m$  einfach  $a$  schreiben, sowie für  $\sin 2B$  setzen  $\sin 2\varphi$ :

$$B - \varphi = a \sin 2\varphi + Gl_4. \quad (3)$$

Diese Formel gilt auch sofort fürs Niveausphäroid  $U = W_0$ . Zuzufolge derselben wird nach *Taylor's* Satz:

$$\sin^2 B = \sin^2 \varphi + 4a \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + Gl_4;$$

hiermit sowie mittelst (2) geht (1) nach naheliegenden Reduktionen über in die Gestalt:

$$g = g_a \left\{ 1 + (b + 4ab - b_4) \sin^2 \varphi - (4ab - b_4) \sin^4 \varphi + Gl_6 \right\}. \quad (4)$$

Wir haben nun einen zweiten Ausdruck für  $g$  aus  $U$  abzuleiten. Hierbei gilt im allgemeinen Formel (5) § 10 S. 73, doch ist  $U_3$  gleich null, da der Ausdruck für  $U$   $\lambda$  nicht enthält. Demnach wird

$$g = -U_1 \left( 1 + \frac{U_2^2}{2U_1^2} + \dots \right). \quad (5)$$

Differenzieren wir aber den Ausdruck (1) für  $U$  S. 79 § 13' nach  $r$ , so folgt unter Beibehaltung der Abkürzung  $s$  für  $\sin \varphi$ :

$$U_1 = -\frac{Mk^2}{r^2} \left\{ 1 + \frac{3K}{2r^2} (1 - 3s^2) - \frac{\omega^2 r^3}{Mk^2} (1 - s^2) \right. \\ \left. + \frac{5D}{r^4} \left( s^4 - \frac{6}{7} s^2 + \frac{3}{35} \right) \right\};$$

ferner ist

$$U_2 = \frac{\partial U}{r \partial \varphi} = -\frac{Mk^2}{r^2} \left\{ \left( \frac{3K}{r^2} + \frac{\omega^2 r^3}{Mk^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi + Gl_4 \right\}.$$

Mit Rücksicht auf (5) wird daher:

$$g = \frac{Mk^2}{r^2} \left\{ 1 + \frac{3K}{2r^2} (1 - 3s^2) - \frac{\omega^2 r^3}{Mk^2} (1 - s^2) \right. \\ \left. + \frac{5D}{r^4} \left( s^4 - \frac{6}{7} s^2 + \frac{3}{35} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{3K}{r^2} + \frac{\omega^2 r^3}{Mk^2} \right)^2 (s^2 - s^4) + Gl_6 \right\}. \quad (6)$$

Um nun  $g$  für Punkte des bestimmten Niveausphäroids  $U = W_0$  zu erhalten, eliminieren wir  $r$  mittelst des Ausdrucks für  $U$ , oder einfacher mittelst der Polargleichung der Meridiankurve (7) § 13 S. 80. Es ist darnach im Faktor vor der Parenthese rechter Hand in (6) zu setzen:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} \left\{ 1 + 2[\alpha(1 + \beta - \alpha) + \mathfrak{D}] s^2 - [\alpha(2\beta - 5\alpha) + 2\mathfrak{D}] s^4 + Gl_6 \right\};$$

dagegen reicht es für die Glieder zweiter Ordnung der Parenthese aus,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} (1 + 2\alpha s^2 + Gl_4)$$

und

$$r^3 = a^3 (1 - 3\alpha s^2 + Gl_4)$$

einzuführen, während in den Gliedern vierter Ordnung für  $r$  einfach  $a$  geschrieben werden darf. Außerdem eliminieren wir  $3K : 2a^2$  und  $\omega^2 a^3 : Mk^2$  mittelst der Formeln (7) und (8) § 12 S. 79 und nehmen entsprechend im letzten Gliede vierter Ordnung der Parenthese nach (2) § 12 S. 77

$$\frac{3K}{a^2} + \frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} = 2\alpha + Gl_4;$$

es geht alsdann die Gleichung (6), gehörig zusammengezogen mit Vernachlässigung von Gliedern sechster Ordnung über in:

$$g = \frac{Mk^2}{a^2} \left( 1 + \frac{3K}{2a^2} - \frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} + \frac{3}{7} \mathfrak{D} \right) \left\{ \begin{array}{l} 1 + [\beta + 7\alpha^2 - 3\mathfrak{D}] \sin^2 \varphi \\ - [7\alpha^2 - 3\mathfrak{D}] \sin^4 \varphi + \dots \end{array} \right\}. \quad (7)$$

Strenggenommen hätte es genügt, den Faktor von  $\sin^4 \varphi$  herzustellen, da er am bequemsten die neue Beziehung liefert, welcher wir bedürfen, um  $\mathfrak{D}$  mit den Koeffizienten der aus den Schwerebeobachtungen folgenden Formel (4) für  $g$  zu vergleichen. In der That giebt die Gleichung (7) weiter nichts Neues als diese Beziehung; sie giebt nämlich durch Vergleichung mit (4)  $g_a$  genau so wie Formel (3) § 12 S. 77, ferner aber

$$4\alpha\beta - \mathfrak{b}_1 = 7\alpha^2 - 3\mathfrak{D} + Gl_6 \quad (8)$$

sowohl aus der Vergleichung der Koeffizienten von  $\sin^2 \varphi$  als derjenigen von  $\sin^4 \varphi$ . Der Grund hiervon ist, daß wir durch das *Clairautsche* Theorem in der Gestalt von Gleichung (5) § 12 S. 78 bereits  $\alpha$  mittelst  $\beta$  ausgedrückt haben und diese Relation von  $\alpha$  und  $\beta$  bei der Umformung von (6) oben benutzten. Die doppelte Bestimmung von (8) ist eine Kontrolle der Rechnung.

Wir erhalten jetzt aus (8):

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{3} (7\alpha^2 - 4\alpha\beta + \mathfrak{b}_1) + Gl_6, \quad (9)$$

und erkennen, daß  $\mathfrak{D}$ , wie anfangs in § 12 vorausgesetzt, die vierte Ordnung hat, sobald  $\mathfrak{b}_1$  diese Ordnung besitzt.

§ 15. Zusammenstellung der Formeln für ein Niveausphäroid  $U$ . Dieselben gelten zufolge der Entwicklung nur für die Nähe der physischen Erdoberfläche, haben aber auch nur hier Interesse.

Gegeben sei die aus den Beobachtungen auf einer Niveaufläche abgeleitete Formel

$$g = g_a (1 + b_2 \sin^2 B + b_4 \sin^4 B) \quad (1)$$

für die Beschleunigung der Schwere auf dem zugehörigen Niveausphäroid  $U$ ;  $b_2$  habe die zweite Ordnung und  $b_4$  die vierte Ordnung. Dann folgt unter Zugrundelegung des Ausdrucks  $U$  in § 12 (1), wenn  $\epsilon$  wie bisher das Verhältnis der Zentrifugalbeschleunigung am Äquator zu  $g_a$  bedeutet und

$$b = b_2 + b_4$$

gesetzt wird, für die Meridiankurve des Niveausphäroids:

$$r = a \left\{ 1 - [a(1 + b - a) + d] \sin^2 \varphi + [a(b - a) + d] \sin^4 \varphi + \dots \right\}, \quad (2)$$

$$a = \frac{5}{2} \epsilon - b - a \left( a + \frac{1}{2} \epsilon \right) + \frac{2}{7} d + \dots, \quad (3)$$

$$d = \frac{1}{3} (7a^2 - 4ab + b_4) + \dots; \quad (4)$$

$a$  und  $d$  finden sich aus den beiden letzten Gleichungen leicht durch successive Annäherung.

Die maximale Erhebung des Niveausphäroids über das Rotationsellipsoid gleicher Abplattung ist gleich

$$\frac{1}{4} a \left( a \left[ \frac{5}{2} a - b \right] - d \right) + \dots,$$

oder mit Rücksicht auf (4) gleich

$$\frac{1}{24} a \left( a[a + 2b] - 2b_4 \right) + \dots. \quad (5)$$

Behufs einer späteren Verwendung notieren wir noch folgende Formeln. Aus (2) § 12 S. 77 folgt mit Rücksicht auf (8) S. 79 ohne Schwierigkeit:

$$a = \frac{3K}{2a^2} (1 + a) + \frac{\epsilon}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} \epsilon \right) - \frac{1}{7} d + \dots, \quad (6)$$

eine Gleichung, welche  $a$  giebt, falls  $K$  irgendwie bekannt wird.

Ferner folgt aus (3) S. 77 mit Benutzung von (7) und (8) in demselben Paragraphen S. 79:

$$g_a = \frac{Mk^2}{a^2} \left( 1 + \epsilon - b + \epsilon b - \frac{1}{4} \epsilon^2 - 2a^2 + \frac{6}{7} d + \dots \right),$$

und hieraus mit Rücksicht auf (4):

$$g_a = \frac{Mk^2}{a^2} \left( 1 + \epsilon - b + \epsilon b - \frac{1}{4} \epsilon^2 - \frac{8}{7} ab + \frac{2}{7} b_4 + \dots \right), \quad (7)$$

welche Gleichung einen Schluß auf  $Mk^2$  gestattet.

§ 16. Numerische Anwendung der Formeln auf das Niveausphäroid des Geoids. Legen wir die, älteren Interpolationsrechnungen entsprechende Formel

$$g = 9,7806^m (1 + 0,0052 \sin^2 B) \quad (1)$$



für das Meeresniveau zu grunde, so ist

$$g_a = 9,7806^m, \quad b = b_2 = 0,0052, \quad b_4 = 0.$$

Wir haben nun zunächst  $r$  zu ermitteln. Bezeichnet  $a_0$  den Äquatorialhalbmesser des Niveausphäroids des Geoids, so ist:

$$r = \frac{\omega^2 a_0}{g_a}.$$

Es bezieht sich aber der numerische Wert (1) von  $g$  auf eine Sekunde mittlere Zeit, wir müssen somit auch die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Rotation auf dieses Zeitintervall beziehen. Da die Dauer einer Rotation der Erde um ihre Axe außerordentlich nahe einen Sterntag beträgt und dieser (nicht 24 Stunden = 86400 Sekunden mittlere Zeit wie ein mittlerer Tag, sondern) 86164,09 Sekunden mittlere Zeit hat, so wird

$$\omega = \frac{2\pi}{86164,09}; \quad \log \frac{\omega^2}{g_a} = 0,73534 - 10.$$

Setzen wir mit *Bessel*  $a_0 = 6377397^m$  (Bd. 1. S. 38), so folgt

$$r = 0,0034672 = \frac{1}{288,41}. \quad (2^*)$$

Dagegen folgt mit *Kleins* Wert  $a_0 = 6378740^m$  (Bd. 1. S. 18)

$$r = 0,0034680 = \frac{1}{288,35}. \quad (2)$$

Wir werden weiterhin aus  $g_a$  und der Mondparallaxe einen Wert für  $\alpha$  ableiten, der hinlänglich mit dem aus Gradmessungen folgenden harmoniert, dergestalt, daß es jedenfalls ausreichend erscheint, bei der Angabe (2\*) für  $r$  stehen zu bleiben, ohne mehr als etwa eine Einheit der sechsten Decimale Fehler in  $r$  befürchten zu müssen.

Nach dem einfachen Theorem von *Clairaut* folgt jetzt weiter

$$\alpha = \frac{5}{2} \cdot 0,0034672 - 0,0052 = 0,0034680$$

oder

$$\alpha = \frac{1}{288,35}. \quad (3)$$

Ferner ist nach (4) des vorigen Paragraphen:

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{3} \cdot 0,003468 (7 \cdot 0,003468 - 4 \cdot 0,0052)$$

also

$$\mathfrak{D} = 0,0000040. \quad (4)$$

Damit wird genauer nach (3) des vorigen Paragraphen:

$$\alpha = 0,0034680 \left(1 - \frac{3}{2} \cdot 0,003468\right) + \frac{2}{7} \cdot 0,0000040$$

oder

$$\alpha = 0,0034511 = \frac{1}{289,76}. \quad (5)$$

Eine Wiederholung der Rechnung giebt

$$\begin{aligned} \mathfrak{d} &= 0,0000039 \\ \mathfrak{a} &= 0,0034512, \end{aligned}$$

also wesentlich dasselbe.

Die Erhebung des dem Geoid entsprechenden Niveausphäroids über das Rotationsellipsoid gleicher Abplattung ist nach (5) des vorigen Paragraphen im Maximum sehr nahe gleich

$$\frac{1}{24} \cdot 6377397 \cdot 4\mathfrak{a}^2 \quad \text{d. i.} \quad 12,7^m. \quad (6)$$

Gehen wir von der im dritten Kapitel § 35 abgeleiteten Formel aus:

$$g = 9,7800^m (1 + 0,005310 \sin^2 B), \quad (1^*)$$

so ist

$$g_a = 9,7800 \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{b}_2 = 0,005310 \quad \mathfrak{b}_4 = 0.$$

Nach dem einfachen Theorem von *Clairaut* folgt hiermit

$$\mathfrak{a} = \frac{5}{2} \cdot 0,0034672 - 0,005310 = 0,0033580$$

oder

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{297,80}. \quad (3^*)$$

Ferner wird

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{3} \cdot 0,003358 (7 \cdot 0,003358 - 4 \cdot 0,005310),$$

also

$$\mathfrak{d} = 0,0000025 \quad (4^*)$$

und hiermit genauer

$$\mathfrak{a} = 0,0033580 (1 - 0,0033580 - 0,0017336) + \frac{2}{7} \cdot 0,0000025$$

oder

$$\mathfrak{a} = 0,0033416 = \frac{1}{299,26}. \quad (5^*)$$

Die Gröfse (6) ändert sich nicht wesentlich.

Wie im dritten Kapitel näher begründet wird, ist unsere Formel der älteren unbedingt vorzuziehen, also auch der Wert für  $\mathfrak{a}$ , welcher zufälligerweise mit der Abplattung des *Besselschen* Erdellipsoids fast ganz übereinstimmt.

*Laplace* findet in der *Mécanique céleste* t. II. l. III p. 149—150 die Pendellängenbeobachtungen von fünfzehn Orten der Variation mit  $\sin^2 B$  sehr nahe entsprechend und berechnet  $\mathfrak{a}$  gleich  $\frac{1}{321,48}$  und  $\frac{1}{335,78}$  unter Annahme von  $\mathfrak{r}$  gleich  $\frac{1}{259}$ , je nachdem er die zweite oder dritte Ausgleichungsmethode (siehe Bd. 1 S. 598) anwendet.

Unsere Kenntnis des allgemeinen Verlaufes der Beschleunigung  $g$  im Niveau des Meeres ist zur Zeit noch immer wesentlich das Resultat einer Reihe ausgezeichneten wissenschaftlicher Operationen aus den ersten Decennien dieses Jahrhunderts. Ganz besonders ragen hervor die Beobachtungen des Capt. *Edw. Sabine* auf 13 Stationen von  $-13^\circ$  bis  $+80^\circ$  geographischer Breite in den Jahren 1822 bis 1824 und

diejenigen des Capt. *Foster* auf 12 Stationen außer London und Greenwich von  $-63^\circ$  bis  $+11^\circ$  geographischer Breite in den Jahren 1828 bis 1831. Nächst dem existieren außer verschiedenen kleineren Reihen zwei Reihen von *Louis de Freycinet* und Capt. *Lütke* aus den Jahren 1817, bzw. 1826 bis 1829, sowie Reihen neueren Ursprungs, welche aber mehr den Charakter von Spezialstudien tragen. Im dritten Kapitel kommen wir auf diese Beobachtungen im einzelnen zurück.

Mit der Berechnung einer Interpolationsformel haben sich verschiedene Gelehrte beschäftigt. Nach ersten Versuchen einer Formelableitung durch *Laplace* und *Walbeck*, wobei jedoch wenig Material vorlag, findet *Ed. Schmidt* durch Ausgleichung von 47 beobachteten Pendellängen auf S. 372 u. ff. des ersten Bandes seiner *Mathematischen Geographie* 1829, wenn  $\mathfrak{L}_a$  die Länge des Sekundenpendels am Äquator bezeichnet:

$$\mathfrak{L}_a = 39,015233 \text{ Zoll engl.}, \text{ also } g_a = 9,78056'' ,$$

sowie ( $\mathfrak{b}_1 = \text{null}$  gesetzt):

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_2 = 0,0052005 . \quad (7)$$

Hierbei ist in Bezug auf die Reduktion von  $\mathfrak{L}_a$  auf  $g_a$  zu bemerken, daß zwischen  $g$  und der Schwingungszeit  $t$  des mathematischen Pendels von der Länge  $l$  bekanntlich die Formel

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

besteht, mithin zur Bestimmung von  $g$  aus der Länge des Sekundenpendels  $\mathfrak{L}$  folgt:

$$g = \pi^2 \mathfrak{L} .$$

Ferner ist nach den *Comparisons of Standards of Length* von *A. R. Clarke*, 1866, p. 280

$$1 \text{ Fuß engl.} = 0,30479727'' = [9,48401107 - 10]$$

mithin

$$1 \text{ Zoll engl.} = [8,40482932 - 10]'' .$$

Über die Verteilung der von *Schmidt* angewandten Beobachtungen nach der Breite, wie über verschiedene Details weiterhin anzuführender Rechnungen kann auch eine Zusammenstellung von *J. B. Listing* verglichen werden. \*) Bei *Schmidt* dominiert die nördliche Halbkugel: er hat 11 südliche Stationen bis  $-52^\circ$  Breite gegen 33 nördliche bis  $+80^\circ$  (2 südliche und 1 nördliche zählen doppelt).

Die später publizierten Messungen *Fosters* geben nach der Bearbeitung von *Fr. Baily* in den *Memoirs of the Royal Astronom. Society VII* 1834 p. 81 wesentlich denselben Wert für  $\mathfrak{b}$ , nämlich:

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_2 = 0,0051961 , \quad (8)$$

wobei für die Stationen außer Greenwich und London die Breite von  $+11^\circ$  bis  $-63^\circ$  variiert. Es tritt also aus der Vergleichung von (7) und (8) keine erhebliche Differenz der Nord- und Südhälfte der Erde hervor.

\*) *J. B. Listing. Neue geometrische und dynamische Konstanten des Erdkörpers*. Eine Fortsetzung der Untersuchung über unsere jetzige Kenntnis von der Gestalt und Größe der Erde. Göttingen 1878. (Separatabdruck aus den Nachr. der kgl. Ges. d. Wiss.)

Abgesehen von dem historischen Wert dieser Schrift verdient dieselbe auch als Kritik Beachtung. Wir werden indes mehrfach zu anderen Schlüssen geführt werden.

In seinem Werke *An Account of Experiments to determine the Figure of the Earth by means of the Pendulum vibrating Seconds in different Latitudes*, London 1825, berechnet *Edward Sabine* S. 334 aus 13 seiner Stationen von  $-13^\circ$  bis  $+80^\circ$  Breite

$$h = h_s = 0,0051807, \quad (9)$$

welche Zahl sich durch Zuziehung von 6 Stationen *Katers* und 6 Stationen *Biots* auf der nördlichen Erdhälfte, ungerechnet der Anschlussstationen, auf

$$0,0051890 \quad (9^*)$$

erhöht. Nach *Sabines* Rechnung ist

$$\mathfrak{K}_a = 39,01568 \quad \text{bzw.} \quad 39,01516 \text{ Zoll engl.}$$

Wir haben die abgerundeten Zahlen *Schmidts* auf grund dieser Ermittlungen beibehalten, obgleich einige andere Rechner abweichendere Resultate finden.

*Francis Baily* berechnet in den *Memoirs of the Royal Astronom. Society VII* 1834 (außer der *Fosterschen* Reihe) noch p. 94 eine Formel aus 79 überhaupt bis dahin bekannt gewordenen Beobachtungen. Seine Arbeit ist dadurch ausgezeichnet, daß er verschiedene erforderliche Korrekturen anbringt, die z. T. unterblieben waren (u. a. die Reduktion wegen des Mitschwingens der Luft [man hatte nur wegen des Auftriebs korrigiert], wegen Temperatur, auf das Meeresniveau). Jedoch führt er die Ausgleichung ohne Rücksicht auf die Verteilung der Stationen über die Erdoberfläche durch; verschiedene Orte kommen mehrfach, London sogar 11mal vor. Er findet  $h = 0,0051449$  und für die tägliche Schwingungszahl  $n$  des Londoner Sekundenpendels in der Breite  $B$ :

$$n = \sqrt{7441625711} \cdot \sqrt{1 + h \sin^2 B} \cdot *)$$

*Borenius* stellte eine in mehreren Beziehungen verbesserte Rechnung an. Namentlich sorgt er für eine gleichmäßigere Verteilung der Stationen, deren jede bei ihm nur eine Gleichung erhält. In seiner Abhandlung *Über die Berechnung der mit dem unveränderlichen Pendel zur Bestimmung der Abplattung der Erde angestellten Beobachtungen* (*Bulletin de la Classe physico-mathématique de l'Académie imp. des sciences de St. Pétersbourg, tome I* 1843) findet sich als tägliche Schwingungszahl des Londoner Sekundenpendels an einem Orte mit der geographischen Breite  $B$ :

$$86265,016 + 222,359 \sin^2 B. \quad (10)$$

Hierbei sind 47 Stationen mit 47 Gleichungen benutzt. Aus 32 nördlichen und Äquator-Stationen folgt

$$86265,097 + 222,242 \sin^2 B;$$

aus 20 südlichen und Äquator-Stationen, wovon 5 mit den vorigen Äquator-Stationen gemeinsam sind, folgt ferner

$$86264,648 + 223,080 \sin^2 B.$$

Die gute Übereinstimmung der Ausdrücke für beide Erdhälften zeigt sich also auch bei dieser Berechnung.

---

\*) Hiernach wird allerdings  $n$  (London) für  $\mathfrak{K}_0$  nicht 86400. Letztere Zahl ist eben der unausgeglichene Wert von  $n$  für  $\mathfrak{K}_0$ . Bei Berechnung von  $\mathfrak{K}_a$  aus  $\mathfrak{K}_0$  hat man aber die ausgeglichenen, d. h. die Formelwerte anzuwenden.

*Borenius* leitet außerdem die Ausdrücke

$$86265,475 + 216,379 \sin^2 B + 6,958 \sin^4 B \quad (11)$$

und

$$86491,474 - 14,051 \cos B - 212,071 \cos^2 B$$

ab, von denen der letztere jedoch zu verwerfen ist, da die Potentialtheorie Ausdrücke fordert, die nach Potenzen von  $\sin B$  fortschreiten (allgemeiner gesprochen: nach Kugelfunktionen der Breite und Länge).

Bedenkt man, daß für konstante Pendellänge  $l$  sich die Schwingungszahlen  $n$  umgekehrt wie die Zeiten  $t$  verhalten, so findet man leicht aus (10) bzw. (11):

$$g = g_a \left\{ 1 + 2 \cdot \frac{222,359}{86265} \sin^2 B + \left( \frac{222,359}{86265} \right)^2 \sin^4 B \right\}, \quad (10^*)$$

also

$$b_2 = 0,0051552 \quad b_1 = 0,00000661;$$

ferner

$$g = g_a \left\{ 1 + 2 \cdot \frac{216,379}{86265,5} \sin^2 B + \left[ \left( \frac{216,379}{86265,5} \right)^2 + 2 \cdot \frac{6,958}{86265,5} \right] \sin^4 B + \dots \right\}, \quad (11^*)$$

also

$$b_2 = 0,0050166 \quad b_1 = 0,00016761.$$

Hiermit erhält man weiter:

$$a = 0,0034899 = \frac{1}{286,54} \quad d = 0,0000066 \quad (12)$$

*Sphäroid über Ellipsoid im Max. + 9,3<sup>m</sup>*

bzw.

$$a = 0,0034828 = \frac{1}{287,13} \quad d = 0,0000601 \quad (13)$$

*Sphäroid über Ellipsoid im Max. — 76<sup>m</sup>.*

Bezüglich des Ansatzes der Fehlergleichungen sei hier Folgendes bemerkt; vergl. auch 3. Kap., § 33.

Da die Potentialtheorie unmittelbar auf eine Entwicklung für  $g$  oder auch für die Länge  $\mathfrak{L}$  des Sekundenpendels nach Potenzen von  $\sin B$  führt, so ist es korrekt, wie *Schmidt* die Ausgleichung auf grund dieser Pendellängen zu führen oder, wie *Baily*, die  $n^2$  als Beobachtungsgrößen anzusehen; es ist aber weniger gut, wie von *Borenius* geschehen, auf grund der Schwingungszahlen  $n$  selbst zu rechnen, da diese den Quadratwurzeln der  $\mathfrak{L}$  proportional sind.

*Paucker* berechnet in seiner bereits Bd. 1 S. 18 citierten Abhandlung (*Bull. de la Classe phys.-math. de l'Ac. imp. de St. Pét.* Bd. 12 S. 120—128, Bd. 13 S. 49—89 und 225—237, insbesondere S. 227) nach einer Zusammenstellung der Resultate verschiedener Rechner aus 28 Stationen:

$$g = g_a (1 + 0,005209070 \sin^2 B - 0,00005973 \sin^2 2B).$$

Hieraus folgt

$$g = g_a (1 + 0,00497015 \sin^2 B + 0,00023892 \sin^4 B) \quad (14)$$

mit

$$a = 0,0034648 = \frac{1}{288,62} \quad d = 0,0000836 \quad (14^*)$$

*Sphäroid über Ellipsoid im Max. — 114<sup>m</sup>.*

Dieses Resultat hat indes weniger Bedeutung als das von *Borenius*, weil *Paucker* nur diejenigen der 47 Stationen, welche ersterer anwandte,

nimmt, bei denen die Abweichung der berechneten von der beobachteten täglichen Schwingungszahl  $< 3$  ist. (Bei *Borenius* kommen Abweichungen bis 11 vor.) Diese Art der Auswahl ist jedenfalls bedenklich. Man kann noch bemerken, daß *Paucker* aus den Gradmessungen ein Rotationsphäroid findet, welches zwar beinahe dieselbe Abplattung hat, aber vom Ellipsoid entgegengesetzt abweicht (Bd. 1 S. 18), so daß im Grunde keine große Übereinstimmung dieser beiden Resultate vorhanden ist.

Eine neuere Berechnung von  $a$  aus den Pendelbeobachtungen gab 1880 *A. R. Clarke* in seiner *Geodesy* p. 341–351. Durch den Einfluß der bei dieser Berechnung herbeigezogenen indischen Beobachtungen verkleinert sich  $a$  auf etwa 1:294, welchen Wert Verfasser p. 319 auch aus Gradmessungen ableitet. Jedoch ist auch diese Übereinstimmung wie bei *Paucker* durchaus zufällig und in der Genauigkeit der Einzelresultate nicht begründet.

**§ 17. Die Normalform der Niveaulflächen (außerhalb) und das Rotationsellipsoid.** Die beobachteten und auf das Meeresniveau reduzierten Werte von  $g$  lassen sich, wie bereits erwähnt, bis auf Größen, welche in Verhältnis zu  $g$  die vierte Ordnung nicht wesentlich überschreiten, durch eine Formel  $g = g_a (1 + b \sin^2 B)$  interpolieren. Setzt man  $g = g_a (1 + b_2 \sin^2 B + b_4 \sin^4 B)$ , so zeigt sich in der That, daß  $b_4$  ebenfalls eine Größe vierter Ordnung wird (vergl. § 16 S. 88). Eine Verbesserung ist jedoch die dreigliedrige Formel für  $g$  nicht, insofern sie die  $g$  im Meeresniveau nicht wesentlich besser als die zweigliedrige darstellt. Es würde in der That erst durch Mitnahme zahlreicher weiterer, von Breite und Länge abhängiger periodischer Glieder möglich werden, diese  $g$  wesentlich besser zu interpolieren, weil die Abweichungen gegen jene beiden einfachen Formeln einen lokalen und kontinentalen Charakter besitzen.

Als Normalform der Niveaulflächen außerhalb dürfen wir hier nach diejenigen Niveausphäroide ansehen, für welche in dem Potentialausdruck

$$U = \frac{Mk^2}{r} \left\{ 1 + \frac{K}{2r^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2} \cos^2 \varphi \right. \\ \left. + \frac{D}{r^4} \left( \sin^4 \varphi - \frac{6}{7} \sin^2 \varphi + \frac{3}{35} \right) + Gl_6 \right\} \quad (1)$$

die Konstanten so bestimmt werden, daß für das Niveausphäroid des Geoids in Strenge

$$g = g_a (1 + b \sin^2 B) \quad (2)$$

wird. Für die höher gelegenen Niveausphäroide wird allerdings  $g$  in Strenge diese Form nicht behalten; dies ist jedoch gleichgültig, und überdies wird sich zeigen, daß für die Nähe der physischen Erdoberfläche die höheren Glieder, welche zu (2) im allgemeinen hinzutreten, sehr klein bleiben.

Beziehen sich jetzt  $a$ ,  $g_a$ ,  $a$ ,  $b$  und  $r$  ausschließlich auf das Niveausphäroid der Meeresfläche, so haben wir nach S. 82 § 14 (9) zur Bestimmung von  $b$  und  $D$ :

$$\mathfrak{D} = \frac{D}{a^4} = \frac{1}{3} (7a^2 - 4ab) + Gl_6; \quad (3)$$

ferner ist hiermit die Gleichung der Meridiankurve dieses besonderen Niveausplüroids nach S. 80 § 13 (7):

$$r = a \left\{ 1 - a \left( 1 + \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}b \right) \sin^2 \varphi + a \left( \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}b \right) \sin^4 \varphi - Gl_6 \right\} \quad (4)$$

und die maximale Erhebung über das gleichstark abgeplattete Rotationsellipsoid nach S. 83 § 15 (5):

$$\frac{1}{24} a \{ a(a + 2b) + Gl_6 \}, \quad (5)$$

was nach S. 85 § 16 (6) 12,7 Meter beträgt.

Zur Bestimmung von  $K$ ,  $\omega^2: Mk^2$  und  $Mk^2$  hat man nach S. 79 § 12 (7) und (8), sowie nach S. 83 § 15 (7) und unter Benutzung der Relation  $a + b = \frac{5}{2}c + Gl_1$  die Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{D}{a^4} &= \frac{175}{12} c^2 + \frac{11}{3} b^2 - 15bc + Gl_6, \\ \frac{K}{2a^2} &= \frac{1}{3} \left\{ 2c - b - \frac{11}{2} c^2 - \frac{3}{7} b^2 + \frac{25}{7} bc + Gl_6 \right\} \\ \frac{\omega^2 a^2}{Mk^2} &= c(1 + c - b + Gl_4) \\ Mk^2 &= \frac{g_a a^2}{1 + c - b - \frac{1}{4} c^2 + \frac{8}{7} b^2 - \frac{13}{7} bc + Gl_6}. \end{aligned} \quad (6)$$

Die Formeln für  $r$  und  $g$  sowohl im allgemeinen, wie auch für beliebige Niveauflächen können aus der nunmehr als bekannt anzusehenden Funktion  $U$ , Gleichung (1), abgeleitet werden, was im wesentlichen den Entwicklungen der Paragraphen 12 bis 15 entspricht. Wir kommen hierauf im folgenden Paragraphen zurück.

Hier ist zunächst noch zu erwähnen, daß *H. Bruns* in seiner *Figur der Erde* S. 16 und 18 für die Normalform den Ausdruck

$$U = \frac{Mk^2}{r} \left\{ 1 + \frac{K}{2r^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2} \cos^2 \varphi \right\}$$

ansetzt und behandelt. Er setzt also insbesondere  $\mathfrak{D} = \text{null}$  und findet damit, wie auch unsere Formel (10) § 13 S. 80 ergibt, als maximale Erhebung des Niveausphäroids des Geoids über das gleichstark abgeplattete Ellipsoid

$$19,1^m.$$

Selbstverständlich reduziert sich für das Meeresniveau  $g$  nicht mehr in Strenge auf den Ausdruck (2), vielmehr treten noch Glieder mit  $\sin^4 B$  u. s. f. hinzu, welche jedoch nur sehr kleine Werte annehmen können, wie schon aus der geringen Differenz der Maximalerhebungen 13 und 19 Meter folgt. (Nach Gleichung (4) S. 83 § 15 wird für  $\mathfrak{D} = \text{null}$   $b_1$  gleich rund 0,00001.)



Für welche der beiden oben angegebenen Normalformen man sich auch entscheiden mag, so ist jedenfalls die Abweichung des der Meeresfläche entsprechenden Niveausphäroids vom Rotationsellipsoid gleicher Abplattung eine so geringe, daß *der Gebrauch der Geodäten gerechtfertigt erscheint, das Geoid abgesehen von den Verbiegungen lokalen und kontinentalen Charakters als abgeplattetes Rotationsellipsoid anzusehen.*

Man kann sogar  $U$  auch so ansetzen, daß für ein bestimmtes Niveausphäroid die Gleichung (1) diesem Rotationsellipsoid genau entspricht. Als ersteres nehmen wir wieder dasjenige des Geoids, auf welches sich  $a$ ,  $g_a$ ,  $\alpha$ ,  $\mathfrak{b}$  und  $\mathfrak{r}$  beziehen sollen. Damit nun der Radiusvektor desselben mit dem des gleichstark abgeplatteten Rotationsellipsoides bis auf Glieder sechster Ordnung im Verhältnis zu  $a$  übereinstimmt, ist in der für das Meeresniveau geltenden Formel

$$g = g_a \left\{ 1 + [\mathfrak{b} - \mathfrak{b}_4] \sin^2 B + \mathfrak{b}_4 \sin^4 B + Gl_6 \right\} \quad (2^*)$$

nach S. 83 § 15 (5) zu setzen

$$\mathfrak{b}_4 = \frac{1}{2} \alpha (\alpha + 2\mathfrak{b}),$$

oder nach Elimination von  $\alpha$  mittelst der Relation  $\alpha + \mathfrak{b} = \frac{5}{2} \mathfrak{r} + Gl_4$ :

$$\mathfrak{b}_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{25}{4} \mathfrak{r}^2 - \mathfrak{b}^2 \right).$$

Mit dem ersten Ausdruck folgt nach (4) § 15 S. 83 weiter:

$$\mathfrak{D} = \alpha \left( \frac{5}{2} \alpha - \mathfrak{b} \right) + Gl_6, \quad (3^*)$$

womit sich für den Radiusvektor der Meridiankurve nach (7) S. 80 § 13 in Übereinstimmung mit Gleichung (8) daselbst findet:

$$r = a \left\{ 1 - \alpha \left( 1 + \frac{3}{2} \alpha \right) \sin^2 \varphi + \frac{3}{2} \alpha^2 \sin^4 \varphi - Gl_6 \right\}, \quad (4^*)$$

die Polargleichung der Ellipse bis auf Glieder sechster Ordnung darstellend.

Zur Bestimmung der Konstanten des Potentialausdrucks (1) für  $U$  hat man in ähnlicher Entwicklung wie oben für die erste Normalform:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \frac{D}{a^4} = \frac{125}{8} \mathfrak{r}^2 + \frac{7}{2} \mathfrak{b}^2 - 15 \mathfrak{b} \mathfrak{r} + Gl_6 \\ \frac{K}{2a^2} &= \frac{1}{3} \left\{ 2\mathfrak{r} - \mathfrak{b} - \frac{283}{56} \mathfrak{r}^2 - \frac{1}{2} \mathfrak{b}^2 + \frac{25}{7} \mathfrak{b} \mathfrak{r} + Gl_6 \right\} \\ \frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} &= \mathfrak{r} (1 + \mathfrak{r} - \mathfrak{b} + Gl_4) \end{aligned} \quad (6^*)$$

$$Mk^2 = \frac{g_a a^2}{1 + \mathfrak{r} - \mathfrak{b} + \frac{9}{14} \mathfrak{r}^2 + \mathfrak{b}^2 - \frac{13}{7} \mathfrak{b} \mathfrak{r} + Gl_6}.$$

Wie bereits oben bemerkt, lassen sich nun  $r$  und  $g$  für beliebige Niveauflächen aus dem Ausdrucke für  $U$  herstellen.

Wenn wir in Zukunft besonders hervorheben wollen, daß das Niveausphäroid des Geoids eine der drei besprochenen Normalformen hat, so werden wir es kurz als *Normalsphäroid* bezeichnen.

### § 18. Die Formänderung der Niveausphäroide in der Nähe der physischen Erdoberfläche mit der Höhenlage.

Der Abstand unendlich benachbarter Niveauflächen ist bereits im ersten Kapitel § 8 S. 10 Gegenstand der Untersuchung gewesen. Danach ist der Abstand des Niveausphäroids der Meeresfläche von einem unendlich benachbarten Niveausphäroid mit Rücksicht auf die Formel (1\*) § 16 S. 85 für die Beschleunigung der Schwere dem Ausdruck

$$1 + b \sin^2 B, \quad b = 0,00531 \quad (1)$$

umgekehrt proportional. Insbesondere hat man für die Abstände  $h$  am Äquator und am Pol die Proportion:

$$h_{\text{Äqu.}} : h_{\text{Pol}} = 1,00531 : 1$$

oder näherungsweise (2)

$$h_{\text{Äqu.}} : h_{\text{Pol}} = 189 : 188.$$

Diese Proportion darf man als erste Annäherung auch auf beliebige Niveauflächen in der Nähe der Erdoberfläche und auf endliche Abstände anwenden. Sie zeigt deutlich die Thatsache, daß die Niveauflächen, selbst in der normalen Form der Niveausphäroide, im ganzen betrachtet erheblich vom Parallelismus abweichen.

Für zwei Abstände  $h$  in den Breiten  $B_1$  und  $B_2$  erhält man die Proportion:

$$h_1 : h_2 = 1 + 0,00531 \sin^2 B_2 : 1 + 0,00531 \sin^2 B_1.$$

Hieraus folgert man ohne Schwierigkeit:

$$h_1 - h_2 = \frac{0,00531 \sin(B_2 - B_1) \sin(B_2 + B_1)}{1 + 0,00531 \sin^2 B_2} h_1. \quad (3)$$

Ist  $B_2 + B_1 = 90^\circ$ , so erreicht der Ausdruck rechter Hand unter sonst gleichen Umständen sehr nahe sein Maximum. Dasselbe beträgt für  $B_2 - B_1 = 1^\circ$ , d. h. also für 15 geographische Meilen meridionalen Abstandes rund  $0,00009 h_1$ .

Infolge des Umstandes, daß die Niveausphäroide keine ähnlichen Flächen sind, ändert sich auch die *Abplattung* mit der Höhenlage. Sind  $a$  und  $b$  die äquatoriale und polare Halbaxe eines Niveausphäroids, so hat man für dessen Abplattung die Gleichung:

$$a - b = a \alpha.$$

Für ein unendlich benachbartes wird durch Differentiation dieser Gleichung

$$da - db = a d\alpha + \alpha da. \quad (4)$$

Für die Beschleunigung der Schwerkraft auf dem Niveausphäroid können wir aber ansetzen

$$g = g_a (1 + b \sin^2 B + Gl_1); \quad (5)$$

demnach ist

$$da \cdot 1 = db (1 + b + Gl_1)$$

oder

$$db = da (1 - b + Gl_1). \quad (6)$$

Führen wir dies in Gleichung (4) ein, so ergibt sich nach einfacher Reduktion:

$$d\alpha = \frac{da}{a} (b - \alpha + Gl_1). \quad (7)$$

Da  $b$  sehr nahe  $\frac{3}{2} \alpha$  ist, so hat man angenähert

$$d\alpha = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{da}{a}. \quad (8)$$

§ 19. Fortsetzung. Es ist nächst dem von Interesse zu ermitteln, wie sich die Niveausphäroide in verschiedenen Höhen zu dem Ellipsoid gleicher Abplattung verhalten. Nach S. 80 § 13 (10) ist der *maximale Abstand eines Niveausphäroids vom Ellipsoid gleicher Abplattung* gleich

$$(r_U - r_E)_{max} = \frac{1}{4} a \left\{ \alpha \left( \frac{5}{2} \alpha - b \right) - \delta + Gl_6 \right\}, \quad (1)$$

worin  $\alpha$ ,  $\alpha$ ,  $b$ ,  $\delta$  sich auf das betreffende Niveausphäroid beziehen. Da wir nun verschiedene Niveausphäroide vergleichen wollen, müssen wir  $\alpha$ ,  $b$  und  $\delta$  auf absolute Konstanten zurückführen. Dies wird durch nachstehende Formeln geleistet, die man unter Annahme des Ausdrucks (1) § 12 S. 77 für  $U$  leicht aus § 12 entnimmt:

$$\begin{aligned} b &= 2\epsilon - \frac{3K}{2a^2} + Gl_1, \\ \alpha &= \frac{5}{2}\epsilon - b + Gl_1, \\ \epsilon &= \frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} + Gl_1, \\ \delta &= \frac{D}{a^4}. \end{aligned} \quad (2)$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} a \frac{d\epsilon}{da} &= 3\epsilon + Gl_1, \\ a \frac{db}{da} &= 2a \frac{d\epsilon}{da} + \frac{3K}{a^2} + Gl_1 = 4\alpha + 2b + Gl_1, \\ a \frac{d\alpha}{da} &= \frac{5}{2} a \frac{d\epsilon}{da} - a \frac{db}{da} + Gl_1 = b - \alpha + Gl_1, \\ a \frac{d\delta}{da} &= -4\delta. \end{aligned} \quad (3)$$

Aus (1) ergibt sich nun durch Differentiation und unter Anwendung vorstehender Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{d(r_U - r_E)_{\max}}{da} &= \frac{1}{4} \left\{ a \left( \frac{5}{2} a - b \right) - \mathfrak{D} \right\} \\ &\quad + \frac{a}{4} \left\{ (5a - b) \frac{da}{da} - a \frac{db}{da} - \frac{d\mathfrak{D}}{da} \right\} + Gl_6 \\ \text{oder } \frac{d(r_U - r_E)_{\max}}{da} &= \frac{1}{4} \left\{ 3\mathfrak{D} + 3ab - \frac{13}{2} a^2 - b^2 + Gl_6 \right\}. \quad (4) \end{aligned}$$

Wenden wir die Zahlwerte des § 16 S. 84 und 85 an, so wird [vergl. auch S. 90 § 17 (3)]  $b$  sehr nahe gleich  $\frac{3}{2}a$  und

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{3} (7a^2 - 4ab) + Gl_4 \quad \text{oder sehr nahe} = \frac{1}{3} a^2.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{d(r_U - r_E)_{\max}}{da} &= - \frac{2b^2 + 2ab - a^2}{8} + Gl_4, \\ \text{oder sehr nahe} &= - \frac{13}{16} a^2 \quad \text{d. i.} = - 0,000010. \quad (5) \end{aligned}$$

Setzt man dagegen  $\mathfrak{D} = \text{null}$  (vergl. § 17 S. 90) und behält die Relation  $b = \frac{3}{2}a$  bei, so wird dieser Differentialquotient gleich  $- 0,000012$ .

Wählt man endlich  $\mathfrak{D}$  nach Gleichung (3\*) § 17 S. 91, d. h. nahezu gleich  $a^2$ , wobei nun das Niveausphäroid, auf welches sich die festen Werte von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $\mathfrak{D}$  beziehen, bis auf Glieder sechster Ordnung in  $r : a$  mit der Ellipse gleicher Abplattung übereinstimmt, dann folgt

$$\frac{d(r_U - r_E)_{\max}}{da} = - \frac{b^2 - a^2}{4} + Gl_6, \quad (6)$$

$$\text{oder sehr nahe} = - \frac{5}{16} a^2, \quad \text{d. i.} = - 0,000004.$$

In diesem Falle sind sonach die Änderungen der Niveausphäroide mit der Höhenlage am kleinsten. Sie sind aber auch bei den beiden vorbergehenden Annahmen sehr klein: selbst für eine Änderung von  $a$  im Betrage von  $\Delta a = 6370^m$  ist  $\Delta(r_U - r_E)_{\max}$  jedenfalls  $< 0,1^m$ .

*Die Niveausphäroide  $U$  in der Nähe der physischen Erdoberfläche stimmen daher alle in gleichem Grade mit Rotationsellipsoiden derselben Abplattung überein.* Wählt man insbesondere die Funktion  $U$  so, daß das Niveausphäroid der Meeresfläche in  $r : a$  bis auf Glieder sechster Ordnung mit einem Revolutionsellipsoid gleicher Abplattung übereinstimmt, so sind auch überhaupt alle Niveausphäroide  $U$  in der Nähe der physischen Erdoberfläche Revolutionsellipsoide bis auf Größen derselben Ordnung.

**§ 20. Die normale Änderung der Beschleunigung  $g$  der Schwerkraft mit der Höhe in der Nähe der physischen Erdoberfläche, außerhalb. Näherungsformeln für  $g$  und  $dg$ .**

Legen wir für  $U$  den Ausdruck (1) § 12 S. 77 zu grunde, so ist

allgemein für ein bestimmtes Niveausphäroid in der Nähe der physischen Erdoberfläche

$$g = g_a (1 + \mathfrak{b}_2 \sin^2 B + \mathfrak{b}_4 \sin^4 B + Gl_6). \quad (1)$$

Beachten wir die Relation  $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_4 + \dots$ , so folgt zur Bestimmung von  $\mathfrak{b}_4$  aus Gleichung (9) § 14 S. 82:

$$\mathfrak{b}_4 = 3\mathfrak{D} - 7\mathfrak{a}^2 + 4\mathfrak{a}\mathfrak{b} + Gl_6. \quad (2)$$

Hieraus erhält man durch Differentiation bei geändertem Äquatorialhalbmesser des Niveausphäroids:

$$a \frac{d\mathfrak{b}_4}{da} = 3a \frac{d\mathfrak{D}}{da} - (14\mathfrak{a} - 4\mathfrak{b}) a \frac{d\mathfrak{a}}{da} + 4\mathfrak{a} a \frac{d\mathfrak{b}}{da} + Gl_6;$$

setzt man nun rechter Hand die Werte der Differentialquotienten (3) § 19 S. 93 ein, so folgt

$$d\mathfrak{b}_4 = \frac{da}{a} \{30\mathfrak{a}^2 + 4\mathfrak{b}^2 - 10\mathfrak{a}\mathfrak{b} - 12\mathfrak{D} + Gl_6\}. \quad (3)$$

Setzen wir hierin näherungsweise  $\mathfrak{b} = \frac{3}{2}\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{D} = \frac{1}{3}\mathfrak{a}^2$ , null oder  $\mathfrak{a}^2$  (vergl. die dritte Annahme in § 19 S. 94), so wird  $d\mathfrak{b}_4$  gleich 20-, 24- oder 12-mal  $\mathfrak{a}^2 \cdot da : a$ . Es ist also selbst für die Änderung  $\Delta a = 6370^{km}$  die Änderung  $\Delta \mathfrak{b}_4$  ganz unwesentlich.

Man kann daher  $\mathfrak{b}_4$  für die Nähe der physischen Erdoberfläche als konstant betrachten. Hat man es insbesondere fürs Meeresniveau gleich null angesetzt, so wird es innerhalb der angegebenen Grenzen überall null:

Zur Bestimmung der Veränderung von  $\mathfrak{b}_2$  hat man

$$d\mathfrak{b}_2 = d\mathfrak{b} - d\mathfrak{b}_4 + \dots$$

und demnach mit Rücksicht auf (3) § 19 S. 93:

$$d\mathfrak{b}_2 = \frac{da}{a} \{4\mathfrak{a} + 2\mathfrak{b} + Gl_4\},$$

oder angenähert

$$d\mathfrak{b}_2 = 7\mathfrak{a} \cdot \frac{da}{a}. \quad (4)$$

Der allgemeine Ausdruck für die Beschleunigung  $g$  ist nach (6) § 14 S. 81 in abgekürzter Form:

$$g = \frac{Mk^2}{r^2} \left\{ 1 + \frac{3K}{2r^2} (1 - 3\sin^2 \varphi) - \frac{\omega^2 r^3}{Mk^2} \cos^2 \varphi + Gl_4 \right\}. \quad (5)$$

Da wir in der Parenthese Glieder vierter Ordnung vernachlässigt haben, so kommen hierbei die in § 17 S. 89 besprochenen Unterschiede in den Annahmen für  $U$  nicht weiter in betracht. Für viele Zwecke reicht aber Ausdruck (5) völlig aus. Um die Änderung von  $g$  für eine differentiale Verschiebung  $dh$  in Höhe zu erhalten, haben wir zu beachten, daß

Die vorstehenden Entwicklungen lassen nun erkennen, wie genau verschiedene in Anwendung kommende Näherungsformeln sind. Wird z. B. für die Schwerkraft in der Breite  $B$  und der Meereshöhe  $H$  gesetzt

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+H)^2} = \mathfrak{G} \left( 1 - \frac{1}{2} \mathfrak{b} \cos 2B - \frac{2H}{R} \right), \quad (21)$$

wozu die Differentialformel

$$\frac{dg}{g} = - \frac{2dH}{R} \quad (22)$$

gehört, so ist die normale Veränderung im Meeresniveau so genau berücksichtigt, als gegenwärtig möglich, die normale Veränderung mit der Höhe aber nach (10) und (16) auf etwa  $\frac{1}{2}\%$  Maximalfehler.

In den oben entwickelten Formeln kann man mit hinreichender Genauigkeit

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \mathfrak{Q}_m \quad (23)$$

setzen, worin  $\mathfrak{Q}_m$  die mittlere Dichtigkeit der Erde bezeichnet und  $\frac{4}{3} \pi R^3$  als Volumen der Erde angesetzt ist. Nach Bd. 1 S. 68 ist das Volumen des Rotationsellipsoids gleich diesem Ausdruck bis auf Bruchteile der vierten Ordnung; mit derselben Genauigkeit etwa wird dieser Ausdruck auch für das Volumen des Geoids anwendbar sein. Überdies wird Formel (23) bei allen numerischen Bestimmungen von  $\mathfrak{Q}_m$  benutzt. Mithin kommt der theoretische Fehler des Ausdrucks für  $M$  bei der numerischen Anwendung nicht zur Geltung; er ist auch ohne Belang, weil bei der Bestimmung von  $\mathfrak{Q}_m$  zur Zeit Fehler anderer Art begangen werden, die weit bedeutender sind als diejenigen der Theorie.

Setzt man einfach, entsprechend der Kugelgestalt der Erde:

$$g = \frac{Mk^2}{(R+H)^2}, \quad (24)$$

so giebt dieses in  $g$  zufolge (18) etwa  $\frac{1}{3}\%$  Maximalfehler, während die Veränderung mit der Höhe wie bei (22) auf  $\frac{1}{2}\%$  Maximalfehler richtig wird.

Alle hier aufgestellten Formeln geben nur den normalen Teil von  $g$  und  $dg : dH$ . Wegen lokaler und kontinentaler Einflüsse weicht  $g$  in Wirklichkeit um etwa  $\frac{1}{5000}$  seines Betrages im Maximum vom normalen Werte ab.  $dg : dH$  kann sich noch weit mehr ändern; normal ist es nur bei Erhebungen in freier Luft über nahezu ebenem Terrain und bei Abwesenheit grösserer Dichtigkeitsunregelmäßigkeiten in der Nähe der Erdoberfläche, vergl. 4. Kap. § 3. Innerhalb des Terrains giebt der normale Wert von  $dg : dH$  gar keine Annäherung, wie schon im Kap. 1 § 26 S. 46 erwähnt worden ist.

**§ 21. Die normale Änderung der geographischen Breite mit der Höhe wegen der Krümmung der Lotlinien.**

Wir drücken zunächst die geographische Breite  $B$  als Funktion

des Radiusvektors  $r$  und der geozentrischen Breite  $\varphi$  aus. Bezeichnet man aber wie S. 73 § 10 und S. 81 § 14 mit  $U_1$  und  $U_2$  die beiden von null verschiedenen Komponenten der Schwerebeschleunigung und beachtet, daß  $U_1$  die Richtung des Radiusvektors  $r$  hat, die Richtung der Resultante  $g$  aber die geographische Breite markiert, so ergibt sich

$$\tan(B - \varphi) = \frac{U_2}{U_1},$$

oder mit Rücksicht auf die Ausdrücke für  $U_2$  und  $U_1$  auf S. 81:

$$B = \varphi + \left( \frac{3K}{2r^2} + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2} \right) \sin 2\varphi + Gl_4. \quad (1)$$

Andrerseits hat man

$$\frac{dB}{dh} = \frac{\partial B}{\partial r} \frac{dr}{dh} + \frac{\partial B}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dh}. \quad (2)$$

Hierzu giebt (1):

$$r \frac{\partial B}{\partial r} = \left( -\frac{3K}{r^2} + \frac{3\omega^2 r^3}{2Mk^2} \right) \sin 2\varphi + Gl_4,$$

$$\frac{\partial B}{\partial \varphi} = 1 + Gl_2;$$

ferner hat man wegen der Relationen (7) auf S. 96 und in leicht ersichtlicher Entwicklung:

$$\frac{dr}{dh} = 1 + Gl_4$$

$$r \frac{d\varphi}{dh} = \left( \frac{3K}{2r^2} + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2} \right) \sin 2\varphi + Gl_4.$$

Durch Substitution in (2) folgt hieraus ohne Schwierigkeit:

$$r \frac{dB}{dh} = \left( -\frac{3K}{2r^2} + \frac{2\omega^2 r^3}{Mk^2} \right) \sin 2\varphi + Gl_4.$$

Wie (7) und (8) § 12 S. 79 zeigen, ist die Parenthese rechter Hand wesentlich gleich  $\mathfrak{h}$ . Man gelangt nunmehr leicht zu der Endformel:

$$\frac{\Delta B}{\text{in Sek.}} = \varphi'' \left\{ \mathfrak{h} \sin 2B + Gl_4 \right\} \frac{\Delta h}{r}, \quad (3)$$

d. i. für  $\mathfrak{h} = 0,00531$  und  $r = 6370000^m$  sehr nahe die Relation:

$$\frac{\Delta B}{\text{in Sek.}} = \frac{\Delta h}{5820} \sin 2B, \quad (3^*)$$

wobei  $\Delta B$  die Änderung der geographischen Breite bezeichnet, die zu der Erhebung  $\Delta h$  in Metern gehört.

Zu diesem Ergebnis gelangt man auch mit Rücksicht darauf, daß die Krümmung der Lotlinien eine Folge des Nichtparallelismus der Niveauflächen ist. Die Konvergenz der Meridiane zweier unendlich nahen Niveausphäroide im Abstände  $dh$  ist nach (3) § 18 S. 92, wenn man  $B_2 = B_1 + dB$  setzt, sehr nahe gleich  $(h_1 - h_2) : r dB$



oder  $0,00531 \sin 2B \cdot \frac{dh}{r}$ . Ebensoviel beträgt die Biegung der Lotlinien für die Erhebung  $dh$ .

In welcher Weise sich die Krümmung der Lotlinien auf die Änderung der geographischen Breite überträgt, zeigte bereits *Gauß* 1858 in einem Briefe an *Bayer*, vergl. das Protokoll der Verhandlungen der permanenten Kommission der europäischen Gradmessung von 1869 S. 30 oder *Astronom. Nachrichten* Bd. 84 1874 Nr. 1993 S. 3. Hiernach ist die Breite in der Meereshöhe  $H$  gleich

$$B + 1070'' \frac{H}{a_0} \sin 2B,$$

was mit (3\*) genügend übereinstimmt.

Eine Entwicklung auf grund der Potentialtheorie gab *Haupt* in den *Astronom. Nachrichten* Bd. 84 No. 1996 S. 50, sowie *Bruns* in seiner *Figur der Erde* S. 19. Obwohl ersterer einen nicht korrekten Ausdruck für das Potential nach *Hansen* anwendet, wird doch seine Endformel richtig. Dagegen ist wiederholt von anderen infolge fehlerhafter Berücksichtigung der Anziehung des Erdkörpers der Differentialquotient  $dB : dh$  unrichtig aufgestellt worden.

§ 22. Die äußerste Niveaufläche der Erde. Entfernt man sich in der Äquatorebene mehr und mehr von der Erde, so nimmt die Anziehung ab, die Zentrifugalkraft dagegen zu, bis endlich an einer Stelle Gleichheit eintritt. Darüber hinaus überwiegt die Zentrifugalkraft. Man kann nun diejenige Niveaufläche, in deren Äquator jene Gleichheit statt hat, als äußerste Niveaufläche bezeichnen, insofern sie unter gewissen Voraussetzungen die Grenze der Atmosphäre sein muß. Wir betrachten hier übrigens diese Fläche nur zu dem Zwecke, um an einem Beispiel zu erkennen, wie sich die Niveauflächen bei größerem Abstände von der physischen Erdoberfläche verändern.

Für das Potential  $W$  der Schwerkraft wenden wir wieder den Ausdruck

$$U = \frac{Mk^2}{r} \left\{ 1 + \frac{K}{2r^2} (1 - 3\sin^2 \varphi) + \frac{\omega^2 r^2}{2Mk^2} \cos^2 \varphi + \dots \right\} \quad (1)$$

an, welcher jetzt sicher eine weit stärkere Annäherung an  $W$  giebt, als dicht an der physischen Erdoberfläche. Differenziert man  $U$  nach  $r$  und setzt nach Einführung von  $r = a$ ,  $\sin \varphi = 0$ ,  $\cos \varphi = 1$  den Differentialquotienten gleich null, so folgt zur Bestimmung des Äquatorialhalbmessers der Grenzfläche die Gleichung

$$0 = 1 + \frac{3K}{2a^2} - \frac{\omega^2 a^3}{Mk^2} + \dots \quad (2)$$

Verstehen wir unter  $a_0$  den Äquatorialhalbmesser des Niveausphäroids der Meeresfläche und setzen wir wie bisher

$$\frac{\omega^2 a_0^3}{Mk^2} = \epsilon (1 + Gl_2), \quad (3)$$

so läßt sich (2) in die Form bringen:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 = \frac{1}{\epsilon} \left\{ 1 + \frac{3K}{2a_0^2} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \dots \right\}. \quad (4)$$

Mit Rücksicht auf den Zahlwert  $\epsilon = 1:288,4$  (vergl. § 16 S. 84) erkennt man, daß  $a : a_0$  zwischen 6 und 7 liegt; läßt man daher rechter Hand in (4) alle Glieder außer 1 weg, so giebt dies, weil  $3K:2a_0^2$  nach (6) § 15 S. 83 nahezu 1:577 ist und weil ferner die Reihe in der Klammer nach Potenzen von  $\left(\frac{a_0}{a}\right)$  fortschreitet, nur einen kleinen Fehler in der Bestimmung von  $a : a_0$ . Derselbe beträgt etwa 1 : 75000 des Wertes.

Wir setzen somit in großer Annäherung

$$a = a_0 \sqrt[3]{\frac{1}{\epsilon}} = a_0 \cdot 6,607. \quad (5)$$

Durch diese Relation ist zunächst der Äquatorialradius der Grenzfläche in Bezug zu demjenigen der Meeresfläche gebracht.

Um nun auch die Form der Grenzfläche zu ermitteln, schreiben wir statt (1):

$$U = \frac{Mk^2}{r} \left\{ 1 + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2} \cos^2 \varphi \right\}; \quad (6)$$

dieser Ausdruck entspricht genau demjenigen Falle, daß die Erde nach außen wie eine homogene Kugel anzieht, was in dem beträchtlichen Abstände der Grenzfläche bereits sehr nahe zutrifft, wie auch das Vorhergehende hinlänglich zeigt. Aus (6) folgt unmittelbar

$$r = \frac{Mk^2}{U} \left\{ 1 + \frac{\omega^2 r^3}{2Mk^2} \cos^2 \varphi \right\}. \quad (6^*)$$

Da nun für  $\cos \varphi = \text{null}$   $r$  in die kleine Halbaxe  $b$  übergeht, so ist  $b = Mk^2 : U$ . Führen wir in (6\*)  $b$  ein, sowie ferner die aus (2) folgende und für (6) modifizierte Relation  $Mk^2 = \omega^2 a^3$ , so ergibt sich

$$\frac{r}{a} = \frac{b}{a} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \cos^2 \varphi \right\}, \quad (7)$$

welche Gleichung für  $r = a$  und  $\cos \varphi = 1$  zeigt, daß  $b : a = 2/3$  ist. Die Abplattung  $(a - b) : a$  der Grenzfläche beträgt hiernach

$$\frac{1}{3} \cdot *)$$

\*) *Laplace* berechnet diese Abplattung in der *Mécanique céleste*, t. II., l. III, chap. VII p. 169. Für eine beliebige Niveaufläche setzt er, wenn  $a = 1$  genommen wird und  $\kappa$  das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator ist, als Gleichung an:

$$r^3 - \frac{2r}{\kappa b \cos^2 \varphi} + \frac{2}{\kappa \cos^2 \varphi} = 0,$$

bringt jedoch für den Fall  $\kappa = 1$  die Gleichung nicht auf die einfache Form (8\*). *Laplace* bemerkt ausdrücklich, daß diese Gleichung nur unter Voraussetzung kugelartiger Anziehung gelte. Es ist also selbstverständlich, daß er sie nicht für die Nähe der physischen Erdoberfläche angewandt haben wollte, wie *Astronom. Nachrichten* Bd. 74 1869 No. 1768 geschehen. Auch unser Citat Bd. 1. S. 18 Z. 24 ist insofern inkorrekt.

Als Gleichung der Grenzfläche (und zugleich als Gleichung ihres Meridianschnittes) erhält man jetzt aus (7):

$$\frac{r}{a} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left( \frac{r}{a} \right)^3 \cos^2 \varphi, \quad (8)$$

oder nach den gewöhnlichen Regeln der Algebra für die trigonometrische Auflösung der Gleichungen dritten Grades:

$$\frac{r}{a} = 2 \sec \varphi \cos \left( \frac{\varphi}{3} + 60^\circ \right). \quad (8^*)$$

Für das Rotationsellipsoid gleicher Abplattung besteht nach Bd. 1 S. 60 (3), da  $\delta = (a^2 - b^2) : b^2 = 5/4$  wird, die Gleichung:

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{5}{4} \sin^2 \varphi}}. \quad (9)$$

Hiernach ist  $\frac{r}{a}$  für die Grenzfläche und das Ellipsoid durch folgende Tabelle gegeben:

$\varphi$	Grenzfläche	Ellipsoid
0°	1,000	1,000
15	0,875	0,961
30	0,790	0,873
45	0,732	0,784
60	0,695	0,718
75	0,673	0,679
90	0,667	0,667

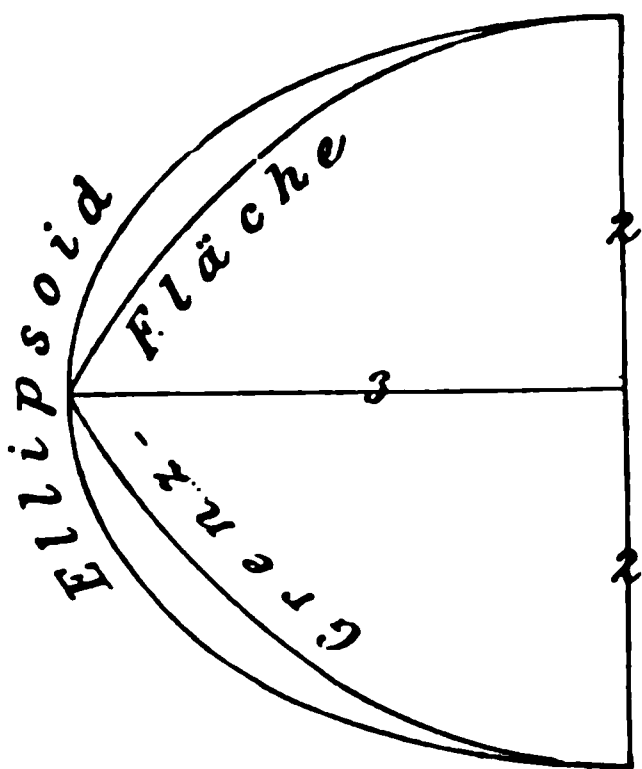


Fig. 5.

Vergl. hierzu Fig. 5. Die größte Differenz der  $\frac{r}{a}$  liegt bei  $\varphi = 21,2^\circ$ , wo deren Werte gleich sind 0,8359 bzw. 0,9271 mit 0,0912 Differenz.

Eine sehr wesentliche Abweichung zeigt die Grenzfläche von dem Ellipsoid insofern als sie am Äquator in eine Kante ausläuft. Hier ist die Fläche gegen die Äquatorbene unter  $60^\circ$  geneigt. Um dieses Resultat zu erlangen, genügt es, aus (8\*)  $dr : r d\varphi$  für  $\varphi = \text{null}$  zu bilden, d. i. die Kotangente des Neigungswinkels der Meridiankurve gegen den Radiusvektor.

Übrigens hat nur die Grenzfläche diese Kante; bei den innerhalb in ihrer Nähe gelegenen Niveauflächen findet, wie die Untersuchung

zeigt, am Äquator mit abnehmenden Werten  $\varphi$  nur eine sehr rasche Abnahme des Krümmungsradius in der Ebene der Meridiankurve statt.

Ist  $\kappa$  das Verhältniß der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator, so ist daselbst der Krümmungsradius im Meridian gleich  $a(1 - \kappa)$ .

§ 23. Historische Notizen zu dem Theorem von *Clairaut*; *Newton*.

Die wichtigsten Epochen in der Entwicklung der Theorie für die Anwendung der Schweremessungen im Meeresniveau auf die Bestimmung der Erdgestalt bezeichnen die Namen *Newton*, *Clairaut* und *Stokes*. Machte der erste eigentlich nur einen nicht ganz vollständigen Versuch, das Gravitationsgesetz auch hier zu verwerten, wobei jedoch wegen Voraussetzung der Homogenität der Erde kein zutreffendes Resultat möglich war, so gab *Clairaut* in seinem Theorem eine Formel zur wirklichen Berechnung der Abplattung der Erde aus dem Ergebnis der Schwerebeobachtungen, bei deren Begründung er für die Massen der Erde nur noch eine gewisse regelmäßige Schichtung voraussetzte, jedoch in solcher Allgemeinheit, daß auch eine hydrostatischen Gesetzen genügende Schichtung inbegriffen ist. Von allen diesen Annahmen, insoweit sie das Erdinnere betreffen, befreite endlich *Stokes* die Entwicklung des Theorems; nur über die Massenslagerung der Erdrinde bis zur Tiefe  $\alpha R$ , wenn  $R$  einen mittleren Erdradius und  $\alpha$  die Abplattung bezeichnet, sind auch hier Voraussetzungen vorhanden.

Indem wir uns nun zu einer eingehenden Besprechung der geschichtlichen Entwicklung wenden, beginnen wir mit den bezüglichlichen Sätzen und Berechnungen von *Newton* (1642—1727), die sich in seinem Werke *Philosophiæ naturalis principia mathematica* vorfinden. Ohne irgendwie die Frage zu berühren, ob die Oberfläche eine Gleichgewichtsfläche sein kann, denkt sich *Newton* in einem homogenen Rotationsellipsoid, dessen polare und äquatoriale Halbaxe im Verhältniß 100 : 101 stehen, zwei Kanäle vom Zentrum  $C$  nach dem einen Pol  $P$  und nach einem Äquatorpunkt  $A$ , gefüllt mit Wasser, und untersucht ihr Gewicht (den hydrostatischen Druck) in  $C$  mit Rücksicht auf die Zentrifugalkraft. Da bei jenem Axenverhältnisse die Gewichte sich nicht gleich herausstellen, ändert er dasselbe angemessen ab, (in *Wolfers* Übersetzung a. a. O. § 23 S. 401 unten bis S. 403). Der Kalkül vernachlässigt in der Regel die zweite Potenz der Abplattung.

Von den erforderlichen Hilfssätzen betrifft ein erster das Verhältniß, in welchem die Anziehung des abgeplatteten Ellipsoids zu der Anziehung einer mit dem Polarhalbmesser beschriebenen Kugel auf einen der Pole steht. Um es zu ermitteln, wird zuerst ein Ausdruck für die Anziehung einer Kreisfläche auf einen senkrecht über ihrem Mittelpunkt befindlichen Punkt abgeleitet und mit Hilfe dessen ein Ausdruck für das erwähnte Verhältniß der Anziehungen des

Ellipsoids und der Kugel. Die betreffenden Angaben sind ziemlich dürftig, da *Newton* die erforderlichen Summierungen auf Flächenberechnungen zurückführt, diese aber dem Leser überläßt (bei *Wolfers* S. 214 § 136 und S. 217 § 137). Als numerischen Wert des Verhältnisses giebt er 126 : 125.

Die Anziehung des abgeplatteten Ellipsoids auf einen Äquatorpunkt ergibt sich mittelst des vorigen Satzes, weil derselbe in der angegebenen Annäherung eine unmittelbare Anwendung auch auf ein längliches Rotationsellipsoid gestattet und jene Anziehung mit gleicher Annäherung als geometrisches Mittel der Anziehungen einer mit dem Äquatorialradius  $AC$  beschriebenen Kugel und eines länglichen Ellipsoids mit der Polarhalbaxe  $AC$  aufgefaßt werden kann. Die Anziehung des abgeplatteten Ellipsoids auf einen Äquatorpunkt verhält sich daher zu derselben Anziehung der umschriebenen Kugel wie 125,5 : 126, und da sich diese letztere Anziehung zu derjenigen der eingeschriebenen Kugel auf einen Pol wie 101 : 100 verhält, so folgt als Verhältnis der Anziehungen des abgeplatteten Ellipsoids auf Pol und Äquatorpunkt 501 : 500.

Ein anderer Hilfssatz lehrt, daß eine homogene, von zwei ähnlichen, ähnlich liegenden und konzentrischen Ellipsoiden begrenzte Schale einen Punkt des Hohlraumes nicht anzieht und daß hiernach die Anziehung eines Ellipsoids auf verschiedene Punkte eines Radiusvektors deren Abstand vom Zentrum proportional ist. Die Untersuchung der Anziehung jener Schale erfolgt in ähnlicher Weise durch Zerlegung in gegenüberliegende, gleich stark anziehende Elemente wie für die Kugelschale, siehe § 6 S. 63, (bei *Wolfers* S. 217 unten).

Mittelst des letztgenannten Hilfssatzes findet sich für die Gewichte der beiden Kanäle nach Pol und Äquator, abgesehen von der Zentrifugalkraft, das Verhältnis 100.501 : 101.500 oder 501 : 505. Man bemerkt leicht, wie man hieraus das entsprechende Gewichtsverhältnis bei anderem Axenverhältnis abzuleiten hat. Ist insbesondere  $\frac{1}{289}$  das Verhältnis von Zentrifugalkraft und Schwerkraft am Äquator, so kann man setzen

$$\alpha : \frac{1}{101} = \frac{1}{289} : \frac{4}{505},$$

um diejenige Abplattung  $\alpha$  zu finden, für welche das Mehrgewicht des äquatorialen Kanals im Vergleiche zum polaren ohne Rücksicht auf die Zentrifugalkraft gerade soviel beträgt, als letztere aufhebt. Wenn *Newton*  $\frac{1}{230}$  für  $\alpha$  angiebt, so liegt der Unterschied mit dem aus vorstehender Proportion folgenden Wert  $\frac{1}{231}$  innerhalb der festgesetzten Genauigkeitsgrenze. (Was eine strengere Rechnung giebt, werden wir demnächst anführen.) Die Zahl  $\frac{1}{231}$  bezeichnet auch den Überschufs der Schwerkraft am Pol über diejenige am Äquator in Bruchteilen der letzteren.

Auf eine homogene, feste und mit dünner Flüssigkeitsschicht bedeckte Erde ist die *Newtonsche* Rechnung insofern anwendbar, als das Gleichgewicht durch Einfügung der beiden Kanäle nicht gestört werden kann. Es entging jedoch *Newton* nicht, daß die thatsächliche Änderung der Schwerkraft auf der Erdoberfläche mit der geographischen Breite einem homogenen Rotationsellipsoid nicht entspricht. Er sagt darüber (*Wolfers* Übersetzung S. 408 o., in der dritten Ausgabe des lateinischen Originals [von *Cotes* 1714] S. 385 u. und 386 o.): „Der Überschufs der Pendellänge in Paris über die in diesen Breiten (nämlich in  $-7^{\circ}$  bis  $+20^{\circ}$ ) beobachteten Längen des isochronischen Pendels ist ein wenig größer als die oben berechnete (nämlich dem homogenen Rotationsellipsoid mit  $\frac{1}{230}$  Abplattung zukommende) Tabelle der Pendellängen angiebt. Die Erde muß also am Äquator etwas stärker erhöht sein, als die frühere Rechnung es ergiebt und ihre Materie muß in der Nähe des Mittelpunktes dichter sein als nahe an ihrer Oberfläche.“ Daß die erstere Schlussfolgerung nicht richtig ist, bemerkt schon *Clairaut* S. 157 seiner *Figure de la Terre* und er bemüht sich insbesondere S. 253 § LI für *Newtons* Schluss eine Erklärung zu finden. Unsere Notiz Bd. 1 S. 11 Z. 12 u. 11 von u. bedarf also insofern der Berichtigung, als *Newton* zwar die Verhältnisse bei nicht homogener Erde in betracht zog, jedoch nur teilweise zu richtigen Resultaten gelangte.

Auf den ersten Blick erscheint es in der That befremdlich, daß der größeren Variation der Schwere eine kleinere Abplattung entspricht. Diese Aussage von *Clairauts* Theorem erscheint auch offenbar dem Verfasser des Artikels „*Erde*“ in *Gehlers physik. Wörterbuch* Bd. 3 S. 915—919 nicht ganz klar, weshalb sich bereits *Borenius* in seiner S. 87 genannten Abhandlung S. 2 veranlaßt sieht, dieselbe zu besprechen. Jeder Zweifel hebt sich, wenn man beachtet, daß eine Änderung der Abplattung bei konstantem  $\tau$  auch eine veränderte Massenverteilung zur Erhaltung des Gleichgewichts fordert. Vergl. hierzu die Gleichungen (7) u. (8) § 11 S. 76.

§ 24. *Clairauts* Darstellung des *Newtonschen* Problems. In seinem Werke über die Figur der Erde beschäftigt sich *Clairaut* auch mit einer strengen Darstellung des Falles der Homogenität, welchen *Newton* behandelt hatte.\*) Diese Darstellung ist überaus interessant durch die Einfachheit des Beweises für die Möglichkeit des Gleichgewichts. Er geht von folgendem Satze aus:

Hat man zwei ähnliche, ähnlichliegende und konzentrische Ellipsen, Fig. 6, deren eines Axenpaar durch  $AQCB$  bezeichnet ist, so ist  $2QR = 2QS = MK \pm ML$ , jenachdem  $K$  und  $L$  auf derselben oder

\*) *Clairaut*, *Theorie de la Figure de la Terre, tirée des Principes de l'Hydrostatique*. Paris 1743. Unverändert abgedruckt 1808. S. 158—195 § 1—XXI.

Übrigens gab *Clairaut* schon in den *Philosophical Transactions* von 1737 (Bd. VIII S. 119 u. ff. der Ausgabe von 1809) eine Vervollständigung von *Newtons* Theorie für eine homogene Erde.



auf verschiedenen Seiten der zu  $AB$  normalen Tangente  $QM$  liegen, wenn zugleich  $ML$  parallel zu  $QR$ ,  $MK$  parallel zu  $QS$  ist, beide

Linienpaare aber zu  $AB$  entgegengesetzt gleiche Neigung haben.

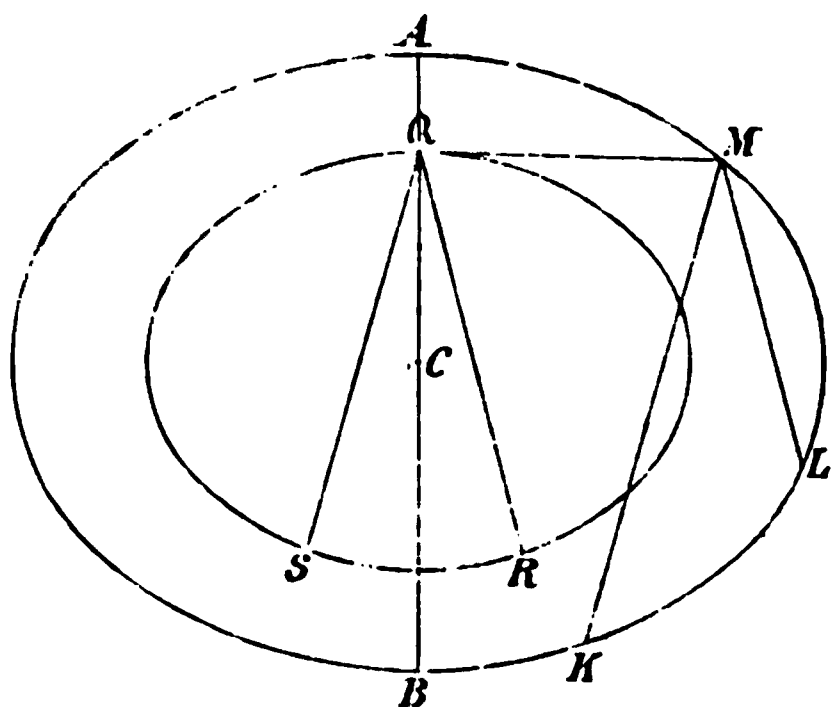


Fig. 6.

Dieser Satz läßt sich für die Kreisform leicht beweisen und hieraus durch Projektion auf die Ellipsenform übertragen. Verbindet man aber mit demselben den Satz, daß die Anziehung zweier Pyramiden mit gleichem differentiaten körperlichen Winkel auf ihre Spitzen proportional ihren Längen ist, so wird durch Zerlegung der Körper in Differential-

pyramiden leicht erkannt, daß der Punkt  $M$  der Oberfläche eines Rotationsellipsoides, dessen Meridianschnitt Fig. 7 zeigt, in den Richtungen  $MT$  und  $MQ$  parallel zu den beiden

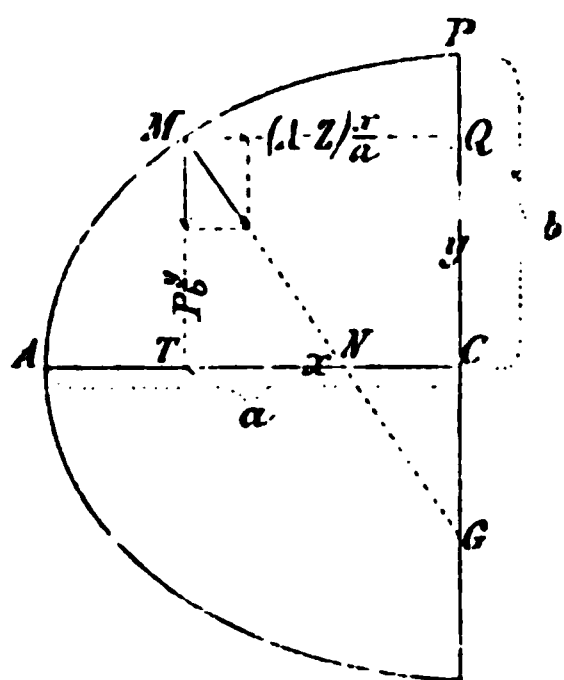


Fig. 7.

Axen gerade so angezogen wird, wie bezw. der Punkt  $Q$  von einem zum gegebenen ähnlichen, ähnlich liegenden und konzentrischen Rotationsellipsoid, dessen Oberfläche durch  $Q$  führt, und der Punkt  $T$  von einem ebensolchen Ellipsoid durch  $T$ .

Nennt man  $P$  die Anziehung in  $P$ ,  $A$  die Anziehung und  $Z$  die Zentrifugalkraft in  $A$ , beachtet man ferner, daß die Resultante der auf  $M$  wirkenden Kräfte die Richtung der Normale  $MG$  haben muß, so folgt sofort mit Benutzung einer leicht zu entwickelnden Relation für  $QG$ , als Bedingung des Gleichgewichts die merkwürdige Gleichung:

$$(A - Z) a = P b . \quad (1)$$

Die Möglichkeit des Gleichgewichts beim homogenen Rotationsellipsoid erhellt also bereits ohne Kenntnis der Ausdrücke für die Anziehung, lediglich als Folge des Umstandes, daß die Koordinaten von  $M$  aus der Gleichung verschwinden.

Die weitere Rechnung bietet insofern weniger Bemerkenswertes, als *Clairaut*  $A$  und  $P$ , ausgehend von einer Zerlegung des Ellipsoids in Differentialpyramiden, ganz in jetzt üblicher Weise durch Integration berechnet und zu den bekannten Ausdrücken gelangt, welche in unseren Bezeichnungen formell unerheblich verändert lauten:



$$A = 2\pi k^2 a \frac{(1 + e'^2) \arctan e' - e'}{e'^3} \quad (2)$$

$$P = 4\pi k^2 b \frac{(1 + e'^2)(e' - \arctan e')}{e'^3},$$

die Dichtigkeit der Masse gleich 1 gesetzt und  $(a^2 - b^2) : b^2$  mit  $e'^2$  bezeichnet. Wendet man die Reihenentwicklung für  $\arctan$  an und setzt  $Z : (A - Z) = \tau$ , so giebt obige Gleichung

$$\tau = \frac{2}{5} e'^2 - \frac{18}{175} e'^4 + \dots \quad (3)$$

oder, wenn man mit *Clairaut*  $(a - b) : b$  einführt und darauf reduziert:

$$\frac{a - b}{b} = \frac{5}{4} \tau \left( 1 + \frac{1}{56} \tau + \dots \right). \quad (4)$$

Den kleinen Bruch in der Klammer vernachlässigt *Clairaut*. Beachtet man noch die Beziehung von  $(a - b) : b$  zur Abplattung  $\alpha$ , so wird mit großer Schärfe

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{4}{5\tau} + 1 + \dots \quad (5)$$

Setzt man also

mit *Newton*  $\tau = \frac{1}{289}$ , so folgt  $\frac{1}{\alpha} = 232,2$

mit *Clairaut* „  $\frac{1}{287,52}$  „ „ 231,0

nach S. 84 (2\*) „  $\frac{1}{288,41}$  „ „ 231,7.

*Clairaut* zeigt noch, daß die Schwerkraft auf dem homogenen, im Gleichgewicht befindlichen Rotationsellipsoid proportional der Normale  $MN$  (d. h. nach Bd. 1 S. 40 proportional zu  $1 : \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$ ) ist, was man, ohne hier seiner etwas umständlichen Beweisform zu folgen, leicht aus Dreieck  $MTN$  Fig. 7 entnimmt.

Zu derselben Formel für  $\frac{1}{\alpha}$  gelangt man natürlich durch Einführung

der Werte

$$K = \frac{1}{5} a^2 \alpha (2 - \alpha)$$

$$D = \frac{3}{2} a^4 \alpha^2, \quad (6)$$

welche dem Potential des homogenen Rotationsellipsoids angehören, in die Gleichung (6) § 15 S. 83. Das Potential des homogenen Rotationsellipsoids ist weiterhin abgeleitet. Durch Vergleichung der dafür in § 31 (8) dieses Kapitels gegebenen Formel mit dem Ausdruck für  $U$  in § 12 (1) S. 77 kann man die Angaben für  $K$  und  $D$  verifizieren.

§ 25. Huygens (1629—1695). Da uns das Werk\*), in welchem

\*) *Huygens, Traité de la Lumière. Avec un Discours de la Cause de la Pesanteur.* 1690.

Hierbei sei bemerkt, daß *van Tricht* S. 6 des *Jahrb. der Fortschr. d. Mathematik* von 1877 (publ. 1880) für die angewandte Schreibweise des Namens des Autors eintritt, weil er selbst sich so geschrieben habe.

*Huygens* nach *Todhunter* seine Berechnung der Erdabplattung gegeben hat, nicht vorliegt, so beschränken wir uns darauf nach dessen *History of the mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth* Bd. 1 S. VI und 28 mitzuteilen, daß *Huygens* sich hierbei ebenfalls wie *Newton* der Kanäle bedient. Aus dem Wert  $\epsilon = 1/289$  berechnet sich nach ihm  $\alpha = 1/378$  sowohl unter der Annahme, daß die Zentralanziehung (Bd. 1 S. 11) konstant, als irgendwie von der Distanz abhängig ist. Die Oberfläche des Sphäroids stellt sich normal zur Resultante aus Zentralanziehung und Zentrifugalkraft. Die Größe der Resultante, die Schwere, variiert vom Pol bis zum Äquator, wenn man die Zentralanziehung umgekehrt proportional dem Quadrate der Distanz setzt, um  $2/289$ , was allerdings den Verhältnissen der Erde nicht entspricht, wie *Huygens* keineswegs übersieht.

Das *Huygenssche* Problem wird auch ausführlich von *Clairaut* in seiner *Figure de la Terre* behandelt (S. 28—32 § XIV u. XV; S. 139 bis 143 § LXXIII u. LXXIV). Er findet, daß eine Gleichgewichtsoberfläche nur möglich ist, wenn die Zentralkraft lediglich eine Funktion von der Distanz ist und z. B. nicht etwa noch von der Richtung der Kraft. Indem er sodann ebenfalls einen polaren und äquatorialen Kanal betrachtet, bedient er sich in übersichtlicher Weise folgender graphischen Methode. In Fig. 8 sei die Ordinate  $QQ'$

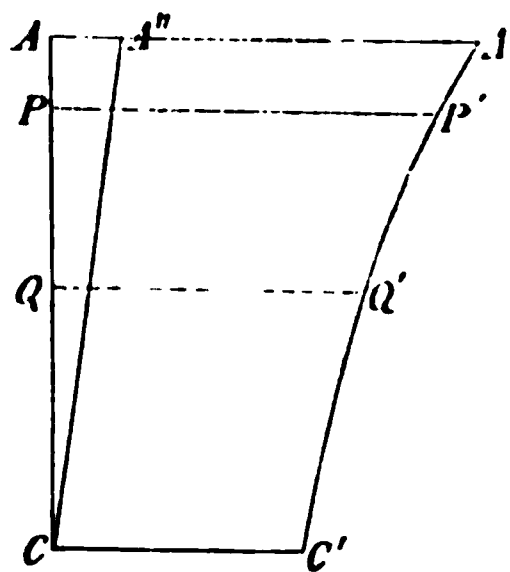


Fig. 8.

proportional der Anziehung in der beliebigen Distanz  $CQ$ . Dann stellt die Fläche  $CAC'A'$  über dem äquatorialen Halbmesser  $CA$  das Gewicht (den hydrostatischen Druck) des äquatorialen Kanals für die Dichtigkeit 1 und den Querschnitt 1 vor, ohne Rücksicht auf die Zentrifugalkraft. Wird diese am Äquator durch  $AA''$  ausgedrückt, so giebt das Dreieck  $AA''C$  die Gewichtsverminderung durch die Zentrifugalkraft. Es muß nun das Gewicht  $CAC'A'$  des äquatorialen Kanals gleich sein demjenigen des polaren, d. i.  $CP'C'P'$ , oder was dasselbe ist, für jedes nur von der Distanz abhängige Gesetz der Zentralanziehung muß Fläche  $AA''C$  der Fläche  $APA'P'$  gleich sein. Bezeichnet  $Z$  wieder die Zentrifugalkraft und  $A$  die Anziehung am Äquator, so ist hiermit angenähert  $\frac{1}{2} Za = \alpha \alpha A$ , oder ebenso genau  $\alpha = \frac{1}{2} \epsilon$ .

Die Potentialtheorie zeigt sehr bequem die Resultate der *Clairautschen* Untersuchung. Ist  $W$  das Potential der Schwere,  $V$  dasjenige der Anziehung, so folgt

$$W = V + \frac{1}{2} r^2 \omega^2 \cos^2 \varphi$$

bei der üblichen Bedeutung von  $r$ ,  $\omega$  und  $\varphi$ .  $W = \text{Konstante}$  ist die Gleichung einer Niveauläche, also auch der Gleichgewichtsoberfläche.

Giebt es nun kein Potential  $V$ , so existiert auch keine Gleichgewichtsoberfläche. Ein  $V$  kann aber nur existieren als Funktion von  $r$  allein, denn da  $\frac{\partial V}{\partial r}$  die ganze Anziehung ist, so muß der Differentialquotient von  $V$  nach  $\varphi$  null sein, weil derselbe eine zur radialen Richtung normale Komponente vorstellt.

Gilt nun  $V_a$  für den Äquator,  $V_p$  für den Pol der Gleichgewichtsoberfläche, so wird  $V_a + \frac{1}{2} a^2 \omega^2 = V_p$ . Da  $V_p - V_a$  sehr nahe  $\Delta a g$  ist, erhält man hieraus  $a$  wie oben.

§ 26. Clairaut (1713 — 1765). Der erste Teil der Schrift *Theorie de la Figure de la Terre, tirée des Principes de l'Hydrostatique* ist der Hydrostatik gewidmet, vor allem deren Prinzipien. Bisher hatte man bei der Betrachtung flüssiger, rotierender Sphäroide die Gestalt der Oberfläche entweder nach dem Prinzip von *Huygens*, daß sie normal zur Resultante der Kräfte stehen müsse, berechnet oder mittelst des Prinzips von *Newton*, daß geradlinige Kanäle, welche von der Oberfläche nach dem Zentrum führen, gleiches Gewicht besitzen müssen. *Clairaut* zeigt aber, daß diese Prinzipien allein nicht erkennen lassen, ob thatsächlich Gleichgewicht besteht. Dieses ist in der That nur dann möglich, wenn die Komponenten der nach drei rechtwinkligen Axen zerlegten Resultante der Kräfte in einem Punkte sich als die bezüglichen partiellen Differentialquotienten einer Funktion der Koordinaten dieses Punktes auffassen lassen, so daß also zum Bestehen des Gleichgewichtes die Existenz eines Potentials der Kräfte erforderlich ist. *Clairaut* erkannte dies wenigstens dem Wesen nach, ohne jedoch den Begriff des Potentials zu erfassen.\*) Er weist es auf doppelte Art nach, einmal ausgehend von dem Prinzip, daß jeder geschlossene Kanal von beliebiger Form im Gleichgewicht sein müsse, sodann von dem Prinzip aus, daß der Abstand zweier unendlich benachbarten Niveauflächen überall im umgekehrten Verhältnis zu der Kraft daselbst stehe. Mit Hilfe dessen und an der Hand der thatsächlichen Schwereverhältnisse auf der Erdoberfläche gelingt es dann, die Unhaltbarkeit der Annahme einer Zentralanziehung, welchem Gesetze sie auch folge, nachzuweisen. [Vergl. weiter die Notizen S. 10 § 8 und S. 108 § 25.]

Aus der Einleitung der Schrift geht hervor, weshalb *Clairaut* ausführlich bei der Hypothese der Zentralanziehung verweilt. Danach entspricht dieselbe der Wirbeltheorie des *Descartes*\*\*), welche nur sehr allmählich von *Newtons* Gravitationstheorie verdrängt wurde,

\*) Vergl. unsere Anmerkung zu Kap. 1 § 8 S. 10. Daß die Komponenten der Anziehung beim *Newtonschen* Attraktionsgesetz partielle Differentialquotienten sind, war hiernach wohl bereits *Clairaut* bekannt. Es wird diese Erkenntnis sonst *Lagrange* zugeschrieben, von dem sie in der That zuerst frei von hydrostatischen Nebenbeziehungen deutlich ausgesprochen wird.

\*\*) Vergl. über dieselbe z. B. *Whewell*, *Geschichte der induktiven Wissenschaften*, Bd. 2 S. 136 u. ff.

Es galt also nicht nur diese auf die Probleme der Naturwissenschaft anzuwenden, sondern auch jene direkt zu widerlegen. Nach dem Bekanntwerden der *Newtonschen* Untersuchungen sahen sich übrigens die Anhänger jener Theorie bereits zu dem Zugeständnis genötigt, in der Sonne und den Hauptplaneten Gravitationszentren anzunehmen und die Anziehung umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes vorauszusetzen, während anfangs zur Erklärung der als konstant betrachteten Erdschwere ein Gravitationszentrum mit konstanter Wirkung ausreichte.

Der zweite Teil des *Clairautschen* Werkes enthält in den Paragraphen XXIII bis XXIX, XXXVII und XLI bis XLIX S. 198 bis 218, 225 und 233 bis 250 die speziellen Untersuchungen über die Erdgestalt auf grund des *Newtonschen* Anziehungsgesetzes. *Clairaut* bedient sich dabei überall der Differential- und Integralrechnung in der jetzt üblichen Weise, vereinfacht die Betrachtung aber wesentlich dadurch, daß er nur die erste Potenz der Abplattung berücksichtigt, diese somit strenggenommen als unendlich kleine GröÙe behandelt. Entsprechend wird das Verhältniß der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator wie eine unendlich kleine GröÙe von derselben Ordnung eingeführt.

Der Gang der Entwicklung ist nun in den Hauptpunkten folgender. Zunächst wird die Anziehung einer aus homogenen, konzentrischen Schichten gebildeten Kugel auf einen Punkt außerhalb ermittelt; sodann wird ein Ausdruck für diejenige Komponente der Anziehung einer Kreisfläche auf einen nahezu normal über ihrem Mittelpunkt gelegenen Punkt aufgestellt, welche parallel zur Kreisfläche (in der Richtung der Excentricität) wirkt, und mittelst dieses Satzes dann zunächst für ein homogenes, abgeplattetes Rotationsellipsoid, darauf aber für ein geschichtetes Rotationsellipsoid diejenige Komponente der Anziehung auf einen außerhalb gelegenen Punkt berechnet, welche in die Richtung normal zum Radiusvektor fällt. Das geschichtete Rotationsellipsoid besteht aus einem Kern und einer beliebig dicken homogenen Flüssigkeitsschicht; in dem Kern sind die Flächen gleicher Dichte konzentrische, koaxiale Rotationsellipsoide, deren Abplattung und Dichtigkeit beliebige Funktionen der kleinen Halbaxe sind. Mittelst dieser Entwicklungen wird die Bedingungsgleichung dafür, daß die Resultante aus Anziehung und Zentrifugalkraft auf der Oberfläche überall normal steht, aufgestellt und schließlich durch die Annahme vereinfacht, daß die Dicke der äußersten Schicht unendlich klein sei. Bezeichnen wir mit  $b$ ,  $\alpha$  und  $\sigma$  die kleine Halbaxe, Abplattung und Dichtigkeit einer Fläche gleicher Dichtigkeit, mit  $b_0$  und  $\alpha_0$  die ersteren beiden GröÙen für die Oberfläche und mit  $\tau_0$  das Verhältniß der Schwerkraft zur Zentrifugalkraft am Äquator derselben, so lautet die Bedingungsgleichung:

$$10 A \mathfrak{a}_0 - 2 D = 5 A \mathfrak{r}_0 \quad (1)$$

für

$$A = \frac{1}{b_0^2} \int_0^{b_0} \Theta b^2 db, \quad D = \frac{1}{b_0^4} \int_0^{b_0} \Theta d(b^5 \mathfrak{a}). \quad (2)$$

Bis dahin durfte die Anziehung des Ellipsoides in radialer Richtung mit Vernachlässigung der Abplattung berechnet werden. Diese Anziehung wird nunmehr genauer ermittelt und dabei nachgewiesen, daß die Anziehung auf einen äußeren Punkt  $M$  ebenso groß ist, wie diejenige eines Rotationsellipsoides, dessen Rotationsaxe nach Lage und Größe zusammenfällt mit dem Radiusvektor  $NC$  des gegebenen Ellipsoids in Richtung  $MC$ , und dessen Masse derjenigen des letzteren gleich ist. Zum Zwecke des Nachweises wird das gegebene Ellipsoid durch unendlich viele parallele Schnitte zerlegt, welche zu  $NC$  konjugiert liegen und gezeigt, daß die zentrale Anziehung einer nahezu kreisförmigen Ellipse auf einen Punkt, der nahezu normal über deren Mittelpunkt liegt, der Anziehung eines flächengleichen Kreises, über dessen Mittelpunkt der angezogene Punkt genau normal sich befindet, gleich gesetzt werden kann. Als Anziehung eines abgeplatteten, homogenen Rotationsellipsoides mit der Dichtigkeit 1 auf einen Punkt in der Drehaxe mit dem Zentrumsabstand  $r$  wird erhalten

$$4 \pi k^2 \left\{ \frac{b^3}{3 r^2} + \left[ \frac{2 b^3}{3 r^2} - \frac{2 b^5}{5 r^4} \right] \mathfrak{a} \right\}. \quad (3)$$

Hieraus folgt mittelst des vorigen Satzes (da innerhalb der festgesetzten Genauigkeit der Ausdruck (3) auch für negative  $\mathfrak{a}$  gilt) die Anziehung desselben Ellipsoids auf einen Punkt der Äquatorebene gleich

$$4 \pi k^2 \left\{ \frac{b^3}{3 r^2} + \left[ \frac{2 b^3}{3 r^2} + \frac{b^5}{5 r^4} \right] \mathfrak{a} \right\}, \quad (4)$$

und aus (3) und (4) leitet sich endlich ab, daß die Anziehung eines wie oben angegeben geschichteten Ellipsoides auf einen Punkt des Äquators kleiner ist als auf einen der Pole um

$$4 \pi k^2 \mathfrak{a}_0 \left( 2 A - \frac{3}{5} D \right). \quad (5)$$

Fügt man hierzu für die Zentrifugalkraft  $4 \pi k^2 A \mathfrak{r}_0$ , so ergibt sich der Überschuss der Schwerkraft am Pol über diejenige am Äquator. Denselben im Verhältnis zur Schwerkraft mit  $\mathfrak{b}_0$  bezeichnend, erhalten wir also

$$\mathfrak{b}_0 = 2 \mathfrak{a}_0 - \frac{3}{5} \frac{D}{A} + \mathfrak{r}_0, \quad (6)$$

hieraus und aus (1) aber unter Elimination von  $D : A$  das Theorem

$$\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}_0 = \frac{5}{2} \mathfrak{r}_0.$$

Noch immer vorkommender fehlerhafter Auffassung wegen muß nochmals betont werden, daß die Schichtung des Rotationsellipsoids keineswegs nach ähnlichen Flächen gedacht ist. Allerdings hat *Clairaut* in einer Abhandlung in den *Phil. Transactions* von 1738 (Ausgabe von 1809: Bd. VIII S. 207) sein Theorem zuerst für solche bewiesen, aber sein Buch von 1743 enthält die mit Rücksicht auf eine wesentlich flüssige oder flüssig gewesene Erde wichtige Erweiterung des Beweises, ohne ihn jedoch lediglich auf diesen Fall zu beschränken. S. 265 § LV wird noch bewiesen, daß man die Trennungsflächen der Schichten einer rotierenden Flüssigkeitsmasse in hier ausreichender Annäherung, d. h. abgesehen von der zweiten Potenz der Abplattung, als Rotationsellipsoide betrachten darf — oder genauer gesagt, es wird bewiesen, daß die Voraussetzung dieser Form zu keinem Widerspruch führt.

Die Gleichung (1) entspricht der Formel (2) § 12 S. 77; sie giebt

$$a_0 = \frac{1}{5} \frac{D}{A} + \frac{c_0}{2},$$

während jene  $\frac{8}{2} K: a_0^2$  als erstes Glied hat. Da nun fürs homogene Ellipsoid mit der Dichtigkeit 1 in hier genügender Annäherung

$$KM = \frac{2}{5} b^2 a M = \frac{8}{15} \pi b^5 a \quad \text{mit} \quad M = \frac{4}{3} \pi b^3$$

ist (vergl. weiterhin § 31), so wird fürs geschichtete Ellipsoid in gleicher Annäherung

$$M = 4\pi b_0^2 A \quad KM = \frac{8}{15} \pi b_0^4 D \quad \frac{3}{2} \frac{K}{a_0^2} = \frac{1}{5} \frac{D}{A}.$$

Setzt man in dem Potential der Anziehung des homogenen Rotationsellipsoids

$$\frac{Mk^2}{r} \left\{ 1 + \frac{K}{2r^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi) + \dots \right\}$$

$M$  genauer gleich  $\frac{4}{3} \pi a^2 b$ , so verifizieren sich auch (3) und (4) leicht als partielle Differentialquotienten nach  $r$  für  $\varphi = 90^\circ$  und  $\varphi = \text{null}$ .

§ 27. Die Einführung des Potentials in die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Schwerkraft und Erdgestalt beginnt gegen Ende des vorigen Jahrhunderts (zunächst ohne Einführung des Namens Potential). Nach *Todhunter, History of Attraction* Bd. 2 S. 95–106, hat *Legendre* (1752–1833) in den Memoiren der französischen Akademie der Wissenschaften von 1789 (publ. 1793) das *Clairautsche* Theorem mit zweiten Potenzen der Abplattung abgeleitet und zwar mit Hilfe einer Entwicklung von  $V$ , dem Potential der Anziehung der wie bei *Clairaut* geschichteten Erde, nach negativen Potenzen des Radiusvektors des angezogenen Punktes, wobei die Konvergenz allerdings unmittelbar evident nur außerhalb der umschreibenden Kugel ist (vergl. § 9 S. 70). Die Art der Entwicklung



gestattet aber, wie hervorgehoben wird, in das Theorem Glieder beliebig hoher Ordnung aufzunehmen und auch den Ausdruck für den Radiusvektor der Oberfläche aufzustellen.

*Laplace* (1749–1827) beschäftigt sich in der *Mécanique céleste* sowohl im dritten Buche (2. Bd. 1799) wie im elften Buche (5. Bd. 1825) mit der Figur der Erde und ihrer Beziehung zur Schwerkraft. Am ersteren Orte S. 99–103 wird bei Ableitung des *Clairautschen* Theorems nur die erste Potenz der Abplattung berücksichtigt; im Ausdruck für den Radiusvektor der Flächen gleicher Dichtigkeit wird demgemäß auch nur die erste Potenz der Abplattung angesetzt, so daß sie innerhalb dieser Genauigkeit Rotationsellipsoiden entsprechen. Sie werden übrigens so gewählt, wie die Hydrostatik für flüssigen Zustand verlangt. S. 105–108 behandeln die Weiterentwicklung bis zur zweiten Potenz der Abplattung einschliesslich, ohne spezielles Eingehen auf *Clairauts* Theorem. Im Bd. 5 S. 22–57 ist über die Flächen gleicher Dichtigkeit weiter keine Annahme gemacht, als diejenige, daß sie Rotationsflächen seien. Ausserdem ist bei den Untersuchungen über die Figur der mathematischen Erdoberfläche überhaupt sogar auf die irreguläre Bedeckung des Festlandes durch das Meer Rücksicht genommen.

Der Ausdruck für  $V$  ausserhalb der umschreibenden Kugel wird stillschweigend als bis zur Oberfläche konvergent betrachtet.

Die Entwicklungen in der *Méc. cél.* und in einigen vorausgehenden Abhandlungen von *Legendre* und *Laplace* (vergl. *Todhunter* a. a. O. Bd. 2. S. 23, 26, 43 und 44) sind dadurch epochemachend, daß bei denselben die Kugelfunktionen oder *Laplaceschen* Koeffizienten, welche sich später für die mathematische Physik von grosser Wichtigkeit erwiesen, auftreten. Nach *Todhunter* a. a. O. Bd. 2 S. 23 gebührt *Legendre* die Ehre der Einführung der Kugelfunktionen.

*Eduard Schmidt* giebt im ersten Teile seines *Lehrbuchs der mathematischen Geographie* (Göttingen 1829) S. 326–339 eine Ableitung des *Clairautschen* Theorems für die Voraussetzung einer Schichtung, welche auch im Falle des Flüssigseins bestehen bleiben würde; doch wird nur die erste Potenz der Abplattung berücksichtigt. Es ist also wesentlich wieder die Darstellung des Theorems durch *Laplace*, *Méc. cél.*, I. III. Die Entwicklung von  $V$  für Punkte ausserhalb der umschreibenden Kugel wird ebenfalls stillschweigend als bis zur Oberfläche gültig vorausgesetzt.

*Paucker* giebt 1854 an dem S. 88 mitgeteilten Orte ausführliche Entwicklungen mit Rücksicht auf die 2. Potenz der Abplattung. Als Flächen gleicher Dichtigkeit nimmt er Rotationsflächen, die zwar nicht als Ellipsoide aber als einander ähnliche Flächen vorausgesetzt werden. Ausserdem fehlt auch hier jede Erörterung der Konvergenz der Entwicklung von  $V$ .



Nach *Todhunter* hat auch bereits *Jvory* sich mit den höheren Gliedern des *Clairautschen* Theorems beschäftigt.

Der Umstand, daß die Ableitung des *Clairautschen* Theorems mehrfach so erfolgte, als sei die Erde ganz flüssig (während doch schon der Erfinder einen größern Umfang der Gültigkeit sicher stellte), scheint die Meinung erweckt zu haben, als könne man aus der nahen Übereinstimmung der für die Erdabplattung aus Schwere- und aus Gradmessungen erhaltenen Werte schließen, die Erde sei wenigstens früher einmal flüssig gewesen.\*) Dieses ist die Ursache, weshalb *Stokes*, wie er in seiner bereits Bd. 1 S. 18 citierten Abhandlung *On the Variation of Gravity* 1849 S. 672 sagt, das Potential der Schwerkraft und daraus das mehrgenannte Theorem in einer von allen Voraussetzungen über die Schichtung der Massen im Erdinnern freien Weise abzuleiten versuchte, um dadurch die Meinung über die Bedeutung jener Übereinstimmung zu zerstreuen. Von der Theorie der Kugelfunktionen ausgehend gelangt *Stokes* zu einem Ausdruck, welcher im wesentlichen mit demjenigen unter Nr. (7) S. 60 übereinstimmt.\*\*\*) Da er diesen Ausdruck ebenfalls über die aus der Entwicklung hervorgehenden Grenzen der Konvergenz hinaus bis zur Oberfläche anwendet, so denkt er sich (S. 676) die ganze Masse der Erde innerhalb einer der Oberfläche eingeschriebenen, zum Erdschwerpunkt konzentrischen Kugelfläche derart verteilt, daß das Potential  $W$  der Schwerkraft außerhalb der Oberfläche sich nicht ändert: „*The possibility of such a distribution will be justified by the result, provided the series to which we are led prove convergent*“. Ob *Stokes* sich wirklich an einer Stelle mit dem Nachweis der Konvergenz beschäftigt, war uns nicht möglich festzustellen. Infolge dessen haben wir die Theorie nach eigener Ansicht ergänzen müssen; vergl. § 9 S. 70 u. ff. Im nächsten Kapitel kommen wir überdies in weiterer Ausführung auf diese Angelegenheit zurück.

\*) Einen ähnlichen Irrtum begeht *Hansen* in der Darlegung seiner Berechnung der Mondstörungen, 1. Abt., im 6. Bde. der Abh. der math.-physik. Cl. der Ges. d. Wiss. zu Leipzig 1864 S. 469. Hier kommt er auf unsere Gl. (8) S. 76, welche schon *Laplace* in der *Méc. cél.* giebt, und er ist der Ansicht, daß diese Gleichung die Abplattung der Flächen gleicher Dichte im Innern ebenso groß wie diejenige der Meeresfläche voraussetze, daß ferner eine Nichtübereinstimmung der Abplattungen eine Unsicherheit in dem aus Gl. (8) berechneten Werte von  $K$  erzeuge, da man nur das  $\alpha$  der Oberfläche einführen könne. — Im Gegenteil ist aber diese Gleichung ganz unabhängig von unserer Kenntnis über die Massenlagerung im Erdinnern; sie setzt nur voraus, daß für das Potential  $W$  die einfache Form  $U$  § 11 (1) S. 75 als genügende Annäherung nachgewiesen ist, wie in den vorangehenden Paragraphen (9) u. (10) geschehen.

\*\*) Eine kurze Darstellung in der *Stokesschen* Manier giebt *Pratt* in der Abh.: *A Treatise on Attractions, Laplace Functions and the Figure of the Earth*, London 1860, p. 89—96.

*H. Bruns* betrachtet als Normalform für  $W$  den von uns § 17 S. 90 citierten einfachen Ausdruck für  $U$ . Er erklärt, daß  $W - U$  auf grund der Erfahrungen eine in 1. Annäherung zu vernachlässigende Größe sei, ohne jedoch diese Erfahrungen anzugeben. Er zeigt aber weiterhin, wie bei gegebenem Werte der Differenz  $W - U$  ein Schluß auf die wahre Form der Niveaflächen möglich ist. Auf letzteres kommen wir ebenfalls im nächsten Kapitel zu sprechen.

Wir dürfen hier noch eines von uns gegebenen Beweises des *Clairautschen* Theorems in Kürze gedenken, den wir mittelst eines strengen Ausdrucks für das Potential  $W$  der Schwerkraft gegeben haben.\*) Diesen Ausdruck kann man im Anschluß an die Bemerkungen in § 9 S. 70 leicht ableiten. Man muß nämlich, wenn ein Punkt  $P'$  der Erde so nahe liegt, daß sein Radiusvektor  $r'$  kleiner ist als der Radiusvektor  $r$  für einen Teil der Erdmasse, zum Teil die Reihe (1), zum Teil die Reihe (2) S. 70 anwenden. Ist  $A$  der größte Radiusvektor für Erdmassen, so wird danach

$$W = k^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{r'^{i+1}} \int_0^{r'} r^i P_i dm + r'^i \int_r^A \frac{P_i}{r^{i+1}} dm \right\} + \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 \cos^2 \varphi'.$$

Um an der Hand dieses Ausdruckes das *Clairautsche* Theorem abzuleiten, bedarf es einer Idealisierung der Massenlagerung in der Nähe der Oberfläche nicht mehr, dagegen wird über die Gestalt der mathematischen Oberfläche selbst eine Voraussetzung nötig. Es ist diese: Radiusvektor und Normale derselben weichen nirgends um Winkel von einander ab, welche (in Bogenmaß) Beträge von der Ordnung der Abplattung  $\alpha$  überschreiten. Die Resultate astronomischer Messungen, vergl. den Schluß von § 9 S. 71, in Verbindung mit denjenigen der Gradmessungen geben ohne Zweifel der Thatsächlichkeit des Vorausgesetzten einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit und es kann daher dieser Beweis dazu dienen, die Gültigkeit des *Clairautschen* Theorems ohne Einführung einer Massenidealisierung sicher zu stellen.

§ 28. Sätze aus der Theorie der Kugelfunktionen. Für verschiedene weitere Entwicklungen bedürfen wir noch einiger Sätze aus der Lehre von den Kugelfunktionen, wegen deren Begründung wir auf *Dirichlets* Vorlesungen über diesen Gegenstand verweisen.\*\*)

Bereits § 7 S. 65 ist bei der Einführung der Kugelfunktionen darauf hingewiesen worden, daß nach *Dirichlets* Untersuchungen jede beliebige Funktion zweier Variablen, welche wie Breite und Länge auf der Kugelfläche variieren, immer und nur auf eine Weise nach Kugelfunktionen entwickelt werden kann. Die Entwicklung läßt sich, vergl. S. 68 (7), in die Form bringen:

\*) Zeitschr. für Vermessungswesen 1878 Bd. 7 S. 121—141.

\*\*) Vergl. den vollständigen Titel S. 14 d. Bds.

$$f(\varphi', \lambda') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n f(\varphi, \lambda) \cos \varphi d\varphi, \quad (1)$$

oder kürzer, wenn wir das Flächenelement  $\cos \varphi d\varphi d\lambda$  mit  $d\sigma$  bezeichnen und die Integration nach  $\varphi$  und  $\lambda$  über die ganze Kugel-  
fläche vom Radius 1 erstreckt denken:

$$f(\varphi', \lambda') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int P_n f(\varphi, \lambda) d\sigma. \quad (1^*)$$

Hierin bedeuten  $\varphi$  und  $\lambda$  die Variablen Breite und Länge,  $f(\varphi, \lambda)$  die darzustellende Funktion und  $P_n$  für  $n > 1$  die eingangs des 2. Kapitels, insbesondere S. 57 behandelten Entwicklungskoeffizienten, für  $n = 0$  aber 1.

Die Glieder der Entwicklung (1) heißen Kugelfunktionen und zwar nullten, ersten, zweiten Ranges u. s. w. für  $n = 0, 1, 2 \dots$ . Wie sich für  $n =$  null bis vier aus den betreffenden  $P_n$  die Kugelfunktionen bilden, ist bereits in § 7 S. 65 angegeben worden.

Bezeichnen nun  $K_n$  und  $K'_n$  Kugelfunktionen vom  $n$ . Range bezw. der Variablen  $\varphi, \lambda$  und  $\varphi', \lambda'$ , so gelten folgende zwei Sätze. Es ist

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int P_n K_n d\sigma = K'_n \quad (2)$$

und ferner für  $m \geq n$ :

$$\int P_m K_n d\sigma = 0, \quad (3)$$

sowie allgemeiner

$$\int K_m K_n d\sigma = 0. \quad (4)$$

Hierin ist  $d\sigma = \cos \varphi d\varphi d\lambda$  zu setzen und die Integration über alle Werte  $\varphi$  und  $\lambda$  der Kugel-  
fläche zu erstrecken.

Um sich eine deutliche Vorstellung von diesen Sätzen zu machen, ist es für den Leser nützlich, die Ausdrücke  $P_n$  S. 57 und  $K'_n$  S. 65 zu vergleichen. In (2) geht  $K'_n$  aus  $K_n$  durch Vertauschung von  $\varphi$  mit  $\varphi'$  und  $\lambda$  mit  $\lambda'$  hervor.

Auf einen direkten Beweis dieser Sätze, die für alle Anwendungen von Kugelfunktionen unentbehrlich sind, müssen wir ebenso wie auf den Beweis des Satzes (1) verzichten, da dies ein tieferes Eindringen in die Natur der Kugelfunktionen und somit mehr Raum erfordert, als wir hierauf mit Rücksicht auf die verhältnismäßig geringe Bedeutung der von uns beabsichtigten Anwendungen verwenden können. Ein direkter Beweis der Sätze (2) bis (4) findet sich bei *Dirichlet, Vorlesungen*, S. 86–88.

Wenn übrigens Satz (1) feststeht, so folgen wenigstens (2) und (3) unmittelbar. Denn setzt man rechter Hand für  $f(\varphi, \lambda)$  die Kugelfunktion  $K_n$  und beachtet, daß das Integral von  $P_m K_n d\sigma$  eine Kugelfunktion  $m$ . Ranges

ist, die rechte Seite sich aber auf  $K_n'$  reduzieren muß, so müssen alle diese Integrale für  $m \geq n$  verschwinden, womit (3) und (2) hervorgehen.

Aus (3) folgt nun leicht (4): Ein Blick auf S. 57 und 65 zeigt nämlich, daß  $P_m$  und die allgemeine Kugelfunktion  $K_n$  aus  $(2m+1)$  bzw.  $(2n+1)$  Gliedern der Form Funktion  $\varphi$  mal  $\cos p\lambda$  oder  $\sin p\lambda$  bestehen, wenn  $p$  die ganzen Zahlen von null bis  $m$  oder  $n$  bedeutet.

Verstehen wir nun unter  $K_n$  zunächst nur ein Glied mit  $\frac{\cos}{\sin} p\lambda$ , so fällt im Integral (3) von vornherein der Einfluß aller Glieder von  $P_m$  weg, die nicht  $\frac{\cos}{\sin} p\lambda$  enthalten, da das Integral von  $\frac{\cos}{\sin} p\lambda \cdot \frac{\cos}{\sin} q\lambda d\lambda$  für  $p \geq q$  null ist, wie man durch Zerlegung des Produkts der trigonometrischen Funktionen in eine Summe erkennt. Jetzt zeigt also (3), daß auch das Integral desjenigen Gliedes des Produkts  $P_m K_n$  verschwindet, welches  $\frac{\cos}{\sin} p\lambda \frac{\cos}{\sin} p\lambda$  enthält, hier offenbar wegen der Integration nach  $\varphi$ .

Das allgemeine Integral (4) setzt sich aber unter dem Integralzeichen aus Gliedern mit  $\frac{\cos}{\sin} p\lambda \frac{\cos}{\sin} q\lambda$ ,  $p \geq q$ , sowie aus Gliedern mit  $\frac{\cos}{\sin} p\lambda \frac{\cos}{\sin} p\lambda$  zusammen. Die Glieder der ersten Art verschwinden einzeln wegen der Integration nach  $\lambda$ , diejenigen der zweiten Art aber wegen der Integration nach  $\varphi$ , denn sie sind bis auf Koeffizienten übereinstimmend mit dem oben betrachteten,  $\frac{\cos}{\sin} p\lambda \frac{\cos}{\sin} p\lambda$  enthaltenden Gliede in  $P_m K_n$ ,  $m \leq n$ .

**§ 29. Potential des abgeplatteten, homogenen Rotationsellipsoids auf einen Punkt außerhalb desselben\*).** Um dieses Potential in übersichtlicher Form nach Kugelfunktionen entwickelt zu erhalten, ist folgender Weg einzuschlagen.\*\*)

Auf S. 51 erhielten wir unter (8) § 1 für die reziproke Entfernung eines Massenelementes  $dm$  mit den Koordinaten  $x, y, z$  bzw.  $r, \varphi, \lambda$  von dem angezogenen Punkte  $P'$  mit den Koordinaten  $x', y', z'$  bzw.  $r', \varphi', \lambda'$  die im Falle  $r' > r$  gültige Entwicklung nach Kugelfunktionen:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'} \left\{ 1 + \frac{r}{r'} P_1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 P_2 + \left(\frac{r}{r'}\right)^3 P_3 + \left(\frac{r}{r'}\right)^4 P_4 + \dots \right\}. \quad (1)$$

\*) Es erscheint uns nicht überflüssig, im Folgenden anhangsweise das Potential des Rotationsellipsoids zu entwickeln und daran einige Bemerkungen über die Gestalt rotierender Flüssigkeitskörper anzufügen.

\*\*) Entnommen der Schrift: *Wand, die Prinzipien der mathematischen Physik und die Potentialtheorie*. Leipzig 1871, S. 83. Die Ableitung ist im wesentlichen übereinstimmend mit derjenigen von *Lagrange, Sur les sphéroides elliptiques* [aus den Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1798] nach der Mitteilung, welche *Todhunter, History of Attraction* Bd. 2 S. 158 über letztere giebt. Das Original war uns nicht zugänglich.

Ausdrücke in geschlossener Form gab *Gauß* in der Abhandlung: *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata*. Göttinger gelehrte Anzeigen 1813, April 5, *Gauß's Werke*, Bd. 5 S. 3; Selbstanzeige ebenda S. 279 mit geschichtlichen Notizen.

Für den jetzt vorliegenden Zweck ist es vorteilhaft dieser Entwicklung eine andere Form zu geben, indem man von *Taylor's* Satz ausgeht.

Man hat

$$e = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2} \quad (2)$$

und kann nun  $-x$ ,  $-y$ ,  $-z$  als Änderungen von  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  behandeln. Sind die Änderungen null, so geht  $e$  in  $r'$  über. Nach *Taylor's* Satz für mehrere Variable wird erhalten\*):

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} = \frac{1}{r'} + & \left\{ \frac{\partial \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial x'} (-x) + \frac{\partial \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial y'} (-y) + \frac{\partial \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial z'} (-z) \right\} \\ & + \frac{1}{1 \cdot 2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial x'^2} (-x)^2 + 2 \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial x' \partial y'} (-x)(-y) + 2 \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial x' \partial z'} (-x)(-z) \\ & + \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial y'^2} (-y)^2 + 2 \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial y' \partial z'} (-y)(-z) \\ & + \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial z'^2} (-z)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3) \\ & + \dots + \frac{1}{i!} \left\{ \frac{\partial \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial x'} (-x) + \frac{\partial \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial y'} (-y) + \frac{\partial \left( \frac{1}{e} \right)}{\partial z'} (-z) \right\}^i + \dots \end{aligned}$$

Hierin sind in allen Differentialquotienten nach geschehener Differentiation  $x$ ,  $y$  und  $z$  gleich null zu setzen. Das allgemeine Glied ist ferner so zu lesen, daß erstens  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (i-1) i$  für  $i!$  gesetzt werden muß, und daß zweitens nach Erhebung des Trinoms zur  $i$ . Potenz für  $\partial \left( \frac{1}{e} \right)^i$  das Symbol der  $i$ . Differentiation  $\partial^i \left( \frac{1}{e} \right)$  eintritt.

Die Überzeugung, daß die Reihe (3) thatsächlich von (1) nicht abweicht und also auch in gleichem Umfange gültig ist, gewinnt man leicht, wenn man sich in (1) für die  $P$  die Ausdrücke aus § 2 S. 52 und zugleich für  $\cos \gamma$  nach § 4 (1) S. 56  $(xx' + yy' + zz') : rr'$  eingeführt denkt. Es zeigt sich dann, daß allgemein das Glied  $r^i P_i : r^{i+1}$  in (1) eine homogene Funktion  $i$ . Grades von  $x$ ,  $y$  und  $z$  ist. Dies letztere ist aber auch das allgemeine Glied in (3). Nun muß man noch bedenken, daß man in (3) anstatt der Differentialquotienten von  $1 : e$  nach  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$  auch diejenigen nach  $(-x)$ ,  $(-y)$  und  $(-z)$  setzen kann, wie ein Blick auf (2) zeigt. Wendet man also bei der Bildung von (3) für  $1 : e$  die Reihe (1) an, so hat auf die  $i$ . Differentialquotienten nur das Glied mit  $P_i$  Einfluß, weil nach der Differentiation nur hierin von  $x$ ,  $y$  und  $z$  freie Glieder entstehen und für  $x$ ,  $y$  und  $z$  gleich null alles andere verschwindet. Hieraus erkennt man, daß das Glied  $i$ . Grades in (3) die *Taylor'sche* Entwick-

\*) Vergl. u. a. *Hattendorff, Höhere Analysis*, S. 286.

lung von dem Gliede mit  $P_i$  in (1) darstellt, und zwar gerade so, als wären alle andern Glieder gar nicht vorhanden. Die *Taylor*sche Entwicklung einer Funktion vom  $i$ . Grade ist aber selbstverständlich mit ihr identisch. Somit ist auch Reihe (3) mit Reihe (1) identisch.

Für die weitere Entwicklung ist es vorteilhaft die Differentialquotienten in (3) noch anders zu schreiben. In denselben soll, wie erwähnt, nach geschehener Differentiation  $x$ ,  $y$  und  $z$  gleich null gesetzt werden. Dies kann aber auch vorher geschehen, da in  $e$  nach Ausdruck (2) die Änderungen  $x$ ,  $y$  und  $z$  an den Variablen  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$  nur subtraktiv vorkommen. Setzt man in  $e$  nun  $x$ ,  $y$  und  $z$  gleich null, so geht es in  $r'$  über. Anstatt (3) erhalten wir somit in symbolischer Schreibweise:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \left\{ \frac{\partial \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial x'} (-x) + \frac{\partial \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial y'} (-y) + \frac{\partial \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial z'} (-z) \right\}^i. \quad (4)$$

Gegen früher tritt jetzt besser hervor, daß die Differentialquotienten dieselben bleiben, welche Koordinaten das anziehende Massenelement im Punkte  $(x, y, z)$  innerhalb der Bedingung  $r' > r$  auch haben mag.

Betrachtet man nun ein homogenes Rotationsellipsoid von der Dichtigkeit 1, nimmt seinen Mittelpunkt als Koordinatenanfang und seine Drehaxe als  $z$ -Axe, so kann man das Potential der Anziehung  $v$  auf einen Punkt  $P'$  aufserhalb der dem Ellipsoid umschriebenen Kugel mittelst (4) in eine Reihe entwickeln, indem man in den Ausdruck

$$v = k^2 \iiint \frac{dx dy dz}{e} \quad (5)$$

für  $1 : e$  die Reihe (4) setzt. Die Integration erstreckt sich über alle Massenelemente innerhalb des Ellipsoids, also über alle Werte von  $x, y, z$ , für welche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1. \quad (6)$$

Zur Vereinfachung führen wir neue Variable ein, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} x &= a\xi, & y &= a\eta, & z &= b\xi \\ dx &= a d\xi, & dy &= a d\eta, & dz &= b d\xi, \end{aligned}$$

und erhalten

$$v = k^2 a^2 b \iiint \frac{d\xi d\eta d\xi}{e}, \quad (7)$$

wobei sich die Integration über alle Werte von  $\xi, \eta$  und  $\xi$ , welche der Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 + \xi^2 \leq 1 \quad (8)$$

genügen, zu erstrecken hat und wobei für  $1 : e$  zu substituieren ist:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \left\{ \frac{\partial \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial x'} (-a\xi) + \frac{\partial \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial y'} (-a\eta) + \frac{\partial \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial z'} (-b\xi) \right\}^i \quad (9)$$

Die Bedingung (8) zeigt, daß die Integration auf die Grenzen einer Kugel vom Radius 1 reduziert ist.

§ 30. Fortsetzung. Durch Einführung der Reihe (9) in (7) zerfällt das Integral daselbst in unendlich viele Integrale der Form

$$\iiint \xi^l \eta^m \zeta^n d\xi d\eta d\zeta. \quad (1)$$

Die Integrale verschwinden, sobald wenigstens einer der Exponenten  $l$ ,  $m$  und  $n$  ungerade ist. Denn integriert man, falls z. B.  $m$  ungerade ist, zuerst nach  $\eta$ , so ergibt sich wegen der Symmetrie zur  $\xi\zeta$ -Ebene null, womit das ganze Integral verschwindet.

Um aber den Wert eines Integrales (1) für gerade Exponenten zu ermitteln, setzen wir unter Einführung von Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \xi &= \varrho \cos \varphi \cos \lambda \\ \eta &= \varrho \cos \varphi \sin \lambda \\ \zeta &= \varrho \sin \varphi; \end{aligned} \quad (2)$$

$\varphi$  ist die Breite,  $\lambda$  die Länge auf der Kugeloberfläche, vergl. im ersten Kapitel S. 6. Das Volumenelement ist gleich  $\varrho^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda d\varrho$ , vergl. § 6 S. 60. Durch Einführung der Relationen (2) und des Volumenelementes in (1) geht das Integral über in

$$\iiint \varrho^{l+m+n+3} (\cos \varphi \cos \lambda)^l (\cos \varphi \sin \lambda)^m \sin^n \varphi \cos \varphi d\varphi d\lambda d\varrho$$

und die Bedingungsgleichung (8) des vorigen Paragraphen in  $\varrho^2 \leq 1$ . Es ist daher zu integrieren für  $\varrho$  von null bis 1, für  $\lambda$  von null bis  $2\pi$  und für  $\varphi$  von  $-\frac{\pi}{2}$  bis  $+\frac{\pi}{2}$ .

Das Integral zerfällt ersichtlich in das Produkt der drei Integrale

$$\int_0^1 \varrho^{l+m+n+3} d\varrho, \quad (3)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^l \lambda \sin^m \lambda d\lambda \quad (4)$$

und

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{l+m+1} \varphi \sin^n \varphi d\varphi. \quad (5)$$



Ohne weiteres hat man für (3)

$$\int_0^1 \rho^{l+m+n+2} d\rho = \frac{1}{l+m+n+3}. \quad (6)$$

Um (4) und (5) zu bestimmen, entwickeln wir zunächst wie folgt:

$$\int \cos^q u \sin^p u du = \int \cos^{q-1} u \sin^p u d(\sin u),$$

hieraus folgt durch teilweise Integration, abgesehen vom Falle  $p = -1$ :

$$\int \cos^q u \sin^p u du = \cos^{q-1} u \frac{\sin^{p+1} u}{p+1} + \frac{q-1}{p+1} \int \cos^{q-2} u \sin^{p+2} u du.$$

Schreibt man rechter Hand für  $\sin^2 u$  aber  $1 - \cos^2 u$ , so findet sich:

$$\int \cos^{q-2} u \sin^{p+2} u du = \int \cos^{q-2} u \sin^p u du - \int \cos^q u \sin^p u du.$$

Substituieren wir dies in der vorigen Gleichung und reduzieren auf das links und rechts vorkommende Integral, so folgt

$$\int \cos^q u \sin^p u du = \frac{\cos^{q-1} u \sin^{p+1} u}{p+q} + \frac{q-1}{p+q} \int \cos^{q-2} u \sin^p u du. \quad (7)$$

Vertauscht man  $u$  mit  $\frac{\pi}{2} - u$ , so folgt noch:

$$\int \cos^p u \sin^q u du = -\frac{\cos^{p+1} u \sin^{q-1} u}{p+q} + \frac{q-1}{p+q} \int \cos^p u \sin^{q-2} u du. \quad (8)$$

Diese Formeln gestatten, (4) und (5) zu ermitteln. Dabei sind nur die Fälle, in welchen  $l$ ,  $m$  und  $n$  gerade sind, zu beachten; denn andernfalls hat das Integral (1), wie bereits bemerkt, den Wert null. Die Anwendung von (7) auf (4) giebt

$$\int_0^{2\pi} \cos^l \lambda \sin^m \lambda d\lambda = \frac{l-1}{l+m} \int_0^{2\pi} \cos^{l-2} \lambda \sin^m \lambda d\lambda$$

und die wiederholte Anwendung von (7) auf das Integral rechter Hand:

$$\int_0^{2\pi} \cos^l \lambda \sin^m \lambda d\lambda = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (l-3)(l-1)}{(m+2)(m+4) \dots (m+l)} \int_0^{2\pi} \sin^m \lambda d\lambda.$$

Die wiederholte Anwendung von (8) giebt ferner successive:

$$\int_0^{2\pi} \sin^m \lambda d\lambda = \frac{m-1}{m} \int_0^{2\pi} \sin^{m-2} \lambda d\lambda = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (m-3)(m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (m-2)m} \cdot 2\pi;$$

man hat daher zur Bestimmung des Integrals (4) die Formel:

$$\int_0^{2\pi} \cos^l \lambda \sin^m \lambda d\lambda = 2\pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (l-3)(l-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (m-3)(m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (l+m-2)(l+m)}. \quad (9)$$

Die wiederholte Anwendung von (7) auf (5) giebt ohne Schwierigkeit:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{l+m+1} \varphi \sin^n \varphi d\varphi = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (l+m-2)(l+m)}{(n+3)(n+5) \dots (l+m+n-1)(l+m+n+1)} \quad (10)$$

Verbindet man die Resultate (6), (9) und (10) und setzt im Zähler und Nenner das Produkt  $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-3)(n-1)$  als Faktor zu, so folgt zur Bestimmung des Integrales (1):

$$\iiint \xi^l \eta^m \zeta^n d\xi d\eta d\zeta = 4\pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (l-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (m-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (l+m+n-1)(l+m+n+1)(l+m+n+3)}, \quad (11)$$

gültig für gerade Werte von  $l$ ,  $m$  und  $n$ . Im speziellen Falle des Verschwindens eines oder mehrerer der Exponenten  $l$ ,  $m$  und  $n$  ist, wie die Entwicklung zeigt, im Zähler rechter Hand von (11) das Produkt  $1 \cdot 3 \cdot 5 \dots$  für die betreffenden Exponenten gleich 1 zu setzen.

§ 31. Fortsetzung. Es handelt sich jetzt darum, den Koeffizienten auszumitteln, den das Integral (1) des vorigen Paragraphen in dem Ausdruck für das Potential  $v$  erhält, welchen die Substitution von (9) in (7) § 29 ergibt. Man bemerkt sogleich, daß es der Faktor des Termes  $\xi^l \eta^m \zeta^n$  ist, welcher bei der Ausrechnung von

$$\frac{1}{i!} \left\{ \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x'} (-a\xi) + \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial y'} (-a\eta) + \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial z'} (-b\xi) \right\}^i \quad (1)$$

entsteht für  $i = l + m + n$ . Schreiben wir kurz für den Augenblick das Trinom in der Form  $(A + B + C)^{l+m+n}$ , so giebt die Ausrechnung bei der üblichen Schreibweise der Binominal-Koeffizienten u. a. ein Glied

$$\frac{1}{i!} \binom{l+m+n}{n} \cdot (A + B)^{l+m} C^n$$

und dessen Ausrechnung das Glied

$$\frac{1}{i!} \binom{l+m+n}{n} \binom{l+m}{m} A^l B^m C^n$$

oder

$$\frac{(l+m+n)(l+m+n-1) \dots (l+1)}{i! m! n!} A^l B^m C^n.$$

Fügt man hier im Zähler und Nenner noch  $l!$  bei, so geht dies in  $\frac{1}{l! m! n!} A^l B^m C^n$  über und es zeigt sich nun, daß man an Stelle des Ausdruckes (1) überhaupt setzen kann:

$$\sum \left\{ \frac{\partial^i \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x'^l \partial y'^m \partial z'^n} \frac{(-a\xi)^l (-a\eta)^m (-b\xi)^n}{l! m! n!} \right\}, \quad (2)$$

wobei die Summierung über alle ganzen positiven Werte von  $l$ ,  $m$  und  $n$  zu erstrecken ist, deren Summe  $i$  beträgt; einschliesslich der Fälle einer oder zweier dieser Zahlen gleich null, in welchen für die betreffenden durch das Ausrufungszeichen angedeuteten Produkte 1 zu setzen ist.

Hiermit nimmt der Ausdruck für  $v$  die Form an:

$$v = k^2 a^2 b \left[ \frac{1}{r'} \iiint d\xi \, d\eta \, d\xi + S' \right],$$

$$S' = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{i \text{ konst.}} \left\{ \frac{\partial^i \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial x'^l \partial y'^m \partial z'^n} \frac{(-a)^l (-a)^m (-b)^n}{l! m! n!} \iiint \xi^l \eta^m \xi^n d\xi \, d\eta \, d\xi \right\}.$$

Führen wir nun die Integralwerte nach (11) des vorigen Paragraphen ein und beachten wir ferner, daß bei der Dichtigkeit 1 die Ellipsoidmasse  $M$  gleich  $\frac{4}{3} \pi a^2 b$  ist, sowie daß nur gerade Werte von  $l$ ,  $m$ ,  $n$  und  $i = l + m + n$  in betracht kommen, so folgt nach naheliegenden Kürzungen:

$$v = 3 M k^2 \left[ \frac{1}{3r'} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ konst.}}}^{\infty} \frac{\sum_{i \text{ konst.}} \left\{ \frac{\partial^i \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial x'^l \partial y'^m \partial z'^n} \frac{a^l a^m b^n}{\frac{l}{2}! \frac{m}{2}! \frac{n}{2}!} \right\}}{2^i \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (i+3)} \right]. \quad (3)$$

Die innere Summe in (3) ist wie Summe (2), jedoch unter Ausschluss ungerader Werte von  $l$ ,  $m$  und  $n$  zu verstehen. Sie läßt sich aber noch anders schreiben. Man hat, um dies zu erkennen, nur diese Summe mit (2) zu vergleichen und nun zu der entsprechend zu modifizierenden Form (1) zurückzukehren. Man findet dann, daß mit der inneren Summe von (3) gleichwertig ist der symbolische Ausdruck

$$\frac{1}{\frac{i}{2}!} \left\{ \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial x'^2} a^2 + \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial y'^2} a^2 + \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial z'^2} b^2 \right\}^{\frac{i}{2}}. \quad (4)$$

Dieser vereinfacht sich noch, wenn wir von der leicht zu verifizierenden Gleichung

$$\frac{\partial^2 \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial z'^2} = 0 \quad (5)$$

Gebrauch machen. Aus derselben folgt nämlich in symbolischer Schreibweise, wenn  $k$  eine positive, gerade Zahl bezeichnet:

$$\left\{ \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial z'^2} \right\}^{\frac{k}{2}} = 0. \quad (6)$$

Um dieses einzusehen, braucht man nur die Gleichung (5) zweimal nach  $x'$ , ebenso nach  $y'$  und  $z'$  zu differenzieren und die drei Resultate zu addieren. In symbolischer Schreibweise lautet dasselbe: das Quadrat der linken Seite von (5) ist gleich null. Differenziert man nun diese neue Gleichung zweimal nach  $x'$ , ebenso nach  $y'$  und  $z'$  und addiert die drei Resultate, so folgt symbolisch die dritte Potenz der linken Seite von (5) gleich null. U. s. f.

Hiermit läßt sich unschwer erkennen, daß es erlaubt ist, die Parenthese von (4) einfach um das mit  $a^2$  multiplizierte Aggregat linker Hand in (5) zu vermindern. Dabei setzen wir entsprechend einem abgeplatteten Rotationsellipsoid  $a^2 - b^2 = a^2 c^2$ ; dann folgt für die innere Summe rechter Hand von (3) der gleichwertige Ausdruck

$$\frac{(-1)^{\frac{i}{2}}}{\frac{i}{2}!} a^i c^i \frac{\partial^i \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial z'^i},$$

bei welchem nunmehr die symbolische Schreibweise verschwunden ist. Der Ausdruck für das Potential  $v$  geht jetzt über in

$$v = 3 M k^2 \left\{ \frac{1}{3 r'} + \sum_{\frac{i}{2}=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{i}{2}}}{(i+1)!(i+3)} a^i c^i \frac{\partial^i \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial z'^i} \right\}. \quad (7)$$

Hierzu findet sich durch wiederholte Differentiation von

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

ohne Schwierigkeit, wenn man in den Differentialquotienten  $z' = r' \sin \varphi'$  setzt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial z'} &= - \frac{1}{r'^2} \sin \varphi' \\ \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial z'^2} &= \frac{1}{r'^3} (3 \sin^2 \varphi' - 1) \\ \frac{\partial^3 \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial z'^3} &= - \frac{1}{r'^4} (15 \sin^3 \varphi' - 9 \sin \varphi') \\ \frac{\partial^4 \left( \frac{1}{r'} \right)}{\partial z'^4} &= \frac{1}{r'^5} (105 \sin^4 \varphi' - 90 \sin^2 \varphi' + 9), \end{aligned}$$

womit sich endlich die ersten drei Glieder einer Reihenentwicklung nach Kugelfunktionen für das Potential des abgeplatteten, homogenen Rotationsellipsoids wie folgt ergeben:

$$v = \frac{Mk^2}{r'^3} \left\{ 1 + \frac{1}{10} \frac{a^2 e^2}{r'^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi') + \frac{1}{280} \frac{a^4 e^4}{r'^4} (105 \sin^4 \varphi' - 90 \sin^2 \varphi' + 9) + \dots \right\}.$$

Hierin ist  $M$  die Masse,  $a$  die Äquatorialhalbaxe,  $e$  die numerische Excentricität der Meridianellipse;  $r'$  ist der Abstand des angezogenen Punktes vom Ellipsoidmittelpunkt und  $\varphi'$  die geozentrische Breite desselben.

Zufolge der Ableitung konvergiert die Reihe in (8), solange  $r' > a$  ist. Sie konvergiert aber noch weiter. Da nämlich in (8) nur die Masse  $M$  und die lineare Excentricität  $ae$  auftreten, so wird man zu dem Ausdruck (8) auch bei jedem anderen homogenen Rotationsellipsoid mit gleicher Masse und gleicher linearer Excentricität gelangen, d. h. alle konfokalen Ellipsoide gleicher Masse geben für außerhalb gelegene Punkte gleiches Potential. Das kleinste dieser Ellipsoide hat als halbe Länge der Drehaxe null und als Äquatorialradius daher  $ae$  selbst. Für dieses Ellipsoid konvergiert die Reihe in (8) mithin, solange  $r' > ae$  ist. Sie konvergiert also überhaupt solange als  $r' > ae$  ist.

Wenn nun  $b \geq ae$  ist, so liegt die Oberfläche des Ellipsoids nirgends innerhalb der Kugelfläche vom Radius  $ae$ . Die Reihenentwicklung konvergiert daher sicher bis zur Oberfläche des Ellipsoids, wenn  $b > ae$  ist.

Der Umstand, daß sie auch noch z. T. innerhalb der Oberfläche konvergiert, hat kein Interesse, weil innerhalb der Oberfläche das Potential  $v$  nicht mehr durch Formel (8) dargestellt wird, indem der analytische Ausdruck des Potentials für innerhalb und außerhalb gelegene Punkte verschieden ist (vergl. die entsprechenden Bemerkungen über  $W$  in § 21 S. 34).

Ebenso interessiert hier nicht die Frage, ob (8) bis zur Oberfläche konvergiert für den Fall  $b < ae$ , da bei schwach abgeplatteten Rotationsellipsoiden dieser Fall nicht eintritt.

### § 32. Hauptträgheitsmomente des abgeplatteten, homogenen Rotationsellipsoids. Dichtigkeit im Erdinnern.

Wenn es nicht auf den Konvergenznachweis ankommt, kann man die ersten Glieder der Reihe für das Potential des homogenen Rotationsellipsoids auch mittelst Formel (7) § 5 S. 60 bestimmen, welche für das Potential der Anziehung jedes beliebigen Körpers gilt, wenn das Potential der Schwungkraft (das Glied mit  $\omega$ ) weggelassen wird. Es sind dann vor allem die Hauptträgheitsmomente zu berechnen.

Wir bezeichnen wie früher die Trägheitsmomente für zwei Äquatoren, die Axen der  $x$  und  $y$ , mit  $A$  und  $B$ , das Trägheitsmoment für die Drehaxe, die  $z$ -Axe, mit  $C$ . Dann sind  $A = B$  und  $C$  die Hauptträgheitsmomente und zwar ist [vergl. S. 60 (5)]:

$$\begin{aligned} A &= \int (y^2 + z^2) dm . \\ C &= \int (x^2 + y^2) dm . \end{aligned} \quad (1)$$

Um diese Integrale, für welche die Grenzen durch die Bedingung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

gegeben sind, abzuleiten, setzen wir wie in § 29 S. 119

$$x = a\xi \quad y = a\eta \quad z = b\xi$$

und erhalten dann

$$\int x^2 dm = \int y^2 dm = a^4 b \iiint \xi^2 d\xi d\eta d\xi$$

sowie

$$\int z^2 dm = a^2 b^3 \iiint \xi^2 d\xi d\eta d\xi ,$$

wobei die Grenzen rechter Hand durch die Bedingung sich bestimmen, daß

$$\xi^2 + \eta^2 + \xi^2 \leq 1 .$$

Formel (11) § 30 S. 122 gibt die Werte vorstehender Integrale :

$$\begin{aligned} \int x^2 dm &= \int y^2 dm = \frac{4}{15} \pi a^4 b \\ \int z^2 dm &= \frac{4}{15} \pi a^2 b^3 . \end{aligned} \quad (2)$$

Beachtet man nun noch, daß  $M = \frac{4}{3} \pi a^2 b$  ist, so erhält man ohne weiteres:

$$\begin{aligned} A &= B = \frac{1}{5} (a^2 + b^2) M \\ C &= \frac{2}{5} a^2 M \end{aligned} \quad (3)$$

und (vergl. § 10 (2) S. 72):

$$MK = C - \frac{A+B}{2} = \frac{1}{5} a^2 e^2 M . \quad (4)$$

Hiermit findet man leicht wieder die beiden ersten Glieder der Entwicklung (8) § 31 S. 125. Auch würden sich auf diesem Wege weitere Glieder entwickeln lassen.

Wir haben in § 17 S. 91 gefunden, daß die Normalform der mathematischen Erdoberfläche von einem Rotationsellipsoid wenig abweicht. Wäre nun die Erdmasse überall wesentlich gleich dicht verteilt, so müßte für die Erde sehr nahe  $K : a^2_0$  gleich  $e^2 : 5$  oder  $2a : 5$  sein, also

$$\begin{aligned} \text{für } \alpha &= \frac{1}{299} & K : a_0^2 &= 0,00134 \\ \text{,, } \alpha &= \frac{1}{289} & \text{,,} &= 0,00138. \end{aligned} \quad (5)$$

In Wirklichkeit ist  $K : a_0^2$  kleiner. Nach Gleichung (6) § 15 S. 83 haben wir

$$\frac{K}{a_0^2} = \frac{2}{3} \alpha - \frac{1}{3} \epsilon + \dots ;$$

mithin ist

$$\begin{aligned} \text{für } \alpha &= \frac{1}{299} \text{ und } \epsilon = \frac{1}{289} & K : a_0^2 &= 0,00108 \\ \text{,, } \alpha &= \frac{1}{289} \text{ ,, } \epsilon = \frac{1}{289} & \text{,,} &= 0,00115. \end{aligned} \quad (6)$$

Hiernach ist  $K : a_0^2$  um  $\frac{1}{5}$  bis  $\frac{1}{6}$  seines Wertes kleiner, als beim homogenen Ellipsoid.

Dies läßt sich dadurch erklären, daß man eine allmähliche Zunahme der Erddichtigkeit von außen nach innen annimmt. Zu einem hohen Grade von Wahrscheinlichkeit für diese Annahme gelangt man jedoch erst durch Herbeiziehung der Aussagen von Präzession und Nutation der Erdaxe über  $A$  und  $C$ , vergl. 6. Kap. § 8 u. ff.

**§ 33. Potential des homogenen Rotationsellipsoids auf einen Punkt innerhalb.** Wir denken uns den angezogenen Punkt  $P'$  zunächst nur innerhalb der dem Ellipsoid konzentrisch zum Mittelpunkt, dem Koordinatenanfang, eingeschriebenen Kugel; die Dichtigkeit der Masse sei gleich  $\Theta$ . Wir zerlegen diese letztere durch eine Kugelfläche, welche mit dem Radiusvektor  $r'$  des Punktes  $P'$  beschrieben wird, in zwei Teile. Das Potential des inneren Teiles auf  $P'$  ist bekannt, das des äußeren Teiles ist noch zu bestimmen. Wir setzen also

$$v = v_1 + v_2 \quad (1)$$

und haben nach S. 62 (8)

$$v_1 = \frac{4}{3} \pi k^2 \Theta r'^2. \quad (2)$$

Ferner ist mit Benutzung der Entwicklung (10) S. 52

$$v_2 = k^2 \int_e^{dm} = k^2 \int \left\{ \frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2} P_1 + \frac{r'^2}{r^3} P_2 + \frac{r'^3}{r^4} P_3 + \frac{r'^4}{r^5} P_4 + \dots \right\} dm. \quad (3)$$

Die für 1 :  $e$  benutzte Reihenentwicklung gilt allerdings nur für  $r' < r$  und wir wenden sie bei der Integration bis  $r' = r$  an; aber da für eine Hohlkugel das Potential auf einen Punkt der inneren Begrenzungsfläche nach S. 62 (7) bekannt ist, kann man leicht a posteriori die Richtigkeit des Resultates prüfen.



Die Integration in (3) ist über die ganze Masse des äußeren Teiles zu erstrecken. Setzen wir nun  $dm = \Theta d\sigma \cdot r^2 dr$ , so empfiehlt es sich zunächst nach  $r$  von  $r = r'$  bis zur Oberfläche des Ellipsoids zu integrieren. Den Radiusvektor der letzteren nennen wir wieder  $r$  und erhalten aus (3):

$$v_2 = k^2 \Theta \int \left\{ \frac{r'^2 - r'^2}{2} + r' (r - r') P_1 + r'^2 P_2 \log \text{nat} \frac{r}{r'} \right. \\ \left. + r'^3 \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) P_3 + \frac{r'^4}{2} \left( \frac{1}{r'^2} - \frac{1}{r^2} \right) P_4 + \dots \right\} d\sigma. \quad (4)$$

Die Integration erstreckt sich nunmehr noch über die Kugelfläche vom Radius 1. Dabei ist auf den Ausdruck für  $r$  als Funktion von  $\varphi$  Rücksicht zu nehmen.

Nach Bd. 1 S. 60 ist aber der Radiusvektor in der geozentrischen Breite  $\varphi$

$$r = \frac{a}{\sqrt{1 + \delta \sin^2 \varphi}},$$

wenn  $a$  der Äquatorialhalbmesser,  $b$  die kleine Halbaxe und  $\delta = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$  ist. Wir setzen für  $\delta$  das Symbol  $e'^2$  und schreiben also

$$r = \frac{a}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \varphi}} \quad (5)$$

mit

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{e^2}{1 - e^2} \cdot *)$$

Die Einführung von  $r$  in (4) erfolgt nun am besten in der Weise, daß die verschiedenen Funktionen von  $r$  nach Kugelfunktionen von  $\varphi$  entwickelt werden. Da  $r$  nur von  $\sin^2 \varphi$  abhängt, so treten in allen diesen Entwicklungen nur Kugelfunktionen von geradem Range auf, weil nur in diesen lediglich  $\sin^2 \varphi$  und seine Potenzen erscheinen. Hieraus erkennt man mit Rücksicht auf den Satz (3) von S. 116 zunächst, daß in (4) alle Glieder verschwinden, welche von den Koeffizienten  $P$  mit ungeradem Index, also von  $P_1, P_3, P_5$  u. s. f. abhängen.

Aber auch die von  $P_4, P_6$  u. s. f. abhängenden Glieder geben nichts, weil in den Faktoren dieser Koeffizienten nur Potenzen von  $\sin \varphi$  bis bzw. zum zweiten, vierten u. s. f. Grade auftreten, so daß diese Faktoren sich durch Kugelfunktionen darstellen, deren Index mindestens um zwei Einheiten niedriger ist, als der des multiplizierenden  $P$ , weshalb für alle Glieder der obengenannte Satz (3) zur Anwendung kommt. (4) geht hiermit zunächst über in die Gleichung:

---

\*) Im ersten Bande hatten wir das Symbol  $\delta$  nach dem Vorgange von O. Schreiber, *Theorie der Projektionsmethode der hannoverischen Landesvermessung, Hannover 1866*, benutzt. Wir nehmen aber anstatt dessen mit Jordan jetzt  $e'^2$ , erstens wegen der engen Beziehung der Größe zu  $e^2$  [vergl. die zweite Gleichung (5)], zweitens weil  $\delta$  auch als Änderungszeichen variabler Größen auftritt.

$$v_2 = k^2 \Theta \int \left\{ \frac{r^2}{2} - \frac{r'^2}{2} + r'^2 P_2 \log \operatorname{nat} \frac{r}{r'} \right\} d\sigma. \quad (6)$$

Indem wir nun den Ausdruck (5) für  $r$  beachten und

$$d\sigma = \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda = d(\sin \varphi) \, d\lambda$$

setzen, sowie sogleich nach der geozentrischen Länge  $\lambda$  von null bis  $2\pi$  integrieren und für  $\sin \varphi$  das Symbol  $t$  einführen, wird zu (6):

$$\int r^2 d\sigma = 2\pi a^2 \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{1 + e^2 t^2} = 4\pi a^2 \frac{\arctan e'}{e'}; \quad (7)$$

ferner ist

$$\int r'^2 d\sigma = 4\pi r'^2 \quad (8)$$

und

$$\int P_2 \log \operatorname{nat} \frac{r}{r'} d\sigma = \int P_2 \left[ \log \operatorname{nat} \frac{a}{r'} - \frac{1}{2} \log \operatorname{nat} (1 + e'^2 \sin^2 \varphi) \right] d\sigma$$

Mit Rücksicht auf den Satz (3) S. 116 reduziert sich die rechte Seite der letzten Gleichung auf den Ausdruck

$$-\frac{1}{2} \int P_2 \log \operatorname{nat} (1 + e'^2 \sin^2 \varphi) d\sigma,$$

und zwar sind auch hier in  $P_2$  S. 57 nur diejenigen Glieder zu beachten, welche lediglich von  $\varphi$  abhängen, d. h. man hat

$$P_2 = \frac{9}{4} \left( \sin^2 \varphi' - \frac{1}{3} \right) \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right)$$

zu setzen. Damit folgt

$$\int P_2 \log \operatorname{nat} \frac{r}{r'} d\sigma = -\frac{9\pi}{4} \left( \sin^2 \varphi' - \frac{1}{3} \right) \int_{-1}^{+1} \left( t^2 - \frac{1}{3} \right) \log \operatorname{nat} (1 + e'^2 t^2) dt. \quad (9)$$

Es ist nun zunächst teilweise integriert, ohne Rücksicht auf die Grenzen:

$$\begin{aligned} \int \left( t^2 - \frac{1}{3} \right) \log \operatorname{nat} (1 + e'^2 t^2) dt &= \frac{1}{3} (t^3 - t) \log \operatorname{nat} (1 + e'^2 t^2) \\ &\quad - \frac{2e'^2}{3} \int \frac{t^4 - t^2}{1 + e'^2 t^2} dt. \end{aligned}$$

Bei Einführung der Grenzen verschwindet der erste Teil; setzen wir zugleich identisch

$$\frac{t^4 - t^2}{1 + e'^2 t^2} = \frac{t^2}{e'^2} - \frac{1 + e'^2}{e'^2} + \frac{1 + e'^2}{e'^2 (1 + e'^2 t^2)},$$

so folgt für die rechte Seite von (9) ohne Schwierigkeit:

$$\int_{-1}^{+1} = -\frac{4}{3} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1 + e'^2}{e'^2} + \frac{1 + e'^2}{e'^2} \frac{\arctan e'}{e'} \right\}. \quad (9^*)$$

Aus (7), (8), (9) und (9\*) erhält man endlich

$$v_2 = 2\pi k^2 \Theta \left\{ a^2 \frac{\arctan e'}{e'} - r'^2 \left[ 1 + \frac{1}{e'^2} \left( \frac{3}{2} + e'^2 - \frac{3}{2} (1 + e'^2) \frac{\arctan e'}{e'} \right) \left( \sin^2 \varphi' - \frac{1}{3} \right) \right] \right\}. \quad (10)$$

Vereinigt man die Resultate (2) und (10), so folgt mit Rücksicht auf (1) für das gesuchte Potential der Ausdruck

$$v = 2\pi k^2 \Theta \left\{ a^2 \frac{\arctan e'}{e'} - r'^2 \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{e'^2} \left( \frac{3}{2} + e'^2 - \frac{3}{2} (1 + e'^2) \frac{\arctan e'}{e'} \right) \left( \sin^2 \varphi' - \frac{1}{3} \right) \right] \right\}. \quad (11)$$

Für  $e' = 0$  geht dieser Ausdruck über in

$$2\pi k^2 \Theta \left( a^2 - \frac{r'^2}{3} \right), \quad (11^*)$$

welcher dem Potential einer homogenen Kugel auf einen inneren Punkt im Zentrumsabstand  $r'$  entsprechen muß, was man auch durch Vergleich mit Ausdruck (8\*) S. 62 bestätigt findet.

Der Ausdruck (11) ist unter der Bedingung abgeleitet, daß  $P'$  innerhalb der dem Ellipsoid eingeschriebenen Kugel liege. Da aber  $v$  eine geschlossene Form angenommen hat und innerhalb eines homogenen Körpers  $v$  nicht verschiedene analytische Ausdrücke besitzen kann, so gilt Ausdruck (11) überhaupt *innerhalb des Ellipsoids bis zur Oberfläche*.

Durch Reihenentwicklung folgt aus (11)

$$v = 2\pi k^2 \Theta \left\{ a^2 \left( 1 - \frac{e'^2}{3} + \frac{e'^4}{5} - \dots \right) - r'^2 \left[ \frac{1}{3} + \left( \frac{1}{5} e'^2 - \frac{3}{35} e'^4 + \dots \right) \left( \sin^2 \varphi' - \frac{1}{3} \right) \right] \right\} \quad (12)$$

oder wegen  $e'^2 = e^2 + e^4 + \dots$

$$v = 2\pi k^2 \Theta \left\{ a^2 \left( 1 - \frac{e^2}{3} - \frac{2e^4}{15} - \dots \right) - r'^2 \left[ \frac{1}{3} + \left( \frac{1}{5} e^2 + \frac{4}{35} e^4 + \dots \right) \left( \sin^2 \varphi' - \frac{1}{3} \right) \right] \right\}. \quad (12^*)$$

Diese Entwicklungen gelten, solange  $e' < 1$  ist, d. h. für  $b > \frac{a}{\sqrt{2}}$ .

Differenziert man  $v$  nach irgend einer Richtung, also insbesondere nach  $r'$  oder  $\varphi'$ , so verschwindet  $a$ . Es ist also die Anziehung innerhalb nur abhängig von  $e'$  und gleich groß für alle ähnlichen, ähnlich liegenden und konzentrischen Ellipsoide, innerhalb deren der Punkt liegt, d. h. *eine homogene Schale, die von zwei solchen Flächen begrenzt wird, übt auf einen inneren Punkt keine Anziehung aus.* (Vergl. S. 104 § 23.)

§ 34. Das abgeplattete Rotationsellipsoid kann die Oberfläche einer rotierenden, homogenen Flüssigkeitsmasse bilden. Dreht sich ein homogenes, abgeplattetes Rotationsellipsoid mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um seine kleine Axe, so ist das Potential  $w$  innerhalb bis zur Oberfläche gegeben durch die Gleichung

$$w = v + \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 \cos^2 \varphi'; \quad (1)$$

hierzu ist  $v$  nach Gleichung (11) § 33 anzusetzen. Indem wir  $v$  einführen, setzen wir mit Benutzung der rechtwinkligen Koordinaten des Punktes  $P'$ , bezogen auf die Äquatorebene als  $x'y'$ -Ebene und die Drehaxe als  $z'$ -Axe,  $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ , sowie  $r'^2 \sin^2 \varphi' = z'^2$  und nehmen  $w$  konstant gleich  $w_0$ . Die Gleichung

$$w_0 = \frac{1}{2} \omega^2 (x'^2 + y'^2) + m - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \left( n - \frac{nE}{3} \right) - z'^2 nE, \quad (2)$$

worin

$$\frac{2}{3} \pi k^2 \Theta = n \quad 3na^2 \frac{\arctan e'}{e'} = m \quad (3)$$

und

$$E = \frac{3}{e'^2} \left( \frac{3}{2} + e'^2 - \frac{3}{2} (1 + e'^2) \frac{\arctan e'}{e'} \right)$$

gesetzt ist, ist sodann die Gleichung einer Niveaufläche innerhalb. Wir wollen nun zeigen, daß bei jedem Werte  $e'$  die Oberfläche bei angemessener Winkelgeschwindigkeit Niveaufläche sein kann. Für diesen Fall, wo die Niveaufläche in die Oberfläche fällt, behalten die Ausdrücke ihre Gültigkeit.

Bringen wir (2) auf die Form

$$(x'^2 + y'^2) \frac{n - \frac{nE}{3} - \frac{\omega^2}{2}}{m - w_0} + z'^2 \frac{n + \frac{2nE}{3}}{m - w_0} = 1, \quad (4)$$

so erkennen wir, daß die Oberfläche mit der Niveaufläche  $w_0$  zusammenfällt für

$$\frac{m - w_0}{n - \frac{nE}{3} - \frac{\omega^2}{2}} = a^2 \quad (5)$$

und

$$\frac{m - w_0}{n + \frac{2nE}{3}} = b^2;$$

wenn wie bisher  $a$  und  $b$  die große und kleine Halbaxe der Meridianellipse der Oberfläche bezeichnen. Aus den letzten beiden Ausdrücken ergibt sich

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{nE + \frac{\omega^2}{2}}{n - \frac{nE}{3} - \frac{\omega^2}{2}} = e'^2. \quad (6)$$

Hieraus folgt

$$\omega^2 = 2n \frac{e'^2 - (3 + e'^2) \frac{E}{3}}{1 + e'^2}$$

und mit Rücksicht auf die Werte von  $n$  und  $E$  nach (3) weiter:

$$\omega^2 = 2\pi k^2 \Theta \frac{3 + e'^2}{e'^3} \left( \arctan e' - \frac{3e'}{3 + e'^2} \right). \quad (7)$$

Für kleine  $e'$  giebt die Reihenentwicklung

$$\omega^2 = \frac{8}{15} \pi k^2 \Theta e'^2 \left( 1 - \frac{6}{7} e'^2 + \dots \right). \quad (7^*)$$

Differenziert man die Parenthese in (7) nach  $e'$ , so erkennt man, daß der Differentialquotient für jeden Wert von  $e'^2$  positiv ist. Da nun für  $e' = \text{null}$  die Parenthese auch null ist, so wird, wie leicht zu ersehen, für positive Werte von  $e'$  der Wert der rechten Seite von (7) stets positiv, und es ist mithin  $\omega$  für jeden Wert von  $e'$ , der bei einem abgeplatteten Rotationsellipsoid vorkommen kann, reell.

Nehmen wir  $e'$  sehr klein an, so ist in erster Annäherung

$$\omega^2 = \frac{8}{15} \pi k^2 \Theta e'^2. \quad (8)$$

Setzen wir nun das Verhältniß von Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator gleich  $\tau$ , so ist angenähert

$$\tau = \frac{\omega^2 a}{\frac{4}{3} \pi k^2 \Theta a};$$

hiermit giebt (8) angenähert

$$e'^2 = \frac{5}{2} \tau,$$

woraus ebenso genau für die Abplattung  $\alpha$  die Relation folgt:

$$\alpha = \frac{5}{4} \tau. \quad (9)$$

Bei der Erde, welche keine homogene Flüssigkeitsmasse darstellt, ist diese Beziehung nicht erfüllt, denn hier ist

$$\tau = \frac{1}{288,4} \quad \frac{5}{4} \tau = \frac{1}{230,7},$$

dagegen

$$\alpha = \frac{1}{290} \quad \text{bis} \quad \frac{1}{299}.$$

Die Beziehung von  $\alpha$  zu  $\tau$  bei dem im Gleichgewicht befindlichen, rotierenden, homogenen Ellipsoid wurde bereits S. 107 § 24 genauer entwickelt gelegentlich der Erwähnung der bezüglichlichen Untersuchungen von *Clairaut*.

Eingehend wird das rotierende, homogene Flüssigkeitsellipsoid untersucht von *Laplace*, *Méc. cél.* t. 2, l. 3, p. 50–62. Er findet namentlich auch, daß zu jeder Rotationsgeschwindigkeit zwei oder kein Rotationsellipsoid gehören und daß das längliche Rotationsellipsoid als Gleichgewichtsfigur unmöglich ist. Für unsere Zwecke genügt das oben Gegebene; übrigen zeigt (8) sofort die Unmöglichkeit eines negativen  $e'^2$  bei kleinen Werten desselben.

*Laplace* bemerkt a. a. O. S. 63, daß die Untersuchung über das Rotationsellipsoid nicht genügt, daß man vielmehr sich bemühen müsse, alle Gleichgewichtsfiguren zu finden. Im folgenden Paragraphen nehmen wir eine ähnliche Untersuchung wie *Laplace* a. a. O. S. 63–72 vor, nämlich die Lösung dieser Aufgabe für nahezu kugelförmige, homogene Massen, sodaß Glieder der Ordnung des Quadrats der Abplattung vernachlässigt werden können.

§ 35. Eine rotierende, nahezu kugelförmige, homogene, flüssige Masse muß die Form eines Rotationskörpers haben. Der auf den Schwerpunkt als Koordinatenanfang bezogene Radiusvektor sei, nach Kugelfunktionen  $K$  von  $\varphi$  und  $\lambda$  entwickelt, gleich

$$r = R (1 - \alpha [K_1 + K_2 + K_3 + \dots]) . \quad (1)$$

Hierin ist  $\alpha$  ebenso wie  $R$  eine Konstante.

Zur Entwicklung des Potentials der Anziehung auf einen Punkt  $P'$  mit den Polarkoordinaten  $r'$ ,  $\varphi'$  und  $\lambda'$  benutzen wir die Reihe (8) S. 51, welche für  $r' > r$  gilt:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{r'} \left( 1 + \frac{r}{r'} P_1 + \frac{r^2}{r'^2} P_2 + \frac{r^3}{r'^3} P_3 + \dots \right) , \quad (2)$$

worin  $r$  sich vorläufig auf irgend einen inneren Punkt bezieht. Indem wir dies in den Ausdruck

$$v = k^2 \int \frac{dm}{e} \quad (3)$$

substituieren, nehmen wir zugleich  $dm = \Theta d\sigma \cdot r^2 dr$  und integrieren nach  $r$  von  $r = \text{null}$  bis zur Oberfläche, für welche wir den Radiusvektor wieder mit  $r$  bezeichnen. Wir erhalten so:

$$v = \frac{k^2 \Theta}{r'} \int \left( \frac{r^3}{3} + \frac{r^4}{4} \frac{P_1}{r'} + \frac{r^5}{5} \frac{P_2}{r'^2} + \frac{r^6}{6} \frac{P_3}{r'^3} + \dots \right) d\sigma . \quad (4)$$

Wir beschränken uns nun vorerst auf Glieder, welche nur die nullte oder erste Potenz von  $\alpha$  enthalten und setzen demgemäß in (4) allgemein

$$r^n = R^n (1 - n\alpha [K_1 + K_2 + K_3 + \dots] + \dots) .$$

Bei der Integration sind sodann die Sätze (2) und (3) S. 116 zu beachten, womit erhalten wird:

$$v = \frac{4}{3} \pi k^2 \Theta \frac{R^3}{r'} \left\{ 1 - 3\alpha \left[ \frac{1}{3} \frac{R}{r'} K_1' + \frac{1}{5} \frac{R^2}{r'^2} K_2' + \frac{1}{7} \frac{R^3}{r'^3} K_3' + \dots \right] + \dots \right\} . \quad (5)$$

Hierin sind die  $K'$  Kugelfunktionen von  $\varphi'$ ,  $\lambda'$ .

Zu diesem Potential der Anziehung tritt, wenn wir es auf einen Punkt der Oberfläche des rotierenden Körpers anwenden, wozu die Berechtigung allerdings noch fraglich ist, das Potential der Zentrifugalkraft. Bei der eingeführten Vernachlässigung von  $\alpha^2$  kann man zugleich in der geschlossenen Parenthese  $R : r'$  gleich 1 setzen, womit einfacher wird:

$$v = \frac{4}{3} \pi k^2 \Theta \frac{R^3}{r'} \left\{ 1 - 3\alpha \left[ \frac{1}{3} K_1' + \frac{1}{5} K_2' + \frac{1}{7} K_3' + \dots \right] + \dots \right\} . \quad (6)$$

Nehmen wir die Rotationsaxe, die immer den Schwerpunkt enthält, als  $z$ -Axe, so ist das Gesamtpotential

$$w = v + \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 \cos^2 \varphi'$$

oder anders geschrieben:

$$w = v + \frac{1}{3} \omega^2 r'^2 - \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 \left( \sin^2 \varphi' - \frac{1}{3} \right), \quad (7)$$

worin  $v$  aus (6) zu substituieren ist.

Für irgend eine Niveaufläche außerhalb des rotierenden Körpers ist  $w$  konstant. Nehmen wir, wie bereits bemerkt, an, daß (5) auch noch für die Oberfläche gilt und nehmen wir ferner an, daß daselbst  $w$  konstant gleich  $w_0$  sei, so ist nun, wenn

$$\frac{4}{3} \pi \Theta R^3 \text{ mit } M \quad (8)$$

bezeichnet wird:

$$w_0 = \left\{ \frac{k^2 M}{r'} \left( 1 - 3\alpha \left[ \frac{1}{3} K_1' + \frac{1}{5} K_2' + \frac{1}{7} K_3' + \dots \right] + \dots \right) + \frac{1}{3} \omega^2 r'^2 - \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 \left( \sin^2 \varphi' - \frac{1}{3} \right) \right\}. \quad (9)$$

Diese Gleichung ist eine Gleichung zwischen  $r'$ ,  $\varphi'$  und  $\lambda'$ , den Polarkoordinaten eines Oberflächenpunktes, und sie muß identisch erfüllt werden, wenn wir  $r'$  nach Gleichung (1), von der wir ausgegangen sind, gleich  $R(1 - \alpha[K_1' + K_2' + K_3' + \dots])$  einführen. Mit Vernachlässigung von  $\alpha^2$  folgt

$$w_0 = \left\{ \frac{k^2 M}{R} \left( 1 + \alpha \left[ \frac{2}{5} K_2 + \frac{4}{7} K_3 + \dots \right] \right) + \frac{1}{3} \omega^2 R^2 - \frac{1}{2} \omega^2 R^2 \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \right\},$$

wobei die oberen Striche weggelassen sind, so daß  $r$ ,  $\varphi$  und  $\lambda$  wieder auf die Oberflächenpunkte ausschließlich bezogen gedacht werden.

Man erkennt, daß für beliebige Werte von  $\varphi$  und  $\lambda$  diese Gleichung nur identisch erfüllt ist, falls die Kugelfunktionen

$$K_3 = K_4 = K_5 \text{ u. s. f.} = \text{null}$$

sind, außerdem aber

$$K_2 = \frac{5}{4} \frac{\omega^2 R^3}{\alpha M k^2} \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \quad (10)$$

wird, mithin frei von  $\lambda$  ist.

$K_1$  bestimmt sich nicht; aber wir wissen aus der ähnlichen Entwicklung des Paragraphen 5 S. 58, daß  $K_1'$  im Potential (5) verschwindet, weil der Schwerpunkt Koordinatenanfang ist. Wir erhalten somit als Gleichung der Oberfläche

$$r = R(1 - \alpha K_2), \quad (11)$$



wobei  $\alpha K_2$  sich nach (10) bestimmt. *Die Gleichgewichtsoberfläche ist mithin bis auf Größen der Ordnung  $\alpha^2$  jedenfalls ein abgeplattetes Rotationsellipsoid.* Die Abplattung wird nach (10) und (11) gleich

$$\alpha = \frac{5}{4} \frac{\omega^2 R^3}{Mk^2} \quad \text{d. i.} \quad \frac{5}{4} \epsilon,$$

da  $M$  nach (8) hinreichend genau die Masse und  $\omega^2 R^3 : Mk^2$  also das Verhältnis  $\epsilon$  der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator ist.

Die vorstehende Untersuchung ist insofern mangelhaft, als der Ausdruck (5) für  $v$  noch für die Oberfläche als gültig vorausgesetzt wird. Ganz allgemein genommen ist dies aber durchaus unzulässig, wie wir für den ähnlichen Fall des Erdkörpers schon S. 70 bemerkt haben. Allein wenn wir die physikalisch sehr plausible Voraussetzung machen, daß die Abweichungen der Oberfläche des Gleichgewichtssphäroids von der Kugel in sanften Undulationen erfolgen, so erscheint es für den beabsichtigten Genauigkeitsgrad zulässig, den Ausdruck (5) bis zur Oberfläche anzuwenden.

Denkt man sich nämlich das Sphäroid durch eine ihm eingeschriebene Kugelfläche vom Radius  $b$  zerlegt in eine Kugel und eine dünne Schale, so zerfällt das Potential in dasjenige der Kugel und dasjenige der Schale. Letzteres kann man dadurch mit hinreichender Genauigkeit ableiten, daß man die Masse der Schale radial nach innen auf die Kugelfläche  $b$  kondensiert annimmt und das Potential einer Kugelfläche mit der veränderlichen Dichtigkeit  $\Theta(r-b)$  dafür setzt. Diese leichte Rechnung, welche wir dem Leser überlassen dürfen, führt mit geringen, jedenfalls zulässigen Vernachlässigungen zur Reihe (5). Wir werden im folgenden Kapitel bei anderer Gelegenheit den Genauigkeitsgrad, welchen eine solche Kondensation bietet, genauer untersuchen; aber man sieht unmittelbar, daß derselbe nur dann nicht genügt, wenn es sich um die Darstellung rasch veränderlicher Glieder des Potentials handelt, die rasch veränderlichen Undulationen der Oberfläche entsprechen.

Für das dreiaxige, von der Kugel wenig abweichende Ellipsoid, gilt unsere Entwicklung jedenfalls; denn für dieses Ellipsoid weiß man durch andere Untersuchungen (z. B. Erweiterung derjenigen der Paragraphen 29—31 für drei ungleiche Axen), daß die Reihe (5) bis zur Oberfläche konvergiert. Wir ersehen daher, daß *das dreiaxige Ellipsoid nicht zu den Gleichgewichtsoberflächen eines rotierenden, nahezu kugelförmigen, homogenen Flüssigkeitssphäroids gehört.*

Über die Geschichte der Theorie der Gleichgewichtsfigur des rotierenden, flüssigen Körpers ist *Todhunter, History of Attraction and the Figure of the Earth*, insbesondere Bd. 2 S. 53 Art. 845—847 und weiterhin S. 285 u. ff. zu vergleichen. Ferner für neuere Untersuchungen *L. Matthiessen* in der Zeitschrift für Mathematik und Physik von *Schlömilch* 1871 Bd. 16 S. 290 u. ff.

Nur entnehmen daraus Folgendes: Die Drehung eines Metallringes um seinen Durchmesser als eines zur Figur der Erde in Beziehung stehenden Apparats erwähnt bereits 1726 *Desagulier* in einer Schrift über die Figur der Erde (*Todh.* 1. p. 106). *Newton* setzte, wie hier schon S. 103 bemerkt, voraus, daß das abgeplattete Ellipsoid eine Gleichgewichtsfigur für eine homogene Masse sei. *Clairaut* gab 1743 dazu einen Beweis in seiner *Figure de la Terre*, vergl. S. 105. *Legendre* erbrachte zuerst den Beweis, daß jenes Ellipsoid unter gewissen Umständen die einzig mögliche Form sei, was *d'Alembert* vergeblich versucht hatte, und *Laplace* wies u. a. nach, daß das längliche Rotationsellipsoid keine Gleichgewichtsfigur sei. Während *Legendre* zuerst einen beliebigen, nahezu kugelförmigen Rotationskörper untersuchte, ging *Laplace* zuerst auf ganz beliebige, nahezu kugelförmige Sphäroide ein und suchte nachzuweisen, daß sie bis auf Größen der Ordnung des Quadrates der Abplattung abgeplattete Rotationsellipsoide sein müßten. *Liouville*, *Poisson* und *Todhunter* verbesserten den Beweis. (Auf diese letzteren Entwicklungen konnten wir hier nicht eingehen.)

*Jacobi* fand 1834, daß auch das dreiaxige Ellipsoid eine Gleichgewichtsfigur sein könne, (vergl. *Thomson und Tait, Handbuch der theor. Physik* I. 1. S. 322) und dies wurde wiederholt von Geodäten als Ausgang für Berechnungen eines dreiaxigen Erdellipsoids aus Gradmessungen benutzt. Allein *Clausen* wies schon 1841 Bd. 18 No. 418 S. 145 der *Astronom. Nachr.* nach, daß das dreiaxige Ellipsoid mit den drei Halbaxen  $a > b > c$  nur für  $\frac{c}{a} < \sqrt{\frac{1}{2}}$  bestehen kann, was bei der Erde sicher nicht stattfindet. Wie die genauere Untersuchung zeigt, würden für die tatsächliche Rotationsgeschwindigkeit der Erde die Beziehungen der Axen folgende sein:

$$a = 52,4346 c \quad b = 1,002313 c ,$$

während für die der Erde entsprechende Rotationsform ist, vergl. S. 107:

$$a = b = \left(1 + \frac{1}{230,7}\right) c .$$

Strenggenommen genügt die Betrachtung homogener Massen als Analogon zur Erde nicht. *Laplace* untersuchte daher in der *Méc. cél.* (t. 2 l. 3 p. 85—90) auch einen geschichteten, flüssigen Körper auf seine Oberfläche, allerdings unter Voraussetzung nahezu kugelförmiger Gestalt. Er findet auch hier die Figur, abgesehen von der zweiten Potenz der Abplattung, elliptisch. Bei dieser Gelegenheit werden noch eine Relation zwischen Abplattung und Dichtigkeit der Schichten abgeleitet und für verschiedene Dichtigkeitsgesetze als mögliche *Grenzen der Abplattung*

$$\frac{1}{2} \epsilon \text{ und } \frac{5}{4} \epsilon$$

$$\text{oder rund } \frac{1}{577} \text{ und } \frac{1}{231}$$

ermittelt, ersteres für den Fall der Konzentration der Masse im Schwerpunkt, letzteres für homogene Verteilung. (Vergl. auch § 12 im 6. Kap.)

§ 36. Schätzung der Abweichung der Oberfläche einer flüssigen Erde von der Gestalt eines Rotationsellipsoids. Da die Dichtigkeit der Erde veränderlich ist und zwar nach innen zu-

nimmt (S. 127), so kann das abgeplattete Rotationsellipsoid für eine flüssige Erde, wie sich zeigen läßt, nicht mehr die Form ihrer Oberfläche angeben. Wir wollen hierauf und auf eine sorgfältige Schätzung der Abweichung nicht eingehen. Wir begnügen uns, einige Betrachtungen anzustellen, die uns ein rohes Maß der Abweichung mit geringerem Aufwand von Entwicklung abzuleiten gestatten.

Zunächst bestimmen wir das Potential eines homogenen Rotationssphäroids auf einen Punkt  $(r', \varphi')$  außerhalb. Wir können hier sogleich an den Ausdruck (4) des vorigen Paragraphen anknüpfen:

$$v = \frac{k^2 \Theta}{r'} \int \left( \frac{r^3}{3} + \frac{r^4}{4} \frac{P_1}{r'} + \frac{r^5}{5} \frac{P_2}{r'^2} + \frac{r^6}{6} \frac{P_3}{r'^3} + \frac{r^7}{7} \frac{P_4}{r'^4} + \dots \right) d\sigma. \quad (1)$$

Für den Radiusvektor  $r$  der Oberfläche setzen wir die Entwicklung nach Kugelfunktionen von  $\varphi$  an (vergl. S. 65):

$$\left. \begin{aligned} r &= R (1 + \alpha_1 K_2 + \alpha_2 K_4 + \dots), \\ K_2 &= \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \\ K_4 &= \sin^4 \varphi - \frac{6}{7} \sin^2 \varphi + \frac{3}{35} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$K_1, K_3$  u. s. f. sind sogleich weggelassen, da wir uns auf Rotationsflächen, symmetrisch zum Äquator, beschränken dürfen.

Bei den Entwicklungen berücksichtigen wir die erste und zweite Potenz von  $\alpha_1$ , nur die erste aber von  $\alpha_2$ . Die Potenzen von  $r$  entwickeln wir sogleich wieder nach Kugelfunktionen, wobei wir indes nur bis  $K_4$  gehen. Dabei ist Gebrauch zu machen von der Identität

$$K_2^2 = K_4 + \frac{4}{21} K_2 + \frac{4}{45}, \quad (3)$$

die leicht aufzustellen ist.

Alle Potenzen von  $r$  enthalten nur  $K_2$  und  $K_4$ ; nach Satz (3) S. 116 verschwinden deshalb bei der Integration in (1) die Glieder mit  $P_1$  und  $P_3$ ; ferner kommen in betracht im Gliede mit

$$\begin{aligned} r^3 &\text{ nur das von } K \text{ freie Glied} \\ r^5 &\text{ „ „ Glied mit } K_2 \\ r^7 &\text{ „ „ „ „ } K_4. \end{aligned}$$

Diese Glieder sind

$$\begin{aligned} R^3 \left( 1 + \frac{4}{15} \alpha_1^2 \right) &\text{ für } r^3 \\ R^5 K_2 \left( 5 \alpha_1 + \frac{40}{21} \alpha_1^2 \right) &\text{ „ } r^5 \\ R^7 K_4 \left( 7 \alpha_2 + 21 \alpha_1^2 \right) &\text{ „ } r^7. \end{aligned}$$

Beachtet man nun noch den Satz (2) S. 116, so ergibt sich ohne Schwierigkeit

$$v = \frac{4}{3} \pi k^2 \Theta \frac{R^3}{r'} \left\{ \left( 1 + \frac{4}{15} \alpha_1^2 \right) + \frac{R^2}{r'^2} \left( \frac{3}{5} \alpha_1 + \frac{8}{35} \alpha_1^2 \right) K_2' \right. \\ \left. + \frac{R^4}{r'^4} \left( \frac{1}{3} \alpha_2 + \alpha_1^2 \right) K_4' + \dots \right\}, \quad (4)$$

worin  $K_2'$  und  $K_4'$  die in (2) angegebenen Kugelfunktionen, aber von  $\varphi'$ , sind. Indem wir

$$\frac{4}{3} \pi \Theta R^3 \left( 1 + \frac{4}{15} \alpha_1^2 \right) \text{ mit } M$$

bezeichnen, folgt aus (4)

$$v = \frac{k^2 M}{r'} \left\{ 1 + \frac{R^2}{r'^2} \left( \frac{3}{5} \alpha_1 + \frac{8}{35} \alpha_1^2 \right) K_2' + \frac{R^4}{r'^4} \left( \frac{1}{3} \alpha_2 + \alpha_1^2 \right) K_4' + \dots \right\}. \quad (4^*)$$

$M$  ist, wie sich direkt zeigen läßt, die Masse. Wir wissen aber bereits aus der ähnlichen Entwicklung S. 60, daß  $v$  mit  $k^2 M : r'$  beginnen muß. Was die Brauchbarkeit und die Genauigkeit der Formel (4\*) anlangt, so ist zu bemerken, daß (4\*) für das Rotationsellipsoid jedenfalls bis auf Glieder der dritten Potenz der Abplattung richtig ist. Wenn nun in (2)  $\alpha_2$  von seinem elliptischen Werte nur um ein Glied von der Ordnung der zweiten Potenz der Abplattung abweicht und in den nicht angesetzten Gliedern von (2) die Abweichungen mindestens nicht über die dritte Potenz gehen, so muss (4\*) bis zur zweiten Potenz der Abplattung incl. genau sein und auch eine wirkliche Näherungsformel darstellen, weil die Abweichung vom Ellipsoid wesentlich nur in einer sehr flachen Undulation,  $K_4'$  entsprechend, verläuft; (vergl. die entsprechenden Bemerkungen in dem vorigen Paragraphen auf S. 135).

Nehmen wir nun an, daß die Erde gebildet sei aus einem homogenen Sphäroid, welches im Innern durch homogene, kugelförmige, zum Schwerpunkt des Sphäroids konzentrische Schichten durchdrungen ist, so können wir für das Sphäroid allein den Ausdruck (4\*), für die übrige Masse aber den einfachen Ausdruck  $Masse : r'$  anwenden. Bezeichnen wir die Gesamtmasse mit  $M$ , die Sphäroidmasse mit  $M_1$ , so wird das Gesamtpotential

$$w = k^2 \left\{ \frac{M}{r'} + \frac{M_1 R^2}{r'^3} \left[ \left( \frac{3}{5} \alpha_1 + \frac{8}{35} \alpha_1^2 \right) K_2' + \frac{R^2}{r'^2} \left( \frac{1}{3} \alpha_2 + \alpha_1^2 \right) K_4' + \dots \right] \right\} \\ + \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 \cos^2 \varphi'. \quad (5)$$

Soll nun die Oberfläche des Sphäroids eine Niveaufläche sein, so muß  $w$  einen konstanten Wert  $w_0$  annehmen, wenn  $r'$  nach Maßgabe der ersten Formel (2) eingeführt wird. Indem wir jetzt den oberen Strich an  $r$  und  $\varphi$  weglassen, setzen wir bei der Substitution

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{1}{R} \left\{ 1 + \frac{4}{45} \alpha_1^2 - \left( \alpha_1 - \frac{4}{21} \alpha_1^2 \right) K_2 - \left( \alpha_2 - \alpha_1^2 \right) K_4 \right\} \\ \frac{K_2}{r^3} &= \frac{1}{R^3} \left\{ -\frac{4}{15} \alpha_1 + K_2 \left( 1 - \frac{4}{7} \alpha_1 \right) - 3 \alpha_1 K_4 \right\} \\ r^2 \cos^2 \varphi &= R^2 \left\{ \frac{2}{3} - \frac{8}{45} \alpha_1 - K_2 \left( 1 - \frac{20}{21} \alpha_1 \right) - 2 \alpha_1 K_4 \right\},\end{aligned}$$

welche Formeln leicht mit Rücksicht auf (3) abzuleiten sind. Es folgt

$$\begin{aligned}w_0 &= \left\{ \frac{k^2 M}{R} \left( 1 + \frac{4}{45} \alpha_1^2 \right) - \frac{4}{25} \alpha_1^2 \frac{k^2 M_1}{R} + \omega^2 R^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{4}{45} \alpha_1 \right) \right\} \\ &- \frac{K_2}{R} \left\{ k^2 M \left( \alpha_1 - \frac{4}{21} \alpha_1^2 \right) - k^2 M_1 \left( \frac{3}{5} \alpha_1 - \frac{4}{35} \alpha_1^2 \right) + \omega^2 R^3 \left( \frac{1}{2} - \frac{10}{21} \alpha_1 \right) \right\} \\ &- \frac{K_4}{R} \left\{ k^2 M \left( \alpha_2 - \alpha_1^2 \right) - k^2 M_1 \left( \frac{1}{3} \alpha_2 - \frac{4}{5} \alpha_1^2 \right) + \omega^2 R^3 \alpha_1 \right\},\end{aligned}$$

und da die Faktoren von  $K_2$  und  $K_4$  verschwinden müssen, wird

$$k^2 M \left( \alpha_1 - \frac{4}{21} \alpha_1^2 \right) - k^2 M_1 \left( \frac{3}{5} \alpha_1 - \frac{4}{35} \alpha_1^2 \right) + \omega^2 R^3 \left( \frac{1}{2} - \frac{10}{21} \alpha_1 \right) = 0$$

und

$$k^2 M \left( \alpha_2 - \alpha_1^2 \right) - k^2 M_1 \left( \frac{1}{3} \alpha_2 - \frac{4}{5} \alpha_1^2 \right) + \omega^2 R^3 \alpha_1 = 0.$$

Eliminiert man  $\omega$  und reduziert auf  $\alpha_2$ , so ergibt sich mit Vernachlässigung von  $\alpha_1^3$  die Näherungsformel:

$$\alpha_2 = 3 \alpha_1^2 \frac{3 - 2 \frac{M_1}{M}}{3 - \frac{M_1}{M}}. \quad (6)$$

Um nun die Abweichung vom Ellipsoid gleicher Abplattung zu bestimmen, ordnen wir den Ausdruck (2) für  $r$  zunächst nach Potenzen von  $\sin \varphi$ . Mit Einführung der Abplattung  $\mathfrak{a}$  und des Äquatorialhalbmessers  $a$  ist dann

$$r = a (1 - [\mathfrak{a} + \alpha_2] \sin^2 \varphi + \alpha_2 \sin^4 \varphi + \dots). \quad (7)$$

Da  $\mathfrak{a}$  und  $\alpha_1$  bis auf Größen der Ordnung  $\mathfrak{a}^2$  mit einander übereinstimmen, kann man in (6)  $\alpha_1^2$  mit  $\mathfrak{a}^2$  vertauschen, womit der Ausdruck (6) mit Vernachlässigung von  $\mathfrak{a}^3$  übergeht in

$$\alpha_2 = 3 \mathfrak{a}^2 \frac{3 - 2 \frac{M_1}{M}}{3 - \frac{M_1}{M}}. \quad (7^*)$$

Wir wissen bereits, daß für  $M_1 = M$  ein Rotationsellipsoid herauskommen muß. In der That folgt alsdann  $\alpha_2 = \frac{3}{2} \mathfrak{a}^2$ , wie es nach Bd. 1 S. 61 sein soll. Für das Rotationsellipsoid mit der Abplattung  $\mathfrak{a}$  und dem Äquatorialradius  $a$  ist somit der Ausdruck für den Radiusvektor:

$$r = a \left( 1 - \left[ \alpha + \frac{3\alpha^2}{2} \right] \sin^2 \varphi + \frac{3\alpha^2}{2} \sin^4 \varphi + \dots \right).$$

Der radiale Abstand vom Sphäroid und Ellipsoid beträgt daher, wenn die Radien durch die Indices  $S$  und  $E$  unterschieden werden:

$$r_S - r_E = \frac{1}{4} a \left( \frac{3\alpha^2}{2} - \alpha_2 \right) \sin^2 2\varphi.$$

Dies ist ein Maximum für  $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}$  und zwar wird mit Rücksicht auf (7\*):

$$(r_S - r_E)_{\max} = - \frac{9}{8} a \alpha^2 \frac{1 - \frac{M_1}{M}}{3 - \frac{M_1}{M}}. \quad (8)$$

Die mittlere Dichtigkeit der Erde ist 5,6; die Dichtigkeit  $\Theta_0$  an der Oberfläche etwa 2,8. Der kleinste Wert von  $M_1$  ist hiernach gleich  $\frac{1}{2} M$  anzunehmen, womit

$$(r_S - r_E)_{\max} = - 16^m$$

wird. Dieser Wert dürfte aber zu groß sein. Wir werden im sechsten Kapitel sehen, daß die Dichtigkeit anfangs sehr rasch zunimmt und zwar bei der Tiefe von etwa  $a : 4$  bereits gleich 5,6 ist. Legen wir nun dementsprechend ein homogenes Sphäroid mit der Dichte

$$\frac{1}{2} (2,8 + 5,6)$$

zu grunde, so wird  $M_1 = \frac{3}{4} M$  und  $(r_S - r_E)_{\max} = - 9^m$ .

Im sechsten Kapitel wird auch gezeigt, daß die Abplattung der Schichten gleicher Dichtigkeit nach innen wahrscheinlich abnimmt. Demgemäß dürfte ebenfalls der zuerst erhaltene Maximalabstand zu groß sein, da er gewissermaßen die extreme Annahme einer sehr raschen Änderung der Abplattung bis auf null macht. Der zweite Wert zeigt, daß eine mäßige Vergrößerung von  $\Theta_0$  die Differenz  $(r_S - r_E)_{\max}$  bedeutend herabdrückt. Jedenfalls sind also die Abstände zwischen Ellipsoid und Sphäroid gering.

Vergleicht man die soeben erhaltenen Resultate mit den Ergebnissen des Paragraphen 17 S. 90, so zeigt sich, daß bei gleichen Axenlängen die Normalsphäroide und das oben betrachtete Sphäroid um Größen derselben Ordnung, aber in entgegengesetztem Sinne, vom Ellipsoid abweichen. Dies kann nicht verwundern, da sehr geringe Abweichungen in der Massenanordnung im Erdinnern von derjenigen für flüssigen Zustand schon eine solche Differenz zu erzeugen im Stande sind. Unzweifelhaft ist die Erde aber bis zu einiger Tiefe fest und wenn nun auch hier durch Abweichungen der Massenanordnung

vom flüssigen Zustande Spannungen entstehen, die im groſsen und ganzen schlieſslich eine dem letzteren angenäherte Anordnung herbeiführen, so kann sich dies doch nicht auf Bruchteile des Radius erstrecken, die Gröſsen der Ordnung  $a^2$  sind. Man vergl. übrigens die Resultate von *Borenius* und *Paucker* S. 88 (13) und (14\*).

*Airy* hat nach *Thomson und Tait*, *Handbuch* I, 2 S. 360 eine genauere Untersuchung geführt und die Abweichung der Oberfläche einer flüssigen Erde vom Ellipsoid zu 24' d. h. 7<sup>m</sup> ermittelt. Man vergl. für solche Rechnungen auch die Entwicklungen von *Hargraeve* in den *Phil. Transact.* 1841 p. 75 und von *Ed. Schmidt* in seiner *mathem. Geogr.* Bd. 1 S. 339.

### Drittes Kapitel.

## Ableitung einer Formel für die Schwerkraft im Meeresniveau aus den Beobachtungen; kontinentale Abweichungen des Geoids.

§ 1. Potential und Anziehung einer kreisförmigen Scheibe auf einen Punkt normal über dem Zentrum. \*) Beschreibt man um den Mittelpunkt  $M$  der Scheibe mit dem Radius  $r$  einen Kreis (Fig. 9), so haben alle Punkte  $P$  desselben von  $P'$ , dem angezogenen Punkte, gleiche Entfernung  $e = \sqrt{z^2 + r^2}$ . Lassen wir nun  $r$  um  $dr$  wachsen und setzen die Dicke der Scheibe gleich  $dz$ , so entsteht das Raumelement  $2\pi r dr dz$ , welches in allen Teilen denselben Abstand  $e$  von  $P'$  hat. Es ist daher, wenn  $\Theta$  die konstante Dichtigkeit in der Scheibe bezeichnet, das Potential derselben gleich

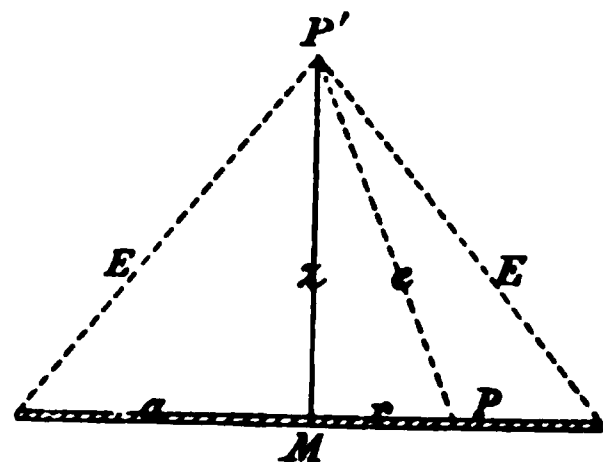


Fig. 9.

$$v = 2\pi k^2 \Theta dz \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}}.$$

Die Integration giebt sofort

$$v = 2\pi k^2 \Theta dz (E - z) \quad (1)$$

für

$$E = \sqrt{z^2 + a^2}.$$

Die Anziehung der Scheibe auf  $P'$  findet offenbar in Richtung  $P'M$  statt. Man erhält sie gleich

$$-\frac{\partial v}{\partial z} = 2\pi k^2 \Theta dz \left(1 - \frac{z}{E}\right). \quad (2)$$

\*) Wir stellen in den ersten Paragraphen dieses Kapitels einige vorbereitende Entwicklungen zusammen.



Diese Formel zeigt, daß die Anziehung der Scheibe auf den Punkt  $P'$  in der Richtung  $P'M$  normal zur Scheibe solange vom Abstände  $z$  des Punktes nahezu unabhängig ist, als dieser Abstand im Verhältnis zu der Entfernung des Punktes vom Rande der Scheibe sehr klein ist. Es gilt dies auch für excentrische Lagen von  $P'$  und für unregelmäßig begrenzte Scheiben, wenn nur die Projektion  $M$  von  $P'$  innerhalb der Scheibe liegt und  $z$  im Verhältnis zur kleinsten Randentfernung noch sehr klein ist.

§ 2. Potential und Anziehung eines homogenen, geraden Kreiscylinders auf einen Punkt seiner Axe, außerhalb, sowie eines homogenen, geraden Kreiskegels auf seine Spitze.

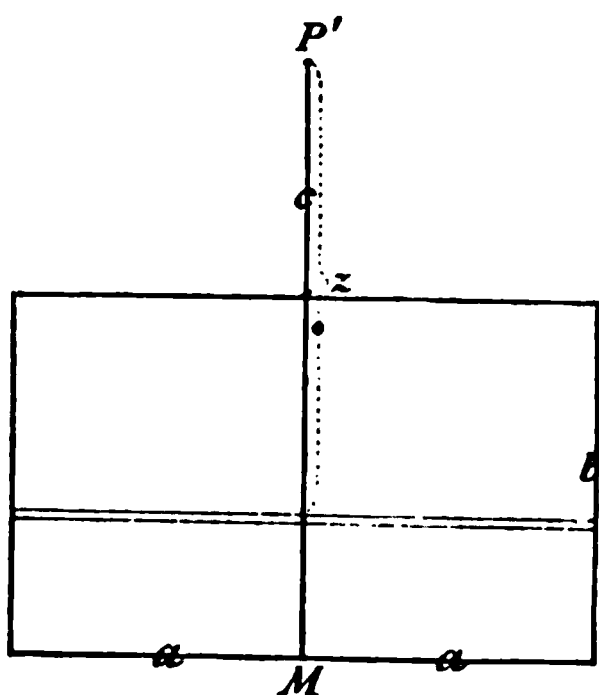


Fig. 10.

Für ein scheibenförmiges Element des Cylinders, Fig. 10, im Abstand  $z$  von  $P'$  gilt wieder Formel (1) des vorigen Paragraphen. Man hat damit für das Potential des ganzen Cylinders die Gleichung

$$v = 2\pi k^2 \Theta \int_c^{b+c} (\sqrt{z^2 + a^2} - z) dz.$$

Das unbestimmte Integral ist nach bekannten Formeln gleich

$$\frac{1}{2} z \sqrt{z^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \log \text{nat} (z + \sqrt{z^2 + a^2}) - \frac{1}{2} z^2 + \text{Konst.}$$

und hiermit ergibt sich

$$v = \pi k^2 \Theta \left\{ (b+c) \sqrt{a^2 + (b+c)^2} - c \sqrt{a^2 + c^2} - b(b+2c) + a^2 \log \text{nat} \frac{b+c + \sqrt{a^2 + (b+c)^2}}{c + \sqrt{a^2 + c^2}} \right\}. \quad (1)$$

Die Anziehung des Cylinders auf  $P'$  in Richtung  $P'M$  wird gleich

$$-\frac{\partial v}{\partial c} = 2\pi k^2 \Theta (b + \sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + (b+c)^2}), \quad (2)$$

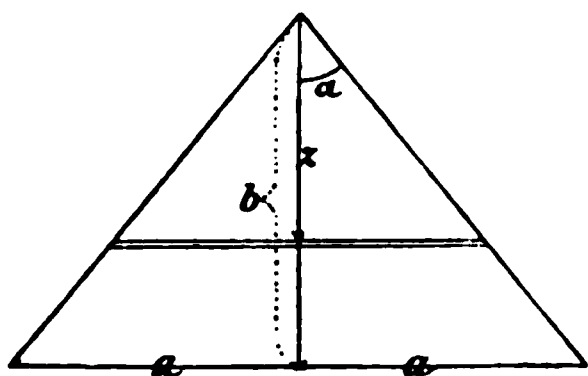


Fig. 11.

welchen Ausdruck man übrigens noch bequemer aus Formel (2) des vorigen Paragraphen durch direkte Integration findet.

Die Formeln (1) und (2) gelten nur für positive Werte von  $c$ , da im Innern eines Körpers der analytische Ausdruck für  $u$  ein anderer ist als außerhalb (vergl. Kap. 1 S. 34). Auch Formel (1) a. v. S. zeigt dies.

Für das Potential des Kegels in Bezug auf seine Spitze hat man, weil hier nach Fig. 11 in Bezug auf ein scheibenförmiges Element  $E = z \sec \alpha$  ist:

$$v = 2\pi k^2 \Theta \int_0^b z (\sec \alpha - 1) dz$$

d. i.

$$\left. \begin{aligned} v &= \pi k^2 \Theta b^2 (\sec \alpha - 1) \\ \text{oder} \\ v &= \pi k^2 \Theta b (\sqrt{a^2 + b^2} - b). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Dagegen erhält man für die Anziehung auf die Spitze aus Formel (2) des vorigen Paragraphen:

$$2\pi k^2 \Theta \int_0^b (1 - \cos \alpha) dz$$

d. i.

$$\left. \begin{aligned} 2\pi k^2 \Theta b (1 - \cos \alpha) \\ \text{oder} \\ 2\pi k^2 \Theta b \left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

§ 3. Potential und Anziehung eines homogenen Rotationsparaboloids auf einen Punkt seiner Axe, auferhalb. Für ein scheibenförmiges Element im Abstand  $z$  von  $P'$  gilt wieder Formel (1) § 1 S. 141, wobei für  $a$  jetzt  $y$  zu schreiben ist, Fig. 12. Man hat damit für das Potential des Paraboloids von der Höhe  $b$  die Gleichung

$$v = 2\pi k^2 \Theta \int_c^{b+c} (\sqrt{z^2 + y^2} - z) dz,$$

wobei zu setzen ist

$$y^2 = 2p(z - c) \quad (1)$$

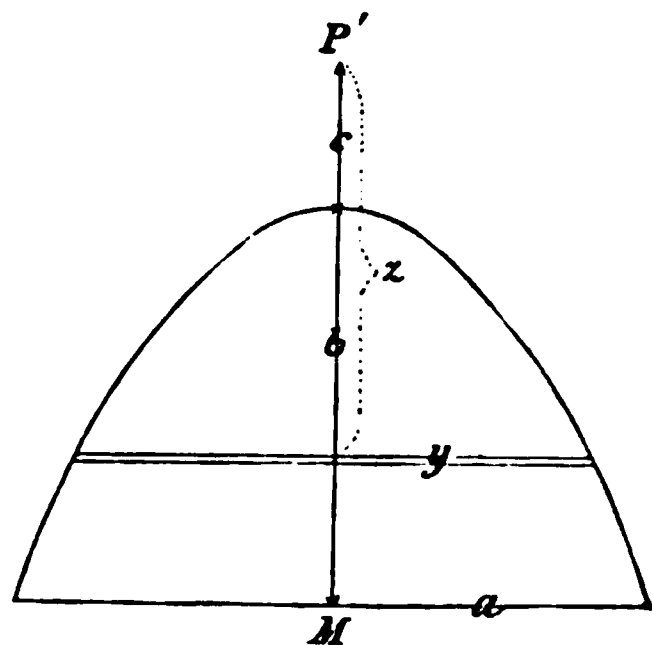


Fig. 12.

und  $p$  sich durch Anwendung dieser letztern Gleichung auf die Ordinate  $a$  in der Grundfläche bestimmt. Hier ist  $a^2 = 2pb$  und man hat daher

$$p = \frac{a^2}{2b}. \quad (2)$$

Der oben gegebene Ausdruck für  $v$  geht durch Substitution des Wertes von  $y^2$  nach (1) und einfacher Umformung über in

$$v = 2\pi k^2 \Theta \int_c^{b+c} \{ \sqrt{(z+p)^2 - p(2c+p)} dz + p - z \} dz.$$

Das unbestimmte Integral ist nach bekannten Formeln gleich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (z+p) \sqrt{(z+p)^2 - p(2c+p)} \\ & - \frac{1}{2} p(2c+p) \log \text{nat} \left\{ z+p + \sqrt{(z+p)^2 - p(2c+p)} \right\} - \frac{1}{2} z^2 + \text{Konst.} \end{aligned}$$

und hiermit ergibt sich

$$v = \pi k^2 \Theta \left\{ (b+c+p) \sqrt{(b+c)^2 + 2pb} - c(c+p) - b(b+2c) \right. \\ \left. - p(2c+p) \log \text{nat} \frac{b+c+p + \sqrt{(b+c)^2 + 2pb}}{2c+p} \right\}. \quad (3)$$

Die Anziehung des Paraboloids auf  $P'$  in Richtung  $P'M$  wird gleich

$$-\frac{\partial v}{\partial c} = 2\pi k^2 \Theta \left\{ \frac{b+c - \sqrt{(b+c)^2 + 2pb}}{+p \log \text{nat} \frac{b+c+p + \sqrt{(b+c)^2 + 2pb}}{2c+p}} \right\}. \quad (4)$$

Dasselbe ergibt sich durch Integration aus Formel (2) § 1 S. 141.

Nach Kap. 1 S. 34 gelten die Formeln (3) und (4) nicht im Innern des Paraboloids, was übrigens auch aus (1) S. 141 hervorgeht.

§ 4. Potential und Anziehung einer sphärischen Scheibe auf einen Punkt normal über dem Zentrum. Der angezogene Punkt  $P'$  liege *aufserhalb* der Kugelfläche vom Radius  $r$ , welche die

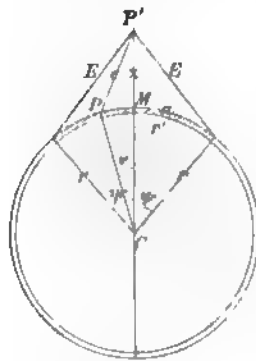


Fig. 13.

innere Begrenzung der von einem kleinen Kreise begrenzten Scheibe von der Dicke  $dr$  bildet, Fig. 13; den Punkt  $P'$ , die Mitte  $M$  der Scheibe und das Kugelzentrum  $C$  nehmen wir auf einer Geraden. Beschreibt man um den Mittelpunkt  $M$  mit dem Radius  $r\psi$  einen Kreis, so haben alle Punkte  $P$  desselben von  $P'$  die Entfernung  $e = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr' \cos \psi}$ . Lassen wir zugleich  $\psi$  um  $d\psi$  wachsen, so entsteht ein ringförmiges Raumelement vom Querschnitt  $dq = dr \cdot r d\psi$  und dem Volumen  $dq \cdot 2\pi r \sin \psi$ , dessen Teile alle in der gleichen Entfernung  $e$  von  $P'$  liegen. Mit Rück-

sicht auf die Fixierung des Scheibenrandes in der Figur durch  $\psi = \psi'$  folgt nun als Potential der Platte

$$v = 2\pi k^2 \Theta r^2 dr \int_0^{\psi'} \frac{\sin \psi d\psi}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr' \cos \psi}},$$

wobei die Dichtigkeit wieder mit  $\Theta$  bezeichnet ist. Die Integration giebt

$$v = 2\pi k^2 \Theta r^2 dr \frac{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr' \cos \psi'} - \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'}}{r'}, \quad (1)$$

worin die beiden Quadratwurzeln die immer positiven Entfernungen des angezogenen Punktes vom Rande bzw. der Mitte  $M$  bedeuten. Die Ausziehung der zweiten Quadratwurzel mit Beachtung der Bedingung  $r' > r$ , sowie die Benutzung der Abkürzungen

$$E = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Psi}$$

und

$$z = r' - r$$

geben:

$$v = 2\pi k^2 \Theta \frac{r}{r'} dr (E - z). \quad (2)$$

$z$  positiv.

Der negative Differentialquotient von  $v$  nach  $r'$  ist die Anziehung in Richtung  $P'C$  auf  $P'$ . Es ist nach naheliegenden Reduktionen:

$$-\frac{\partial v}{\partial r'} = 2\pi k^2 \Theta \frac{r^2}{r'^2} dr \left\{ 1 - \frac{r' \cos \Psi - r}{E} \right\}. \quad (3)$$

$r' > r$

Liegt  $P'$  innerhalb der Kugelfläche, so ist im Ausdruck für  $v$  nach (2)  $z = r - r'$  zu setzen und es wird

$$\frac{\partial v}{\partial r'} = 2\pi k^2 \Theta \frac{r^2}{r'^2} dr \left\{ 1 + \frac{r' \cos \Psi - r}{E} \right\}. \quad (3^*)$$

$r' < r$

Vergleicht man die vorstehenden Ausdrücke für das Potential und die Anziehung einer sphärischen Platte mit den in § 1 dieses Kapitels S. 141 für eine ebene Platte gefundenen, so ist leicht zu erkennen, daß die Krümmung wenig Einfluß hat, falls der Abstand des Punktes  $P'$  von der Platte,  $z = r' - r$ , und der Radius der Platte,  $a = r \Psi$ , kleine Größen gegen den Kugelradius  $r$  sind. Bei dem Potential ist dies unmittelbar ersichtlich. Um es auch bei der Anziehung hervortreten zu lassen, schreiben wir in (3)  $r' - 2r' \sin^2 \frac{\Psi}{2}$  für  $r' \cos \Psi$  und erhalten anstatt (3):

$$-\frac{\partial v}{\partial r'} = 2\pi k^2 \Theta \frac{r^2}{r'^2} dr \left\{ 1 - \frac{z}{E} + \frac{2r'}{E} \sin^2 \frac{\Psi}{2} \right\}. \quad (4)$$

$z$  positiv

Hierin kann man anstatt des dritten Gliedes der Parenthese,  $a = r \Psi$  gesetzt, angenähert schreiben:

$$\frac{1}{2} \frac{a}{E} \cdot \frac{a}{r},$$

und dies zeigt deutlich die Geringfügigkeit des Gliedes.

Ist  $z$  gegen  $a = r \Psi$  sehr klein und zugleich  $a$  gegen  $r$  klein, so gilt derselbe Satz, welcher in § 1 S. 142 für die ebene Scheibe hervorgehoben worden ist.

In dem Falle, daß zwar  $z$  sehr klein ist gegen  $a$ , aber  $a$  im übrigen einen beliebigen Wert hat, kann man in (4) vor der Parenthese  $r^2 = r'^2$  und innerhalb der Parenthese  $z : E$  gleich null setzen. Es geht (4) alsdann über in

$$-\frac{\partial v}{\partial r'} = 2\pi k^2 \Theta dr \left\{ 1 + \frac{E}{2r} \right\}.$$

Nun ist zugleich

$$v = 2\pi k^2 \Theta dr \cdot E;$$

man hat daher, falls  $z$  gegen  $a$  sehr klein ist, bei beliebigem Werte von  $a$ :

$$-\frac{\partial v}{\partial r} = 2\pi k^2 \Theta dr + \frac{v}{2r}. \quad (5)$$

Dieser Satz gilt nicht bloß für den besonderen Fall, in welchem er bewiesen wurde, sondern *ganz allgemein für jeden unendlich dünnen Massenbelag der Kugelfläche* und für alle unendlich nahe außerhalb derselben liegenden Punkte, in deren Umgebung die Dichtigkeit  $\Theta$  des Belags sich nicht unstetig ändert.

Um vorstehenden Satz allgemein zu beweisen, nehmen wir den angezogenen Punkt  $P'$  zunächst in der Kugelfläche liegend, auf welcher wir uns kondensierte Masse verbreitet denken. Wenn wir nun das Massenelement bei irgend einem Punkte  $P$  der Kugelfläche mit  $dm$  bezeichnen, so ist einerseits

$$v = k^2 \int \frac{dm}{e},$$

worin die Integration für die ganze Kugelfläche zu nehmen ist. Die Anziehung in radialer Richtung  $P'C$ , nach innen, wird andererseits gleich

$$-\frac{\partial v}{\partial r} = k^2 \int \frac{dm}{e^2} \sin \frac{\psi}{2}, \quad (6)$$

indem  $P'C$  mit  $PP'$  den Winkel  $90^\circ - \frac{\psi}{2}$  einschließt. Da aber  $e = 2r \sin \frac{\psi}{2}$  ist, so hat man

$$-\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{k^2}{2r} \int \frac{dm}{e} = \frac{v}{2r}. \quad (7)$$

Hierbei ist entsprechend dem Umstand, daß  $P'$  in die unendlich dünn mit kondensierter Masse belegte Fläche verlegt wurde, die Anziehung der Masse in der Umgebung von  $P'$  gleich null gesetzt. Dies zeigt (6) sofort, wenn wir  $dm$  durch die Masse für die Flächeneinheit: die Flächendichtigkeit, ausdrücken. Bezeichnen wir dieselbe mit  $\vartheta$  im Durchschnitt für alle Punkte in demselben Abstand  $e$ , so wird  $dm = 2r^2 \pi \sin \psi d\psi \cdot \vartheta$  und es folgt aus (6):

$$-\frac{\partial v}{\partial r} = 2\pi k^2 \int_{\psi=0}^{\psi=\pi} \vartheta \cos \frac{\psi}{2} d\frac{\psi}{2}.$$

Nimmt man  $\vartheta$  in der nächsten Umgebung von  $P'$  konstant, etwa bis  $\psi = \psi_1$ , so wird der Anteil dieser Umgebung an der radialen Anziehung gleich

$$2\pi k^2 \vartheta \sin \frac{\psi_1}{2};$$

derselbe verschwindet also mit  $\psi_1$ .

Liegt aber  $P'$  nicht in der Fläche, sondern unendlich nahe aufserhalb, so ist die Anziehung dieser benachbarten Masse sehr wesentlich. Man zerlege in diesem Falle die Kugelfläche in 2 Teile durch Ausschneiden einer zu  $P'$  konzentrischen Scheibe vom Radius  $a$ . Innerhalb  $a$  muß  $\vartheta$  als konstant zu betrachten sein. Dann gilt für den innern Teil Formel (5), worin nur  $\vartheta$  für  $\Theta dr$  zu setzen ist; für den äufsern Teil gilt Formel (7) und zusammen also offenbar wieder die Gleichung (5):

$$-\frac{\partial v}{\partial r} = 2\pi k^2 \vartheta + \frac{v}{2r}, \quad (8)$$

wobei  $\vartheta$  die Dichtigkeit in der Umgebung von  $P'$  darstellt.

Über Formeln bei endlicher Dicke der Platten vergl. *Pratt, Phil. Transact.* 1871, p. 341.

Über eine ähnliche Gleichung für die Oberfläche eines nahezu kugelförmigen, homogenen Körpers von *Laplace* vergl. *Méc. cél.*, t. II l. III Nr. 10 sowie t. V l. XI und *Todhunter, History of Attraction*, Bd. 2 S. 253.

### § 5. Abstand von Niveausphäroid und Niveaufläche gleichen Potentialwertes.

Im vorigen Kapitel ist für einen Näherungsausdruck  $U$  des Potentials  $W$  der Schwerkraft gezeigt worden, wie sich mit Hülfe von Schweremessungen die Gestalt der zugehörigen Niveausphäroide aufserhalb der mathematischen Erdoberfläche bestimmen läfst. Wir denken uns jetzt ganz allgemein unter  $U$  eine Funktion, welche einen Näherungsausdruck von  $W$  vorstellt. Wir denken uns ferner zu den Gleichungen  $W = W_0$  und  $U = W_0$ , unter  $W_0$  eine Konstante verstanden, die zugehörigen Flächen aufgesucht. Dann gilt es eine Beziehung zu ermitteln für den Abstand  $QP = N$ , um welchen sich, Fig. 14, die Niveaufläche  $W = W_0$  über das Niveausphäroid  $U = W_0$  in der Normalen  $PQ$  des letzteren erhebt. Diese Beziehung kann dann selbstredend auch für die besonderen Formen von  $U$  Anwendung finden, die im vorigen Kapitel für Niveausphäroide aufserhalb benutzt worden sind.

Im allgemeinen wird nun in einem beliebigen Punkte der Wert der Funktion  $U$  von  $W$  abweichen um eine Gröfse  $T$ :

$$W = U + T. \quad (1)$$

Ist in dem Punkte insbesondere  $W = U = W_0$ , so hat  $T$  den Wert null. Wir sehen also zunächst, daß Niveaufläche und Niveausphäroid

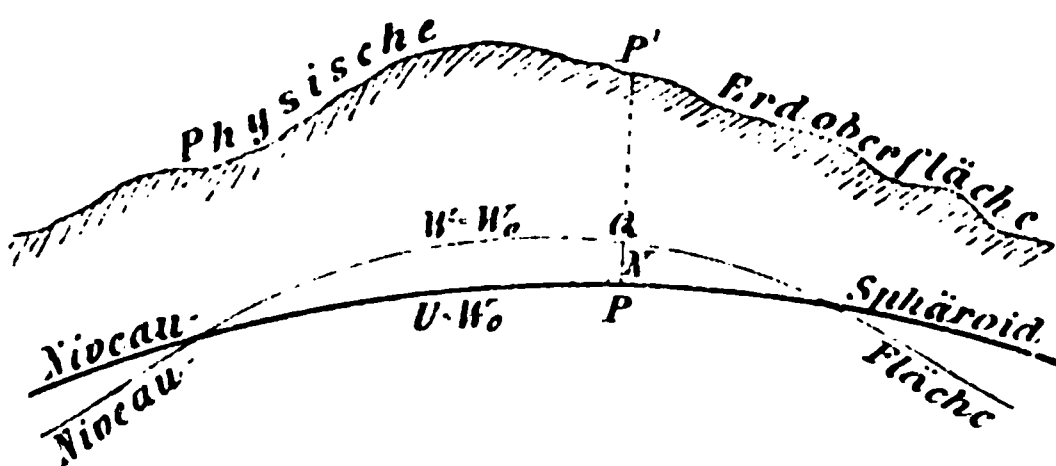


Fig. 14.

sich da schneiden, wo  $T = \text{null}$  ist. Ist  $T$  für einen Punkt  $Q$  der Niveaufläche  $W = W_0$  nicht null, so hat  $U$  einerseits daselbst nach (1) den Wert  $W_0 - T$ . Andererseits kann man von  $P$  ausgehend  $U$  für  $Q$  nach *Taylor's* Satz herleiten und zwar ist für kleine  $N$  in erster Annäherung, wenn beliebige Höhen über  $P$  mit  $h$  bezeichnet werden:

$$U = W_0 + \left( \frac{dU}{dh} \right)_0 N + \dots$$

Da aber auch  $U = W_0 - T$  gefunden war, so folgt sofort aus der Gleichsetzung beider Ausdrücke

$$N = - \frac{T}{\left( \frac{dU}{dh} \right)_0} + \dots,$$

oder mit der Festsetzung, daß  $N$  nach außen wie in Fig. 14 positiv gezählt wird:

$$N = \frac{T}{\gamma} + \dots, \quad (2)$$

worin  $\gamma$  die der Funktion  $U$  in  $P$  entsprechende Beschleunigung der Schwere bedeutet.

In den Fällen des vorigen Kapitels bezeichnet  $\gamma$  die *normale* Schwerkraft.

Die Relation (2) hat *H. Bruns* in seiner *Figur der Erde* S. 20 angegeben und zwar in der Gestalt  $h = - T : \gamma \cos \varepsilon$ . Hierbei bedeutet  $h$  die Tiefe des Sphäroids  $U = W_0$  unter der Niveaufläche  $W = W_0$ , gemessen in der Lotrichtung von  $Q$ , wenn in  $Q$  die normale Schwerebeschleunigung gleich  $\gamma$  ist und die Lotrichtung daselbst mit der Richtung der normalen Schwerkraft den Winkel  $\varepsilon$  einschließt. Praktisch genommen laufen beide Formeln, die *Brunssche* und (2), auf dasselbe hinaus. Doch ist bei *Bruns* die Entwicklung eine etwas andere.

Da man die Werte von  $T$  im Niveau der Meeresfläche, welche einem wie im vorigen Kapitel auf grund der Schweremessungen zu bestimmenden Niveausphäroid  $U$  entsprechen, nicht kennt, so kann man von der Formel (2) allerdings keinen Gebrauch machen, um die Undulationen der Meeresfläche gegen ein Niveausphäroid gleichen Potentialwertes zu ermitteln. Nichtsdestoweniger ist die Formel von hoher Bedeutung, wie aus den zahlreichen Anwendungen derselben in diesem Kapitel hervorgehen wird.

Wir werden sie als das *Theorem von Bruns* bezeichnen.

**§ 6. Die Untersuchung der Brauchbarkeit der Entwicklung des Potentials  $W$  der Schwerkraft nach negativen Potenzen des Radiusvektors bis zur Meeresfläche (dem Geoid) erfordert eine Anwendung vorstehenden Theorems.**

S. 70 § 9 wurde darauf hingewiesen, daß diese S. 60 § 5 (7) gegebene Entwicklung in Strenge nicht bis zur Meeresfläche gelten kann. Um Gültigkeit zu erlangen, wird es nötig, der wirklichen Massenverteilung zwischen der physischen Erdoberfläche und einer der mathematischen



Erdoberfläche konzentrisch zum Erdschwerpunkt berührend eingeschriebenen Kugelfläche oder einer innerhalb der letzteren gelegenen Fläche eine ideelle Massenverteilung zu substituieren, für welche jene Entwicklung gilt. Allein es ist klar, daß mit dieser Abänderung der Massenlagerung auch Änderungen im Potential und in der Schwerkraft verknüpft sind. Man muß sich nun eine Vorstellung zu machen suchen, wie groß diese Änderungen etwa sind und welchen Einfluß dieselben auf die Bestimmung der Form der Niveauflächen, insbesondere der Meeresfläche, aus Schweremessungen haben.

Um eine jedenfalls zulässige Idealisierung durchzuführen, denken wir uns zu der mathematischen Erdoberfläche eine Parallelfäche im Abstand  $\alpha R$  (d. i. Abplattung mal mittlerer Erdradius) konstruiert. \*) Diese *Parallelfäche* erfüllt die Bedingung, innerhalb einer der mathematischen Erdoberfläche konzentrisch zum Erdschwerpunkt berührend eingeschriebenen Kugelfläche zu liegen, mindestens sehr nahe und hinreichend genau. Alle Massen außerhalb der Parallelfäche verschieben wir radial auf dieselbe; wir kondensieren also die äußeren Massen daselbst. Durch diese Kondensation gehen das wirkliche Potential  $W$  und die wirkliche Schwerkraft  $g$  in das theoretische Potential  $U$  und die theoretische Schwere  $\gamma$  über. Ist im Punkte  $Q$  der wirklichen Meeres-(Geoid-)Fläche  $W = U + T$ , so stehen die wirkliche und die theoretische Meeres-(Geoid-)Fläche gleichen Potentialwertes nach vorigem Paragraph daselbst um  $T : \gamma$  voneinander ab, wobei  $\gamma$  die theoretische Schwere in dem zu  $Q$  gehörigen Punkte  $P$  der theoretischen Meeresfläche bezeichnet.

Wir haben nun zunächst die Aufgabe,  $T$  zu schätzen, d. h. zu schätzen die Änderung im Potential infolge der Kondensation der äußeren Massen. Ferner sind zu schätzen die Änderungen der Schwerkraft im Niveau der Meeresfläche: 1. infolge der Verschiebung der letzteren um  $T : \gamma$ , 2. infolge der Kondensation der äußeren Massen.

**§ 7. Änderung des Potentials  $W$  durch Kondensation der äußeren Massen auf die Parallelfäche.** Bei der Untersuchung des Kondensationseffektes wird es jedenfalls eine gute Annäherung gewähren, die Meeresfläche und ihre Parallelfäche, die Kondensationsfläche, als Kugelflächen zu betrachten. Daß diese Annahme auf den Betrag des Kondensationseffektes keinen wesentlichen Einfluß hat, wird sich im Folgenden ohne weitere Betonung dieses Umstandes von selbst zeigen.

Wir denken uns  $W$  zunächst auf einen Punkt  $P'$  im Meeresniveau bezogen, Fig. 15. Ein im Punkte  $P$  befindliches Massenelement  $dm$  liefert zum Potential den Beitrag  $k^2 dm : e$ ; verschieben

\*) Durch die Annahme  $\alpha R$  wird nur ein plausibler Wert für den Abstand beider Flächen, nicht aber die Voraussetzung eingeführt, daß die Meeresfläche ein abgeplattetes Sphäroid sei.

wir das Massenelement aber in radialer Richtung auf die Kondensationsfläche nach  $P_1$ , so wird der Beitrag  $k^2 dm : e_1$ . Für kleine Winkel  $\psi$  ist nun nach der Figur  $e_1 > e$ , also der Beitrag nach der Kondensation ein kleinerer als vorher. Für grofse Werte  $\psi$  ist es aber gerade umgekehrt. Die Grenzfläche  $A_1 B B A_1$ , eine Rotationsfläche mit der Axe  $P'C$ , welche alle Punkte  $P$  der einen Art von

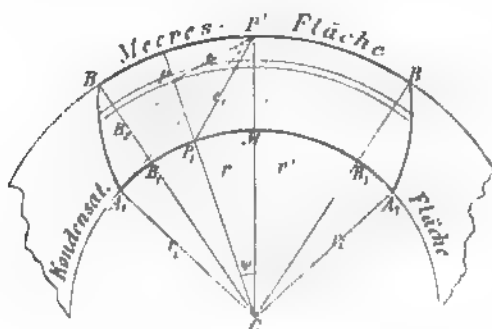


Fig. 15.

denen der andern Art trennt, findet man leicht.  $A_1$  liegt in dem Berührungspunkt der Tangente von  $P'$  an den innern Kreis;  $B$  liegt so, daß die Mitte  $B_2$  von  $B B_1$  im Dreieck  $B_2 P' C$  den Scheitel eines rechten Winkels bezeichnet und daß somit  $P' B = P' B_1$  ist; u. s. f.

Setzt man den Radius der Kondensationsfläche gleich  $r$ , und ihren Abstand von der Meeresfläche gleich  $aR$  oder  $ar_1$ , so hat man:

$$\begin{aligned} A_1 P' &= r_1 \sqrt{(1+a)^2 - 1} = r_1 \sqrt{2a} \text{ nahezu;} \\ B_2 P' &= r_1 \sqrt{(1+a)^2 - \left(1 + \frac{a}{2}\right)^2} = r_1 \sqrt{a} \text{ nahezu.} \end{aligned} \quad (1)$$

Wir leiten nunmehr einen Näherungsausdruck für die Potentialverminderung ab, welche die Kondensation der Masse  $A_1 B B A_1$  giebt, wobei wir konstante Dichte  $\Theta$  voraussetzen. Wäre die Kugelschale zwischen beiden Flächen ganz mit Masse gleicher Dichte erfüllt, so würde die Kondensation am Potentialwert nach S. 62 § 6 (6) nichts ändern. Die Kondensation von  $A_1 B B A_1$  giebt daher für  $P'$  einen Maximaleffekt, weshalb wir den entsprechenden, in Fig. 15 kräftig umschlossenen Körper kurz als Maximalkörper bezeichnen können.

Das Potential einer sphärischen Platte vom Radius  $r$ , der Dicke  $dr$  und dem Zentriwinkel  $\Psi$  am Rande ist nach S. 145 § 4 (2):

$$v = 2\pi k^2 \Theta r^2 dr \frac{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Psi} - (r' - r)}{rr}. \quad (2)$$

Kondensieren wir aber die ganze Masse  $A_1 B B A_1$  auf die Kondensationsfläche und denken uns dieselbe in unendlich dünne sphärische Platten zerlegt, so läuft die Kondensation darauf hinaus, daß jede Platte auf die Kondensationsfläche verschoben wird. Dabei erfolgt eine Verdichtung, weil die Oberflächenelemente bei der Verschiebung im Verhältnis  $r^2 : r_1^2$  abnehmen. Behalten wir  $dr$  als Plattendicke bei, so bleibt mithin  $\Theta r^2 dr$  ungeändert, und es wird das Potential der auf die Kondensationsfläche verschobenen Platte gleich

$$v_1 = 2\pi k^2 \Theta r^2 dr \frac{\sqrt{r_i^2 + r'^2 - 2r_i r' \cos \psi} - (r' - r_i)}{r_i r'} . \quad (3)$$

Die in (2) und (3) vorkommenden Quadratwurzeln sind aber einander gleich, wenn wir die Platte bis an die Fläche  $A_1 B$  ausdehnen. Bezeichnen wir diese Wurzel mit  $E_r$ , so wird

$$v - v_1 = 2\pi k^2 \Theta r dr \frac{r - r_i}{r_i} \left(1 - \frac{E_r}{r'}\right) .$$

Setzen wir im Nenner für  $r_i$  den Wert  $r$ , so vereinfacht sich die Formel in

$$v - v_1 = 2\pi k^2 \Theta (r - r_i) \left(1 - \frac{E_r}{r'}\right) dr , \quad (4)$$

welche Formel die Differenz  $v - v_1$  höchstens um  $1/300$  ihres Wertes fehlerhaft giebt, da  $r : r_i$  von der Einheit nicht mehr als um rund  $1/300$  abweichen kann.

$E_r : r'$  liegt nach (1) zwischen rund  $1/12$  und  $1/17$ . Bei der Summierung der Ausdrücke (4) für alle Platten, in welche die Masse  $A_1 B B A_1$  zerlegt wurde, reicht es für die beabsichtigte Schätzung aus, für diesen Bruch einen Mittelwert  $1/15$  zu setzen. (Wegen des Faktors  $r - r_i$  muß zufolge genauerer Rechnung nicht das arithmetische Mittel des größten und kleinsten Wertes genommen werden, sondern ein Wert, der sich aus  $\frac{1}{3}$  des größten und  $\frac{2}{3}$  des kleinsten zusammensetzt). Integrieren wir nun, wobei für  $dr$  auch  $d(r - r_i)$  gesetzt werden darf, von  $r - r_i$  gleich null bis  $\alpha R$ , so folgt als Verminderung des Potentials für Punkt  $P'$  Fig. 15 durch Kondensation der Masse  $A_1 B B A_1$  auf die Parallelfäche:

$$0,93 \pi k^2 \Theta \alpha^2 R^2 . \quad (5)$$

Dieser Ausdruck, in welchem für  $R$  irgend ein mittlerer Radiusvektor der Meeresfläche, für  $\alpha$  ihre Abplattung zu setzen ist, bezeichnet wie bemerkt den Maximalbetrag der Potentialänderung im Meeresniveau durch Kondensation der Massen zwischen Meeresfläche und Parallelfäche. Der wirkliche Betrag wird in der Regel weit kleiner sein, insoweit nur die erwähnten Massen in betracht kommen. Es ist aber noch zu berücksichtigen, daß zu diesen letzteren in einigen Gegenden noch gewaltige Gebirgsmassen hinzutreten.

§ 8. Fortsetzung: Gebirgsmasse, Verschiebung der Meeresfläche. Denken wir uns die Meeresfläche noch von einer Platte überlagert, deren Stärke wir gleich  $\frac{1}{2} \alpha R$  setzen wollen, so konstruiert sich zunächst wieder wie früher die Grenzfläche  $B D D B$ , innerhalb welcher diejenigen Massen liegen, welche bei der Kondensation eine Potentialverminderung geben. Insbesondere ist  $P' D = P' D_1$  zu nehmen, Fig. 16; für die Mitte  $D_2$  von  $D D_1$  hat man die Relation

$$D_2 P' = r_i \sqrt{(1 + a)^2 - \left(1 + \frac{3}{4} a\right)^2} = \frac{1}{2} r_i \sqrt{2a}. \quad (1)$$

Die Masse  $B D D B$  zerlegen wir ebenfalls wie  $A_1 B B A_1$  in unendlich dünne sphärische Platten. Für eine Platte vom Radius  $r$  und der Dicke  $dr$  erhalten wir anstatt (2) S. 150, da jetzt  $r > r'$  ist (vergl. S. 145, Bem. für  $P'$  innerhalb):

$$v = 2\pi k^2 \Theta r^2 dr \frac{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Psi} - (r - r')}{rr'}; \quad (2)$$

die Kondensation giebt wieder den Ausdruck (3) des vorigen Paragraphen für  $v_1$ . Die Subtraktion des letzteren Ausdrucks von (2) führt unter Vernachlässigung von Bruchteilen der Ordnung  $a$  zu dem Ausdruck

$$v - v_1 = 2\pi k^2 \Theta \left\{ \frac{r' r_i + r' r - 2r_i r}{r'} - \frac{E_r}{r'} (r - r_i) \right\} dr. \quad (3)$$

Dies ist zu integrieren von  $r$  gleich  $r'$  bis  $r' + \frac{1}{2} a r'$  und giebt ohne

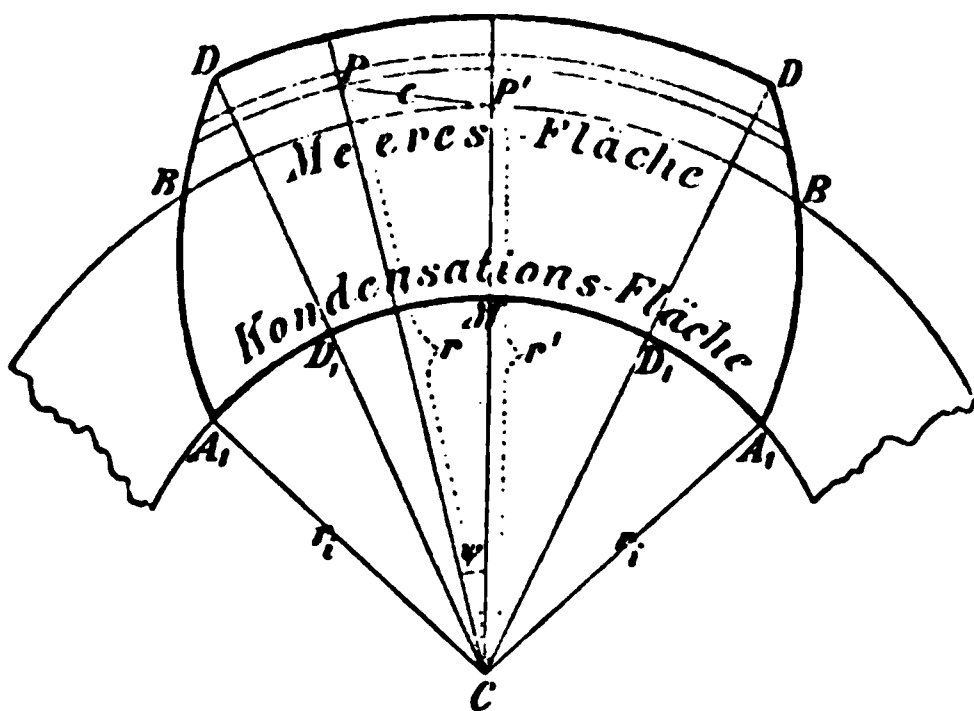


Fig. 16.

Schwierigkeit unter Substitution von  $r_i = r' - a r'$  und mit Vernachlässigung von Bruchteilen der Ordnung  $a$ , sowie unter Annahme eines konstanten Mittelwertes für  $E_r$ , als Potentialverminderung durch Kondensation der Masse  $B D D B$  auf die innere Kugelfläche:

$$\pi k^2 \Theta a^2 r'^2 \left( \frac{3}{4} - \frac{5}{4} \frac{E_r}{r'} \right).$$

$E_r : r'$  schwankt nach (1) dieses und des vorigen Paragraphen zwischen rund  $\frac{1}{17}$  und  $\frac{1}{24}$ ; nehmen wir  $\frac{1}{21}$  und schreiben für  $r'$  wieder  $R$ , so folgt

$$0,69 \pi k^2 \Theta a^2 R^2. \quad (4)$$

Dieser Ausdruck stellt die maximale Verminderung des Potentials für einen Punkt der Meeresfläche infolge der Kondensation einer darüberlagernden Gebirgsmasse von der Dicke  $\frac{1}{2} a R$  dar.

Fügen wir (4) zu (5) des vorigen Paragraphen, so erhalten wir die maximale Potentialverminderung im Meeresniveau mit Rücksicht auf Gebirgsmassen gleich

$$1,62 \pi k^2 \Theta a^2 R^2. \quad (5)$$

Wegen der im Vergleiche zur Wirklichkeit übertriebenen GröÙe der angenommenen Gebirgsmasse tritt dieser Effekt niemals ein.

Der Potentialverminderung entspricht eine Senkung der Meeresfläche gleichen Potentialwertes, welche durch Division des Ausdrucks (5) durch die Schwerkraft erhalten wird. Für die Berechnung der Schwerkraft genügt hierbei die Voraussetzung der Kugelgestalt. Ist  $\Theta_m$  die mittlere Dichtigkeit, so wird in der Nähe der Oberfläche die Schwerkraft angenähert gleich  $\frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R$  [S. 39 § 23 (3)] und es ist daher die Senkung der Meeresfläche höchstens gleich

$$1,2 \frac{\Theta}{\Theta_m} \alpha^2 R \text{ d. i. ca. } 40^m, \quad (6)$$

wenn  $\alpha = 1 : 300$  und  $\Theta = 0,5 \cdot \Theta_m = 2,8$  gesetzt wird.

Ohne Rücksicht auf die Gebirgsmasse ergibt sich die maximale Senkung nur zu

$$\text{ca. } 25^m. \quad (6^*)$$

Der Anteil der Gebirgsmasse allein ist

$$\text{ca. } 15^m. \quad (6^\dagger)$$

Es ist bemerkenswert, daß man zu dem Ausdruck (5) mit großer Annäherung auch gelangt, wenn man von der Krümmung derjenigen Teile der Kugelflächen absieht, welche die Masse  $A_1 D D A_1$  begrenzen. Außerdem zeigt sich, daß der größte Teil des Maximaleffekts durch diejenigen Massenteile erzeugt wird, welche der Linie  $P' C$  nahe liegen. Betrachten wir, um dies wenigstens für die unterhalb  $P'$  liegende Masse  $A_1 B B A_1$  nachzuweisen, die Formel (1) § 2 S. 142 für das Potential eines Cylinders von der Höhe  $b$  und dem Radius der Grundfläche  $a$ , bezogen auf den Mittelpunkt der Deckfläche. Indem wir demgemäß daselbst  $c$  gleich null setzen, erhalten wir als Potential:

$$\pi k^2 \Theta \left\{ b \sqrt{a^2 + b^2} - b^2 + a^2 \log \text{nat} \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \right\}.$$

Kondensieren wir diesen Cylinder auf seine Grundfläche, so ist zur Berechnung des Potentials Formel (1) § 1 S. 141 anzuwenden, dabei aber für  $\Theta dz$  zu setzen  $\Theta b$  und für  $z$   $b$ . Damit findet sich als Potential nach der Kondensation:

$$2 \pi k^2 \Theta \left\{ b \sqrt{a^2 + b^2} - b^2 \right\}.$$

Subtrahieren wir dies vom Vorigen, so ergibt sich als Potentialänderung infolge der Kondensation:

$$\pi k^2 \Theta \left\{ b^2 - b \sqrt{a^2 + b^2} + a^2 \log \text{nat} \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \right\}. \quad (7)$$

Behufs Vergleichung mit Ausdruck (5) des vorigen Paragraphen

ist hierin  $b = aR$  zu setzen.  $a$  nehmen wir der Reihe nach gleich  $b, 2b, 3b \dots 20b$  und erhalten für Ausdruck (7):

$$\begin{array}{rcl}
 \pi k^2 @ a^2 R^2 \cdot 0,47 & \text{bei } a = b & \\
 \text{,,} \quad . 0,69 & \text{,, } a = 2b & \\
 \text{,,} \quad . 0,79 & \text{,, } a = 3b & \\
 \text{,,} \quad . 0,85 & \text{,, } a = 4b & \\
 . \quad . \quad . & . \quad . \quad . & \\
 \text{,,} \quad . 0,97 & \text{,, } a = 20b & 
 \end{array} \quad (8)$$

Der Fall  $a = 20b$  entspricht aber den Dimensionsverhältnissen der Masse  $A_1 B B A_1$ ; im Vergleich zu (5) des vorigen Paragraphen zeigt sich also eine Übereinstimmung bis auf 4 Prozent. Man kann hieraus auf eine genügende Annäherung auch der anderen Angaben (8) schließen und ersieht, daß in der That die nächstgelegenen Massen den Hauptanteil am Maximaleffekt haben.

– § 9. Fortsetzung: Wahrscheinliche Maximalverschiebung der Meeresfläche. Der bisher betrachtete Maximaleffekt der Kondensation im Betrage von 25 bis 40<sup>m</sup> Senkung der Meeresfläche kann selbstverständlich nur eintreten, wenn lediglich der durch die Figuren 15 und 16 bezeichnete Maximalkörper in betracht kommt. Allein dieser Fall findet thatsächlich nie statt; denn alle Massen, welche sich außerhalb dieses Körpers über der Kondensationsfläche befinden, vermindern den Effekt. Derselbe kann sogar sein Vorzeichen wechseln, wenn innerhalb der Grenzen des zu einem Punkte  $P'$  gehörigen Maximalkörpers sich ein Meer befindet. Würde er für irgend einen Punkt  $P'$  ganz leer werden können, während außerhalb über der Kondensationsfläche im allgemeinen Masse von etwa 2,8 Dichtigkeit bis zur Meeresfläche lagerte, so würde mit Rücksicht auf das Verschwinden des Kondensationseffekts für eine homogene, gleichstarke Kugelschale in diesem Fall innerhalb bei  $P'$  eine Hebung von 25<sup>m</sup> durch die Kondensation entstehen. Da er jedoch in keinem Falle leer gedacht werden darf, sondern nur etwa entsprechend den tiefsten Ozeanen bis 9<sup>km</sup> Tiefe mit Wasser erfüllt, während weiterhin bis zur Tiefe  $aR = 21^{\text{km}}$  wie früher feste Masse von etwa 2,8 Dichtigkeit sein wird, so bleibt nur eine Hebung von etwa 10<sup>m</sup> übrig, wie man mit Hülfe der Formel (4) S. 151 leicht findet. Aber selbst dieses ist noch zu hoch bemessen, indem auch außerhalb des Maximalkörpers zu berücksichtigen ist, daß bis zur Tiefe von durchschnittlich 3 bis 4<sup>km</sup> auf  $\frac{8}{11}$  der Erdoberfläche anstatt der Dichtigkeit 2,8 nur die Dichtigkeit 1 vorhanden ist. Hierdurch reduziert sich die maximale Hebung auf etwa 8<sup>m</sup>.

Auch die Senkung ist oben zu reichlich gerechnet, indem noch nicht berücksichtigt wurde, daß der mit Masse von der Dichtigkeit

2,8 erfüllte Maximalkörper, ein kleiner Kontinent, außerhalb auch mit Masse umgeben sein wird und zwar bis zur Tiefe von durchschnittlich 3 bis 4<sup>m</sup> mit solcher von der Dichtigkeit 1, im übrigen mit solcher von der Dichtigkeit 2,8. Die Senkung reduziert sich dadurch auf etwa 5<sup>m</sup> für den Fall, daß kein Gebirge auf dem Kontinent lagert und steigt mit Rücksicht auf (6†) S. 153 unter der Annahme von Gebirgen auf nicht über 20<sup>m</sup>. Der letztere Maximalbetrag wird wohl selbst im Himalaya noch nicht eintreten; meistens werden kaum 10<sup>m</sup> erreicht werden.

Addieren wir diese 10<sup>m</sup> Senkung und jene 8<sup>m</sup> Hebung, so folgt ein Betrag von 18<sup>m</sup>, um welchen sich die Unterschiede der Radienvektorenlängen für die Meeresfläche, abgesehen von wenigen außergewöhnlichen Fällen, im Maximum durch die Kondensation ändern. Es hat dies auf die Abplattung der Meeresfläche sicher noch keinen Einfluß von  $\frac{1}{1000}$  ihres Betrages: die absoluten Beträge bis zu 10<sup>m</sup> Änderung der Radienvektorenlängen kommen aber gar nicht in betracht. Mithin kann man die Kondensation bezüglich der Gestalt der Meeresfläche als von unerheblichem Einfluß ansehen.

§ 10. Die Änderung der Schwerkraft im Meeresniveau durch dessen Verschiebung infolge der Kondensation ist ebenfalls als unerheblich zu betrachten; denn in freier Luft beträgt für 20<sup>m</sup> diese Änderung nur  $g : 160000$ , für 8<sup>m</sup> nur  $g : 400000$ . Das sind Beträge von der Ordnung der Beobachtungsfehler bei den besten Bestimmungen: im § 28 werden wir für den mittleren Beobachtungsfehler der besten Bestimmungen etwa  $\frac{1}{100000}$  von  $g$  finden. Hierbei ist noch abgesehen von denjenigen Fehlern, die durch die Reduktion von  $g$  aufs Meeresniveau entstehen und recht beträchtlich ausfallen können, sowie von den Schwankungen in der Schwerkraft infolge lokaler Massenunregelmäßigkeiten, welche Schwankungen gerade in den uns interessierenden Fällen der Verwertung der Schwere-messungen auch wie Fehler auftreten.

§ 11. Einfluss der Kondensation auf die Schwerkraft. Wir ermitteln nunmehr den Maximaleffekt der Kondensation auf die Schwerkraft für einen Punkt  $P'$  im Meeresniveau, Fig. 17. Auch hierbei reicht es aus die Meeresfläche und ihre Parallelfäche als Kugelflächen zu betrachten, wie sich von selbst im Folgenden zeigen wird. Ein Massenelement  $dm$ , welches sich vor der Kondensation zwischen beiden

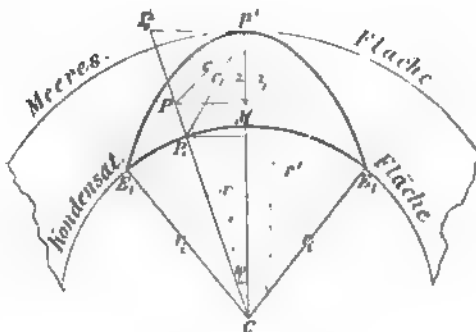


Fig. 17.

Flächen, der äußern und innern Kugelfläche, in  $P$  befindet und nach der Kondensation auf der innern Kugelfläche in  $P_1$ , übt auf  $P'$  eine Anziehung aus, deren in die Richtung  $P'C$  fallende Komponente gleich ist:

$$\begin{aligned} & \frac{dm}{e^2} \cdot \frac{z}{e} \text{ vor der Kondensation,} \\ & \frac{dm}{e_1^2} \cdot \frac{z_1}{e_1} \text{ nach der Kondensation.} \end{aligned}$$

Solange sich  $P$  weitab von  $P'$  befindet, ist die Folge der Kondensation immer eine Vergrößerung der zentralen Komponente, denn es ist dann gleichzeitig

$$\frac{1}{e_1} > \frac{1}{e} \text{ und } \frac{z_1}{e_1} > \frac{z}{e}.$$

Befindet sich dagegen  $P$  in der Nähe von  $P'$ , so ist auch eine Verminderung als Folge der Kondensation möglich. Liegt nämlich ein solcher Punkt  $P$  außerhalb der äußern Kugelfläche in  $P_0$  gerade in der Tangentialebene der äußern Kugelfläche bei  $P'$ , so ist die Komponente null; verschiebt sich sodann  $P$  nach innen, so wächst zunächst die Komponente wie vorher; allein  $e$  nimmt nur bis dahin ab, wo  $PP'$  normal zu  $PC$  steht und wächst von da an. Obwohl nun  $z : e$  stetig zunimmt, kann also doch wegen Abnehmens von  $1 : e$  auch die Komponente von einer gewissen Stelle an abnehmen. Zur Bestimmung des Maximizeffektes gilt es jetzt diejenige Fläche  $E_1 P' E_1$  aufzusuchen, in deren Punkten  $P$  die in Rede stehende Komponente gerade so groß ist, wie in den zugehörigen Punkten  $P_1$ .

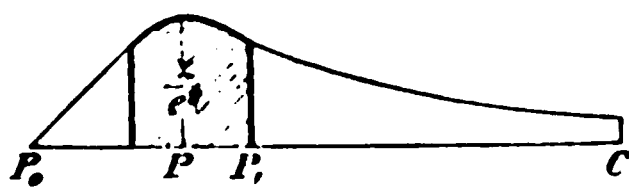


Fig. 18.

Zur Veranschaulichung zeigt Fig. 18 zu den Strecken  $P_0 P$  als Abscissen in irgend einem Maßstabe den Gang der Ordinaten  $z : e^3$ . In der Figur sind die Ordinate von  $P_1$  und die gleichgroße, welche einem Punkte der Fläche  $E_1 P' E_1$  angehört, hervorgehoben und die zwischen liegende Fläche schraffiert.

Um nun vorerst denjenigen Punkt  $E_1$  zu erhalten, wo die Fläche in die innere Kugelfläche einschneidet, haben wir zu beachten, daß hier die Punkte  $P$  und  $P_1$  der Fig. 18 zusammenfallen, also die Ordinate ein Maximum wird. Wir finden dasselbe aus der Bedingung

$$\frac{\partial \left( \frac{z}{e^2} \right)}{\partial r} = 0.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} z &= r' - r \cos \psi, \quad e = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi}, \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= -\cos \psi, \quad \frac{\partial e}{\partial r} = \frac{r - r' \cos \psi}{e} \end{aligned}$$



und

$$\frac{\partial\left(\frac{s}{e^2}\right)}{\partial r} = \frac{1}{e^2} \frac{\partial s}{\partial r} - \frac{2s}{e^3} \frac{\partial e}{\partial r}.$$

Hieraus folgt nach gehöriger Reduktion

$$\frac{\partial\left(\frac{s}{e^2}\right)}{\partial r} = \frac{1}{e^2} \left\{ 2 \cos \psi (r^2 + r'^2) - r r' (3 + \cos^2 \psi) \right\}. \quad (1)$$

Dieser Differentialquotient verschwindet, wenn die Parenthese rechter Hand null wird, d. h. für

$$\cos \psi = \frac{r^2 + r'^2 \pm \sqrt{(r^2 + r'^2)^2 - 3r^2 r'^2}}{r r'}. \quad (2)$$

Setzen wir nun in Anwendung auf Punkt  $E$ ,  $r = r_i$ , ferner wie früher

$$r_i = r' (1 - \alpha)$$

und vernachlässigen höhere Potenzen von  $\alpha$  als die zweite, so giebt der Ausdruck (2) ohne Schwierigkeit die einzig brauchbare Lösung:

$$\cos \psi = 1 - \alpha^2.$$

Wenn wir für  $\cos \psi$  jetzt die Reihenentwicklung  $1 - \frac{\psi^2}{2} + \dots$  anwenden, folgt zur Bestimmung von  $E$ , die Näherungsformel:

$$\psi = \alpha \sqrt{2} \quad \text{und} \quad r_i \psi = \alpha r_i \sqrt{2}. \quad (3)$$

Wir ersehen hieraus, daß die Ausdehnung der von der Fläche  $E, P'E$  abgegrenzten (in Fig. 17 stark umschriebenen) Masse so klein ist, daß man innerhalb derselben für den jetzt vorliegenden Zweck einer Schätzung von der Konvergenz der Radien absehen kann. Schreibt man die zweite Gleichung (3) in der Form:

$$E_i M = M P' \sqrt{2}, \quad (3^*)$$

so erkennt man sogleich, daß dieses Resultat auch für einen unendlich großen Krümmungsradius  $r_i$  gilt, daß man also in der That bei der Ermittlung von  $E_i M$  von der Krümmung der Meeresfläche absehen kann.

Fig. 18 und die vorstehende Entwicklung lassen erkennen, daß alle Massenteile innerhalb des Rotationskörpers  $E, P'E, M E$ , bei der Kondensation auf die innere Kugelfläche eine Verminderung der zentralen Anziehung geben, alle sonstigen Massenelemente zwischen beiden Kugelflächen aber eine Vermehrung derselben. Wäre aber der ganze Raum zwischen beiden Kugelflächen mit Masse gleichförmig erfüllt, so würde die Kondensation die Anziehung nicht verändern; mithin müssen sich jene Vermehrung und Verminderung aufheben, und es giebt also die Kondensation der Masse  $E, P'E, M E$  allein einen Maximaleffekt. Zur Abkürzung kann man diesen Körper wieder als Maximalkörper bezeichnen.

Bei der Ermittlung der Fläche  $E_1 P' E_1$  sehen wir also jetzt von der Konvergenz der Radien ab: Fig. 19. Mit Rücksicht auf die Bezeichnungen dieser Figur haben wir zur Bestimmung der Gleichung des Schnittes der Fläche durch die Rotationsaxe  $P'M$  die Bedingung:

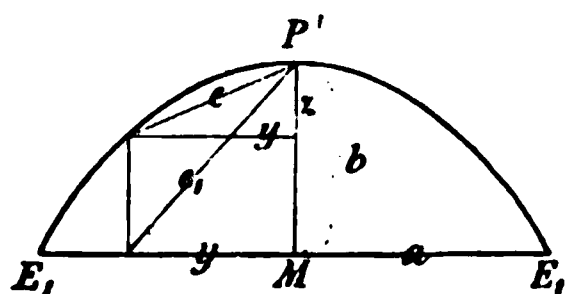


Fig. 19.

$$\frac{dm}{e^3} \cdot \frac{z}{e} = \frac{dm}{e_1^2} \cdot \frac{b}{e_1}$$

oder

$$\sqrt{\frac{z}{z^2 + y^2}} = \sqrt{\frac{b}{b^2 + y^2}} \quad (4)$$

Durch Reduktion auf  $y^2$  folgt hieraus ohne weiteres

$$y^2 = z^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} (z^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}). \quad (5)$$

Bezeichnet man wie in Fig. 19  $y$  für  $E_1$  mit  $a$ , so ergibt sich aus vorstehender Gleichung

$$a = b\sqrt{2}, \quad (6)$$

übereinstimmend mit (3\*).

Die durch (5) gegebene Begrenzung ersetzen wir aus Bequemlichkeitsgründen durch die nachstehende paraboloidische

$$y^2 = 2bz. \quad (7)$$

Denn für die Begrenzung (5) läßt sich zwar die unkondensierte Anziehung des ganzen Körpers  $E_1 P' E_1 M E_1$  in Richtung  $P'M$  bequem berechnen, nicht aber die kondensierte. Durch Einführung der im wesentlichen mit (5) zusammenfallenden Begrenzung nach (7) wird auch die letztere Rechnung bequem. Um den Unterschied der durch die Gleichungen (5) und (7) gegebenen Kurven zu zeigen, ist folgende Tabelle berechnet:

$z$	Ordinate $y$		Normaler Abstand der Kurven.
	(5)	(7)	
$b$	$b\sqrt{2}$	$b\sqrt{2}$	.
$\frac{64}{125} b$	$1,024b$	$1,012b$	$0,008b$
$\frac{8}{27} b$	$0,801b$	$0,770b$	$0,019b$
$\frac{1}{8} b$	$0,559b$	$0,500b$	$0,026b$
$\frac{1}{27} b$	$0,351b$	$0,272b$	$0,021b$
$\frac{1}{64} b$	$0,258b$	$0,177b$	$0,014b$

Bei  $E_1$  und  $P'$  gehen die Kurven tangential in einander über; im übrigen ist der Unterschied in der Form beider Kurven so gering, daß er im Holzschnitt unsichtbar wird. Die Differenz ist um so unerheblicher, als für Massen in der nächsten Nähe der Begrenzungsfläche  $E_1 P' E_1$  bei der Kondensation die Anziehungskomponente in Richtung  $P'M$  sich zufolge der Bedeutung dieser Fläche nicht ändert.

§ 12. Fortsetzung: Berechnung des Maximaleinflusses. Die Anziehung des nach (7) des vorigen Paragraphen begrenzten Körpers  $E_1 P' E_1 M E_1$  auf  $P'$  in Richtung  $P'M$  ergibt sich aus Gleichung (4) § 3 S. 144 für  $c = \text{null}$ ,  $a = b \sqrt{2}$  und  $p = b$ . Sie wird gleich

$$2\pi k^2 \Theta b \left\{ 1 - \sqrt[3]{3} + \log \text{nat} (2 + \sqrt[3]{3}) \right\}. \quad (1)$$

Nach erfolgter Kondensation der Massen auf die Grundfläche  $E_1 M E_1$  ist die Anziehung auf  $P'$  gleich

$$k^2 \int_{y=0}^{y=b\sqrt{2}} \frac{b \, dm}{\sqrt[3]{b^2 + y^2}}, \quad (2)$$

wobei  $dm$  dem Rotationscharakter entsprechend als ein ringförmiges Massenelement mit der Grundfläche  $2\pi y \, dy$  und der Masse

$$2\pi y \, dy \cdot \Theta (b - z)$$

zu denken ist. Wird letzteres für  $dm$  oben eingesetzt, dabei für  $z$  sein Wert  $y^2 : 2b$  und für  $y^2$  einfacher  $t$  geschrieben, so findet sich die in Rede stehende Anziehung (2) gleich

$$\frac{1}{2} \pi k^2 \Theta \int_0^{2b^2} \frac{(2b^2 - t) \, dt}{\sqrt[3]{b^2 + t}}$$

d. i. gleich

$$\frac{1}{2} \pi k^2 \Theta \int_0^{2b^2} \left\{ \frac{3b^2}{\sqrt[3]{b^2 + t}} - \frac{1}{\sqrt[3]{b^2 + t}} \right\} dt.$$

Die leicht ausführbare Integration führt zu dem Ausdrucke:

$$2\pi k^2 \Theta b (2 - \sqrt[3]{3}). \quad (3)$$

Ziehen wir denselben von (1) ab und setzen für  $b$  den Wert  $a r'$  oder  $a R$ , so erhalten wir als Maximalwert der Abnahme der Anziehung in radialer Richtung durch Kondensation für einen Punkt im Meeresniveau:

$$2\pi k^2 \Theta b \left\{ \log \text{nat} (2 + \sqrt[3]{3}) - 1 \right\} \quad \text{d. i.} \quad 0,634 \pi k^2 \Theta a R. \quad (4)$$

Setzen wir nun wie früher die Schwerkraft näherungsweise gleich  $\frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R$ , so zeigt sich, daß vorstehender Betrag für  $\Theta = \frac{1}{2} \Theta_m = 2,8$  und  $a = 1 : 300$  gleich ist

$$0,00079 \cdot g. \quad (5)$$

Dies ist allerdings bedeutend, da die Variation von  $g$  im Niveau der Meeresfläche überhaupt nur  $0,0053 g$  beträgt. Allein in der Wirklichkeit tritt dieser theoretische Maximaleffekt nirgends auf, da die entsprechenden Massenformen nicht bestehen.

Selbst wenn wir uns eine Insel von der Form und Größe des Rotationskörpers  $E, P'E, ME$ , Fig. 17 S. 155 denken, so ist dieselbe doch in ihrem oberen Teile von Wasser umgeben, im unteren aber von Land, da die Ozeane nicht die Tiefe  $\mu R = 21^{\text{km}}$ , sondern selbst an den tiefsten Stellen nur weniger als die Hälfte davon besitzen. Nehmen wir aber an, daß die betreffende Insel bis zur Tiefe von  $21^{\text{km}}$  von Wasser umgeben wäre, so reduziert sich der Effekt schon im Verhältnis  $2,8 : 1,8$  und wird gleich  $0,0005 g$ . Wegen der geringeren Maximaltiefe der Ozeane vermindert sich dieses weiter, wie eine genaue Rechnung zeigt, die wir übergehen dürfen, auf etwa  $0,0004 g$ .

Dieser maximalen Verminderung der Schwerkraft steht eine maximale Vermehrung gegenüber, die in der Mitte von einem kleinen tiefen See eintreten kann, jedoch in praktisch möglichen Fällen bei weitem nicht jenen Betrag erreichen dürfte. Die genauere Auswertung für diesen Fall können wir übergehen, da die Kenntnis des größeren Maximums, im absoluten Sinne genommen, wie wir sogleich sehen werden, ausreicht.

§ 13. Resultat der Untersuchung über die Brauchbarkeit der Entwicklung des Potentials  $W$  nach negativen Potenzen des Radiusvektors. Mit Rücksicht auf die Paragraphen 7 — 12 können wir nun im Anschluß an § 6 Folgendes bemerken:

Da die Gültigkeit jener Reihenentwicklung die Kondensation der Massen außerhalb der Parallellfläche auf diese als eine zweckmäßige Idealisierung der Massen der Erdrinde fordert, da ferner diese Kondensation die Meeresfläche nur in unerheblichem Maße verschiebt, so würde es als ein Fehler aufzufassen sein, wenn bei den Schwerkraften die Kondensation nicht berücksichtigt werden würde. Selbst wenn es aber trotzdem nicht geschieht, so wird man dennoch eine sehr gute Annäherung für die Gestalt der mathematischen Erdoberfläche erzielen; denn bei der Interpolation der im Meeresniveau beobachteten oder darauf reduzierten Schwerkraften werden die Kondensationsfehler teilweise ausgeglichen. Wie schon im vorigen Kapitel S. 71 bemerkt, schmiegen sich die Schwerebeobachtungen nach der üblichen Rechnungsweise ohne Kondensation recht gut einer einfachen Formel an, aus welcher man auf die Form eines abgeplatteten Sphäroids für die Meeresfläche schließt. Dieses Resultat ist trotz der Vernachlässigung der Kondensation zweifellos eine Annäherung, da die vernachlässigten Kondensationseffekte nicht groß genug sind, um die größten Variationen der Schwerkraft im Meeresniveau zu verwischen.

Keinesfalls braucht man zu fürchten, daß insbesondere die Variation der Schwerkraft vom Äquator nach dem Pole um die Summe der positiven und negativen Maximalkondensationseffekte fehlerhaft wird: sie wird voraussichtlich noch nicht um den Betrag  $0,0004\ g$  des größeren der beiden fehlerhaft und damit (nach *Clairauts* Theorem) die Abplattung noch nicht um  $\frac{1}{8}$  ihres Wertes irrig.

Für eine schärfere Berechnung der Gestalt des Geoids wird jedoch eine Reduktion der Ergebnisse der Schweremessungen wegen der Kondensation erforderlich; bei sehr weit getriebener Annäherung würde man sogar auch die Verschiebung der Meeresfläche in Rechnung ziehen müssen. Die Reduktion der Schweremessungen wird weiterhin eingehend erörtert werden, während die Verschiebung der Meeresfläche als zur Zeit unwichtig nicht besprochen wird.

Im nächsten Paragraphen untersuchen wir dagegen noch der Vollständigkeit halber die allerdings sehr geringfügigen Effekte der Kondensation auf die Schwerpunktslage des Erdkörpers und auf die Größe seiner Trägheitsmomente.

**§ 14. Einfluß der Kondensation auf Schwerpunktslage und Trägheitsmomente der Erde.** Die Massen außerhalb der Parallelfäche sind in Bezug auf die Gesamtmasse  $M$  ein Bruchteil der Ordnung  $\alpha$ ; die Verschiebung auf die Parallelfäche ändert das statische Moment, genommen bezüglich irgend einer Ebene durch die ungeänderte Schwerpunktslage, um eine Größe der Ordnung  $\alpha^2 MR$ . Die Schwerpunktsverschiebung ist demnach von der Ordnung  $\alpha^2 R$  und zwar voraussichtlich nur ein kleiner Bruchteil davon, d. h. wenige Meter, weil die Massen außerhalb der Parallelfäche eine im großen und ganzen symmetrische Anordnung der Art haben, daß die Änderungen ihrer statischen Momente sich teilweise aufheben.

In gleicher Weise läßt sich erkennen, daß die Trägheitsmomente  $A$ ,  $B$  und  $C$  nur um Bruchteile der Ordnung  $\alpha^2$  sich ändern und daß sie mit gleicher Genauigkeit als Hauptträgheitsmomente aufgefaßt werden können; vergl. § 5 S. 59. Diese Genauigkeit entspricht derjenigen der Entwicklungen der Paragraphen 10 und 11 S. 72 u. ff. und man kann daher sagen, daß die daselbst S. 74 und 76 aufgeführten Ergebnisse für  $A$ ,  $B$  und  $MK$  für die Trägheitsmomente der Erde selbst gelten.

Die Genauigkeit erhöht sich aber etwas, wenn wir die Schale, welche von der Meeresfläche und der Parallelfäche begrenzt ist, erfüllt denken mit homogener Masse, zu welcher an einzelnen Stellen positive oder negative Massen hinzutreten (§ 15). Die homogene Masse braucht dann nicht kondensiert zu werden, da der Effekt für  $W$  und  $g$  sehr nahe null ist. Man erzielt aber durch diese Änderung der Anschauungsweise eine günstigere Annäherung bei den Trägheitsmomenten, welche bisher sicher lediglich verkleinert wurden,

da alle Elemente der Kondensation negativ wirkten, während nunmehr Massen positiver und negativer Dichtigkeit vorkommen und demgemäß sowohl negative als positive Änderungen der Trägheitsmomente entstehen — außerdem aber die Menge der kondensierten Masse überhaupt wesentlich kleiner ist. Die teilweise Kompensation, die hier stattfindet, kommt bei der Frage, ob  $A$ ,  $B$  und  $C$  nach erfolgter Kondensation noch als Hauptträgheitsmomente angesehen werden dürfen, übrigens schon bei der früheren Anschauung zur Geltung, da die Kondensation der homogenen Schale offenbar die Lage der Hauptachsen nur ganz unerheblich ändern kann.

Man wird daher die Ergebnisse der Schweremessungen für die Trägheitsmomente auch bei einer etwas weiter getriebenen Annäherung als derjenigen in den Paragraphen 10 und 11 S. 72 u. ff. auf die Erde selbst beziehen können, ohne daß es einer Reduktion bedarf. Sie gelten also für die Erde selbst etwa bis zu derjenigen Grenze der Annäherung und Genauigkeit, die den Ergebnissen der Schweremessungen aus anderen Gründen, insbesondere wegen kontinentaler und lokaler Anomalieen entspricht.

§ 15. **Die Reduktion der Schwerebeobachtungen.** Die Messungen der Beschleunigung der Schwerkraft gelten unmittelbar für einen Punkt der physischen Erdoberfläche und sind daher auf die Meeresoberfläche zu reduzieren, so daß sie alsdann als einer einzigen Niveaufläche angehörig betrachtet werden dürfen. Denn wenn auch das mittlere Niveau des Meeres keineswegs genau einer Niveaufläche, dem Geoid, angehört, so sind doch die durch Ebbe und Flut, herrschende Winde, verschiedene spezifische Gewichte und andere Ursachen erzeugten Niveauunterschiede gering in Bezug auf den vorliegenden Zweck, bei dem es auf einige Meter gar nicht ankommt, weil die Schweremessungen weder entsprechend genau sind, noch entsprechend genau reduziert werden können. (Über bekannte Höhendifferenzen des mittleren Meeresniveaus an verschiedenen Stellen der Küste Europas vergl. im 7. Kap. § 18.)

Es genügt nun aber nach dem Vorhergehenden gar nicht, lediglich aufs Meeresniveau zu reduzieren; vielmehr muß auch noch eine Kondensation der Massen der Erdrinde in dem in Paragraph 6 angegebenen Umfange und in der daselbst angegebenen Weise stattfinden.

Wir werden übrigens die Kondensation insofern etwas abändern, als wir nicht die ganze Masse außerhalb der Parallelfäche in der Tiefe  $aR$  unter der Meeresfläche kondensieren, sondern eine Schale ausschließen, welche von diesen beiden Flächen begrenzt und mit Masse von der Dichtigkeit  $2,8 = \frac{1}{2} \varpi_m$ , der mittleren Dichtigkeit des Festlandes, gefüllt ist. Der Kondensationseffekt für diese Schale ist verschwindend klein; er würde null sein, wenn wir die Meeresfläche als Ellipsoid

betrachten dürften und als Kondensationsfläche alsdann anstatt einer genauen Parallelfläche ein konfokales Ellipsoid annehmen würden (vergl. S. 125 § 31). Obwohl nun die Meeresfläche kein Ellipsoid ist, kann man den Kondensationseffekt dennoch vernachlässigen, weil sie nur in sanften Biegungen von einem solchen abweicht, wie sicher genug aus synthetischen Untersuchungen im vierten Kapitel folgen wird, und weil für ein homogenes Sphäroid, welches nur in sanften Wellen von einem Ellipsoid abweicht, die Entwicklung des Potentials nach negativen Potenzen des Radiusvektors praktisch ausreichend als bis zur Oberfläche konvergent anzusehen ist (§ 24), sodafs also die Masse zwischen Meeres- und Kondensationsfläche überhaupt gar nicht kondensiert zu werden braucht, insoweit sie einem von der Meeresfläche begrenzten, homogenen Sphäroid angehört.

Ein kleiner Fehler in dieser Beziehung hat um so weniger Bedeutung, als die Berechnung des Kondensationseffekts wegen mangelhafter Kenntnis der Massendichtigkeit der Schichten der Erdkruste bis zur Tiefe von  $21^{\text{km}}$  sich doch nicht scharf durchführen läfst. Übrigens sind die Fehler der letzten Art weniger erheblich, als es auf den ersten Blick scheinen mag, da die obersten Schichten der Schale von  $21^{\text{km}}$  Stärke den grölsten Effekt geben und für diese Schichten die Dichtigkeit mit einiger Annäherung bekannt ist.

Bisher hat man nur aufs Meeresniveau reduziert und die Reduktion wegen Kondensation unterlassen. Abgesehen davon, dafs die übliche Reduktion aufs Meeresniveau sich als solche bemängeln läfst, genügt sie allein auch nicht, um die Schweremessungen nach der Theorie der Kugelfunktionen in Strenge behandeln zu können. Nur erst durch die Reduktion wegen der Kondensation erlangt man Angaben für die Beschleunigung der Schwere, aus denen ein Schlufs von wünschenswerter Sicherheit auf die Abplattung und auch auf kontinentale Abweichungen des Geoids möglich wird.

§ 16. Die übliche Reduktion der Schweremessungen auf das Meeresniveau. Sie geht von dem Grundsatz aus, die lokalen Massenanziehungen zu beseitigen, insoweit die Massen als unregelmässige Anhäufungen erscheinen. Dazu werden alle Massen gerechnet, welche sich über das Meeresniveau erheben; Fig. 20.

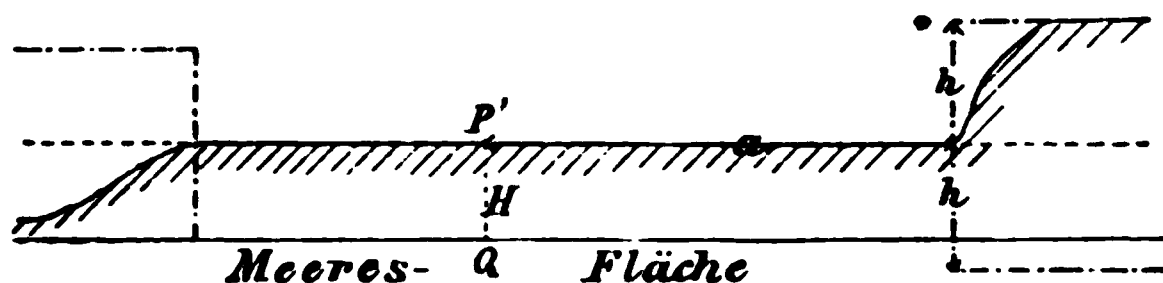


Fig. 20.

Um die übliche *Formel für horizontales, ebenes Terrain* zu gewinnen, denken wir uns um die Lotlinie  $P'Q$  des betreffenden Punktes



als Axe eine Cylinderfläche mit dem noch unbestimmten Radius  $a$  gelegt und sehen vorläufig von der Krümmung der Meeresfläche ab. Nach § 2 (2) S. 142 ist für den so abgegrenzten Cylinder von der Höhe  $H$  und der Dichtigkeit  $\Theta$ , wobei  $c = \text{null}$  und  $b = H$  zu setzen ist, die Vertikalanziehung:

$$2\pi k^2 \Theta (H + a - \sqrt{a^2 + H^2}) \quad (1)$$

oder in Reihenentwicklung der Quadratwurzel, gültig für  $H < a$ :

$$2\pi k^2 \Theta H \left(1 - \frac{H}{2a} + \dots\right). \quad (1^*)$$

Um dies in Bruchteilen der Schwerkraft auszudrücken, genügt es, für letztere den nach S. 98 § 20 (23) und (24) bis auf Bruchteile von der Ordnung der Abplattung richtigen Ausdruck  $\frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m R$  zu setzen. Es folgt dann anstatt (1\*):

$$\frac{3}{2} \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{H}{R} \left(1 - \frac{H}{2a} + \dots\right). \quad (2)$$

Setzt man  $\Theta = \frac{1}{2} \Theta_m$  und  $H : R = 10000$  entsprechend  $H = 637^m$ , so wird (2) kleiner als  $\frac{1}{13000}$ . Vernachlässigt man nun das Glied  $H : 2a$ , so wird der dadurch begangene Fehler für  $a > 10H$ , d. i. rund  $6^m$ , kleiner als rund  $\frac{1}{250000}$  der Schwerkraft; er ist also unerheblich, und man erkennt, daß im horizontalen Terrain in der Regel die Vertikalanziehung der  $P'$  benachbarten Massen über dem Meeresniveau hinlänglich genau durch

$$\frac{3}{2} \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{H}{R} g \quad (3)$$

dargestellt wird.

Dieselbe Formel erhält man aber auch für die Vertikalanziehung einer weit ausgedehnten, horizontalen Platte von der Dicke  $H$ . Alle Massen außerhalb der Entfernung  $a = 6^m$  bei  $H = 637^m$  zwischen dem Meeresniveau und der Niveaufläche von  $P'$  haben daher keinen merklichen Einfluß. Die Formel (3) genügt, wenn solche Massen den Raum zwischen den beiden genannten Flächen ganz oder teilweise erfüllen, oder ganz fehlen. Anstatt des letzten Falles kann man sich auch denken, daß außerhalb des Umkreises  $a$  die Massen bis zur Höhe  $H$  über das Niveau von  $P'$  steigen, weil die Vertikalanziehungen der über und unter dem Niveau von  $P'$  liegenden Massen sich aufheben. Ebenso kann man sich denken, daß in diesem Raum nur eine teilweise Erfüllung durch Berge bis zur Höhe  $H$  über das Niveau von  $P'$  stattfindet. In allen diesen Fällen gilt (3) mit wesentlich derselben Genauigkeit.

Allgemein hat man als Beziehung von  $H$  zu  $a$ , damit Formel (3)



die Reduktion auf weniger als  $\frac{1}{250000}$  von  $g$  genau angibt, bei Anwendung von Metermafs:

$$H \cdot \frac{H}{a} < 68^m. \quad (4)$$

Ist für die faktische Ausdehnung  $a$  der Ebenheit die Meereshöhe  $H$  weit kleiner als es nach Formel (4) sein könnte, so dürfen bei gleicher Genauigkeit als bisher vorausgesetzt die Erhebungen und Senkungen am Rande der Ebene Werte  $h$  gegen das Niveau von  $P'$  annehmen, welche gröfser als  $H$  sind, wenn sie nur der Ungleichung

$$h \cdot \frac{h}{a} < 68^m, \quad (4^*)$$

welche  $h : a$  als ächten Bruch voraussetzt, genügen.

Ist ferner  $a$  nach verschiedenen Richtungen hin verschieden, so kann man aus (4\*) für jede Richtung ein besonderes größtes zulässiges  $h$  entnehmen. Denn die Ausgangsformel (1) für den Kreiscylinder gilt nicht blos für einen vollständigen Cylinder, sondern auch für jeden Sektor zwischen zwei beliebigen von  $P'$  ausgehenden Vertikal-ebenen, wobei nur statt  $2\pi$  der Arcus des Horizontalwinkels zwischen letzteren zu setzen ist. Für den einzelnen Sektor hat also die Vernachlässigung in der Vertikalanziehung nach (1\*) die Form

$$\psi k^2 \odot \frac{h^2}{2a},$$

und wenn  $h^2 : a$  die Ungleichung (4\*) erfüllt, ist sie kleiner als

$$\psi k^2 \odot .34,$$

für alle Sektoren zusammen somit kleiner als

$$2\pi k^2 \odot .34,$$

d. i. in Bruchteilen von  $g$  wieder  $\frac{1}{250000}$ .

In der Fig. 20 ist beiderseits das dem betreffenden  $a$  entsprechende  $h_{max}$  angedeutet.

Was die Krümmung der Meeresfläche anlangt, so kommt diese gar nicht in betracht, da es sich eben nur um Nachbarmassen handelt; vergl. die Bemerkung zu (4) S. 145. Für sehr große Entfernungen würde sie zwar Einfluß erlangen. Indessen ist der Einfluß der Anziehung entfernter Massen, da er bei horizontaler Verschiebung von  $P'$  sich nur langsam ändert, kein lokaler mehr und also nicht zu beachten. (In § 19 dieses Kapitels wird sich bei Besprechung der Kondensation die Zulässigkeit und Notwendigkeit der Vernachlässigung entfernter Massen noch von einem anderen Gesichtspunkte aus zeigen.)

Um nun die Schwerebeobachtung in  $P'$  auf  $Q$  im Meeresniveau zu reduzieren, ist von dem beobachteten Werte  $g$  die durch (3) angegebene Anziehung abzuziehen. Außerdem ist noch die Änderung

der Höhenlage zu berücksichtigen. § 20 des vorigen Kapitels S. 94 giebt hierzu die Änderung von  $g$  für differentiale Höhenänderungen. Da  $H$  im Verhältnis zum mittleren Erdradius  $R$  stets sehr klein ist, genügt die Differentialformel und wir erhalten nach der Formel (22) des genannten Paragraphen auf S. 98 bis auf Bruchteile von  $1/2\%$  im Maximum als Zunahme von  $g$  von  $P'$  bis  $Q$  in freier Luft

$$\frac{2H}{R} g. \quad (5)$$

Da der Quotient  $2H : R$  immer klein ist, in praktischen Fällen meistens weit kleiner als  $1/1000$ , welcher Betrag erst für  $H = 3185^m$  erreicht wird, so haben die Vernachlässigungen im Betrage bis zu  $1/2\%$  keine Bedeutung, wenn man bedenkt, daß bei beträchtlichen Werten  $H$  zugleich der von (3) herrührende Teil der Reduktion von  $g$  wegen der Schwierigkeit einer genauen Ermittlung der Dichte  $\Theta$  jedenfalls sehr unsicher wird. Bei  $H = 3185^m$  giebt ein Fehler von nur  $1\%$  in  $\Theta$  das Glied (3) schon um rund  $1/250000$  von  $g$  falsch.

Ist  $g$  die Beschleunigung der Schwerkraft in  $P'$ , so wird sie nach dem Vorstehenden in  $Q$  mit Beseitigung der Lokalanziehung in hinreichender Annäherung gleich

$$\left(1 + \frac{2H}{R} \left[1 - \frac{3}{4} \frac{\Theta}{\Theta_m}\right]\right) g. \quad (6)$$

Speziell für die Annahme  $\Theta = \frac{1}{2} \Theta_m = 2,8$  folgt hieraus in gleicher Annäherung

$$\left(1 + \frac{5}{4} \frac{H}{R}\right) g. \quad (6^*)$$

Hierzu sind als Bedingungen der Gültigkeit (4) und (4\*) zu beachten, wobei außerdem  $H$  bzw.  $h < a$  sein muß.

Die Formel (6) nennt man die *Regel von Young*, auch *Formel von Poisson* für *ebenes Terrain*. Wir werden sie aber nach *Bouguer* bezeichnen, der zuerst derartige Beziehungen untersuchte.

*Young* teilt dieselbe ohne Begründung in Form einer Regel in den *Philosophical Transactions* für 1819 S. 93 mit. *Poisson* giebt die Formel noch nicht in der ersten Auflage seiner *Traité de mécanique* von 1811, sondern erst 1833, in der zweiten Auflage Bd. 1 S. 495. *Laplace* geht in der *Méc. cél.* t. II. l. III, wo von den Schweremessungen die Rede ist, auf die Reduktion überhaupt nicht ein. Erst 1825 in t. V. l. XI p. 55—56 leitet er, von der Anziehung des Cylinders ausgehend, die Formel (6) ab. Aber schon 1749 hat (nach *Todhunter, History of Attraction* I p. 248) *Bouguer* in seiner Schrift *La Figure de la Terre* den Einfluß einer Erhebung des Beobachtungsortes auf einen Berg untersucht. Er setzt die Schwerkraft in der Meereshöhe  $h$ , wenn  $\Theta$  die Dichtigkeit der Bergmasse ist (und überhaupt unsere Bezeichnungen gelten), proportional dem Ausdrucke

$$(R - 2h) \Theta_m + \frac{3}{2} h \Theta,$$

was völlig mit *Youngs* Regel übereinstimmt.

Den genauen Einfluß der Berge von verschiedener Form untersuchte etwas später *d'Alembert* (nach *Todhunter* I p. 382) in völlig befriedigender Weise.

§ 17. Fortsetzung: Unebenes Terrain. Die im vorigen Paragraphen vorausgesetzte Ebenheit wird in der Natur keinesfalls vollständig erfüllt sein. Bedenkt man nun, daß nach Formel (3) des vorigen Paragraphen eine ebene, horizontale Platte von 32<sup>m</sup> Stärke und von der Dichtigkeit  $\frac{1}{2} \Theta_m = 2,8$  auf  $P'$  eine Vertikalanziehung von rund  $\frac{1}{250000}$  von  $g$  ausübt, so wird man erkennen, daß in einem im allgemeinen horizontalen und ebenen Terrain Unebenheiten von ziemlichem Betrage vorkommen dürfen. Will man auf  $\frac{1}{1000000}$  genau reduzieren, so dürfen die Unebenheiten in allernächster Nähe von  $P'$  allerdings nur etwa 8 Meter betragen; mit wachsender Entfernung, etwa von 100<sup>m</sup> ab, dürfen sie aber um so eher beträchtlich anwachsen, als für entferntere Unebenheiten eine teilweise Kompensation der Einflüsse stattfinden wird.

Zu den Unebenheiten in allernächster Nähe ist auch ein Abstand des Punktes  $P'$  vom Terrain im Betrage einiger Meter zu rechnen, welcher also nach dem Vorigen von unerheblichem Einflusse sein wird.

Die Anwendung der Formel (6) des vorigen Paragraphen ist übrigens nicht lediglich auf horizontales Terrain beschränkt. Um ihre allgemeinere Gültigkeit zu erkennen, denken wir uns  $P'$  als Spitze eines geraden Kreiskegels von der Höhe  $h_1$  und dem Radius  $a$  der Grundfläche;

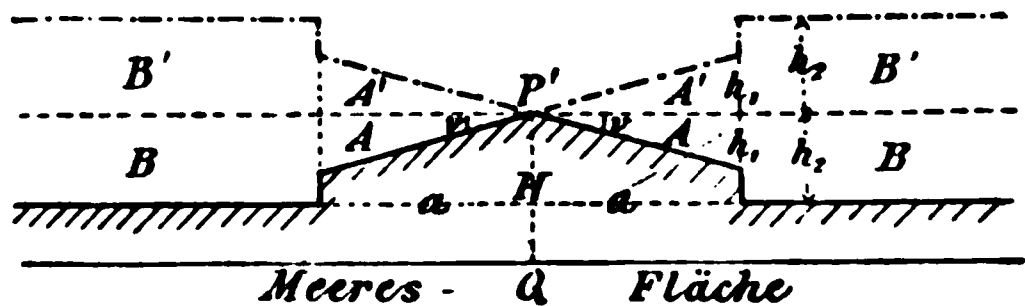


Fig. 21.

unter dem Kegel sei das Terrain bis zur Tiefe  $h_2$  cylindrisch abgegrenzt, und die Basis des Ganzen bilde eine über dem Meeresniveau lagernde, ebene Platte von großer Ausdehnung; Fig. 21.

Dann haben wir als Vertikalanziehung des Kegels nach S. 142 § 2 (4) mit Rücksicht auf die jetzigen Bezeichnungen:

$$2\pi k^2 \Theta h_1 (1 - \sin \nu).$$

Dagegen würde nach Formel (1\*) des vorigen Paragraphen für einen Cylinder gleicher Basis und Höhe in hinreichender Annäherung folgen, falls  $h_1$  kleiner als  $a$  ist, was bei mäßig großen Werten von  $\sin \nu$  zutrifft:

$$2\pi k^2 \Theta h_1 \left(1 - \frac{h_1}{2a}\right),$$

woraus man erkennt, daß die Differenz von Cylinder und Kegel, d. h. der in der Fig. 21 mit  $A$  bezeichnete Raum, wenn er mit Masse

erfüllt wäre, näherungsweise eine Vertikalanziehung ausüben würde gleich

$$2\pi k^2 \Theta h_1 \left( \sin \nu - \frac{h_1}{2a} \right),$$

d. i. in gleicher Annäherung

$$2\pi k^2 \Theta h_1 \cdot \frac{h_1}{2a}. \quad (1)$$

Würde sich unter  $P'$  anstatt des Kegels und Cylinders nur ein Cylinder von der Höhe  $h_2$  und von gleicher Basis mit jenen befinden, so wäre die entsprechende Vertikalanziehung angenähert gleich

$$2\pi k^2 \Theta h_2 \left( 1 - \frac{h_2}{2a} \right);$$

folglich giebt der an einer weit ausgedehnten, horizontalen Platte gleicher Stärke fehlende Raum  $B$ , mit Masse erfüllt gedacht, die Anziehung

$$2\pi k^2 \Theta h_2 \cdot \frac{h_2}{2a}. \quad (2)$$

Die gesamte Vertikalanziehung auf  $P'$  besteht aber aus der einer weit ausgedehnten, horizontalen Platte von der Dicke  $H$  weniger den Anziehungen der in  $A$  und  $B$  fehlenden Massen. Sie ist also mit Rücksicht auf (1) und (2) näherungsweise gleich

$$2\pi k^2 \Theta \left( H - \frac{h_1^2 + h_2^2}{2a} \right), \quad (3)$$

oder nach Einführung von  $g$  in gleicher Annäherung:

$$\frac{3}{2} \frac{\Theta}{\Theta_m} \left\{ \frac{H}{R} - \frac{h_1^2 + h_2^2}{2aR} \right\} g. \quad (4)$$

Damit man nun dafür einfach Ausdruck (3) des vorigen Paragraphen substituieren darf, muß mit Beibehaltung der bisherigen Genauigkeitsgrenze

$$\frac{3}{2} \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{h_1^2 + h_2^2}{2aR} < \frac{1}{250000}$$

sein, d. i. für  $\Theta = \frac{1}{2} \Theta_m$  und für Metermafs:

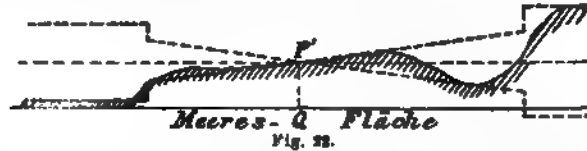
$$\frac{h_1^2 + h_2^2}{a} < 68^m, \quad (5)$$

wobei  $\frac{h_1}{a}$  und  $\frac{h_2}{a}$  überdies als ächte Brüche vorausgesetzt sind.

Dies ist die Bedingung (4\*) des vorigen Paragraphen in erweiterter Form. Wie dort kann man die zugehörige Figur dadurch verallgemeinern, daß man an Stelle der leeren Räume  $A$  und  $B$  gewisse mit Masse erfüllte Räume setzt, nämlich  $A$  und  $A'$  bzw.  $B$  und  $B'$ , Fig. 21, deren Anziehungen sich aufheben. Diese Räume dürfen auch durch Berge nur teilweise mit Masse erfüllt sein. Ferner sieht man ein,

dafs wie im Falle des vorigen Paragraphen  $a$ ,  $h_1$  und  $h_2$  nach verschiedenen Richtungen hin verschieden sein dürfen, wenn nur Formel (5) erfüllt ist. Fig. 22 deutet dies karriert an.

Es sei dazu bemerkt: erstens, dafs  $h_2$  auch  $> H$  sein darf, ohne dafs vorstehende Betrachtungen ihre Gültigkeit verlieren; zweitens,



dafs in der Terrainform in der Nähe von  $P'$  Unregelmäßigkeiten bis zur Höhe oder Tiefe von etwa 8<sup>m</sup> in Bezug auf seinen Horizont vorkommen können, wie aus dem Eingang dieses Paragraphen hervorgeht.

§ 18. Fortsetzung: Beliebiges Terrain. Um bei beliebig geformter Terrainfläche und beliebiger Dichtigkeit  $\Theta$  genau von  $P'$  auf  $Q$  zu reduzieren, wird man am besten die Korrektur berechnen, welche an der Reduktionsformel für ebenes, horizontales Terrain anzubringen ist. Wir reduzieren also zunächst nach Formel (6) § 16 S. 166 und setzen somit vorerst die Beschleunigung der Schwerkraft in  $Q$  gleich

$$\left(1 + \frac{2H}{R} \left[1 - \frac{3}{4} \frac{\Theta_0}{\Theta_m}\right]\right) g, \quad (1)$$

worin bedeuten:  $g$  die Beschleunigung in  $P'$ ,  $H$  dessen Meereshöhe und  $\Theta_0$  irgend eine angenommene Dichtigkeit, wofür wir hier die durchschnittliche Dichtigkeit der Massen bei  $P'$  im Umkreise bis 25<sup>m</sup> wählen wollen. Diese Formel berücksichtigt in Strenge die Anziehung einer weit ausgedehnten, horizontalen Platte unter  $P'$ .

Wir denken uns nun in einen Plan der Umgebung von  $P'$  Kreise mit wachsenden Radien, etwa gleich 25, 100, 200, 400, 600, 800, 1000, 1500, 2000<sup>m</sup>, ... eingetragen; ferner Radien, welche den Umkreis in 8, 10, 20 und eventuell noch mehr gleiche Teile teilen; vergl. die Darstellung für einen Quadranten, Fig. 23. Mit Hülfe im Plane gegebener Höhenquoten oder Horizontalkurven läßt sich dann für jede von zwei benachbarten Kreisen und Radien begrenzte Abteilung die mittlere Höhe der Terrainfläche berechnen; vergl. hierzu Kap. 4 § 40. Innerhalb einer solchen Abteilung müssen wir letztere als in mittlerer Höhe horizontal begrenzt ansehen können: in jedem praktischen Falle wird sich leicht erkennen

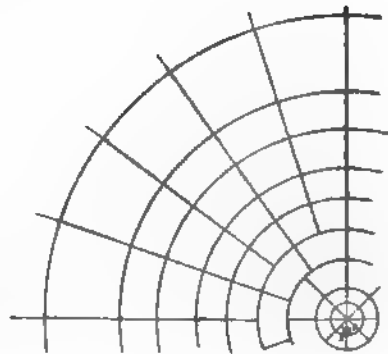


Fig. 23.

lassen, ob die Abteilungen zu diesem Behufe klein genug sind. Man wird dabei von den weiterhin folgenden Formeln für die Vertikalanziehung einer Abteilung auszugehen und zu beurteilen haben, welchen Einfluß eine Änderung der mittleren Höhe hat. Auch ist zu überlegen, ob eine Fehleranhäufung im ganzen möglich ist. Vergl. auch den Beginn von § 17 S. 167.

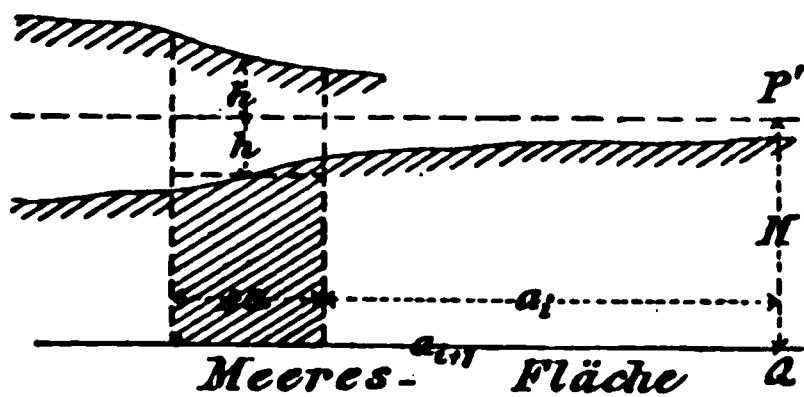


Fig. 24.

Nehmen wir an, daß die Dichtigkeit  $\Theta$  innerhalb einer Abteilung der ganzen Tiefe nach konstant sei, und nennen wir  $a_i$  und  $a_{i+1}$  den inneren und äußeren Kreisradius,  $n$  die Anzahl der Teile des Umkreises, so ist diejenige Vertikalanziehung, welche die betreffende

Abteilung ausüben würde, wenn sie von der Niveaufläche von  $P'$  bis zum Meeresniveau mit Masse erfüllt wäre, nach S. 142 § 2 (2) gleich

$$\frac{2\pi}{n} k^2 \Theta \left( H + a_{i+1} - \sqrt{a_{i+1}^2 + H^2} \right) - \frac{2\pi}{n} k^2 \Theta \left( H + a_i - \sqrt{a_i^2 + H^2} \right)$$

oder gleich

$$\frac{2\pi}{n} k^2 \Theta \left( a_{i+1} - a_i + \sqrt{a_i^2 + H^2} - \sqrt{a_{i+1}^2 + H^2} \right). \quad (2)$$

Um die wirkliche Anziehung zu erhalten, ist hiervon, wenn das Terrain unterhalb der Niveaufläche von  $P'$  liegt, die Anziehung der über dem Terrain bis zum Niveau von  $P'$  fehlenden Masse abzurechnen, d. i.:

$$\frac{2\pi}{n} k^2 \Theta \left( a_{i+1} - a_i + \sqrt{a_i^2 + h^2} - \sqrt{a_{i+1}^2 + h^2} \right). \quad (3)$$

Dieselbe Anziehung ist aber auch abzurechnen, wenn sich das Terrain innerhalb der Abteilung um  $h$  über das Niveau von  $P'$  erhebt; Fig. 24.

Die durch (2) gegebene Anziehung ist in (1) unter Voraussetzung  $\Theta_0 = \Theta$  bereits enthalten. Wegen der Differenz beider Dichtigkeiten ist daher außer (3) an (1) eine Korrektur im Betrage von

$$\frac{2\pi}{n} k^2 \left( \Theta_0 - \Theta \right) \left( a_{i+1} - a_i + \sqrt{a_i^2 + H^2} - \sqrt{a_{i+1}^2 + H^2} \right) \quad (4)$$

erforderlich. Bezeichnen wir zur Abkürzung

$$\Theta - \Theta_0 \text{ mit } \Delta\Theta, \quad a_{i+1} - a_i \text{ mit } \Delta a, \quad (5)$$

und führen wir in (3) und (4) wieder  $g$  ein, so ergibt sich als Verbesserung von (1):

Erstens wegen der Höhenlage des Terrains für die einzelne Abteilung:

$$+ \frac{3}{2n} \frac{\Theta}{\Theta_m} \left( \Delta a + \sqrt{a_i^2 + h^2} - \sqrt{a_{i+1}^2 + h^2} \right) \frac{g}{R}, \quad (6)$$

und zweitens wegen der Dichtigkeit der Abteilung:

$$- \frac{3}{2n} \frac{\Delta\Theta}{\Theta_m} \left( \Delta a + \sqrt{a_i^2 + H^2} - \sqrt{a_{i+1}^2 + H^2} \right) \frac{g}{R}. \quad (7)$$

Für nicht unmittelbar zu  $P'$  benachbarte Abteilungen werden meist  $h : a$  und  $H : a$  so klein sein, daß die ersten Glieder der Reihenentwicklung für die in (6) und (7) auftretenden Quadratwurzeln ausreichen. Dann folgen aus (6) und (7) bzw. die Näherungsformeln:

$$+ \frac{3}{4n} \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{h^2}{R} \left( \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} \right) g \quad (6^*)$$

und

$$- \frac{3}{4n} \frac{\Delta\Theta}{\Theta_m} \frac{H^2}{R} \left( \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} \right) g. \quad (7^*)$$

Diese Formeln genügen, wie die Reihenentwicklung zeigt, für  $a_i > 5h$  bzw.  $5H$ .

Nach diesen Formeln ist die Reduktion im Sinne einer Berichtigung von (1) nicht unbequem, besonders wenn diejenigen Radien, deren Reziproken in betracht kommen, so gewählt werden, daß die Parenthese in (6\*) und (7\*) konstant ist. Letztere Annahme eignet sich allerdings nicht für die nähere Umgebung, weil dann  $a$  zu rasch anwachsen würde. Für (7) und (7\*) braucht die Rechnung offenbar nicht für jede Abteilung einzeln ausgeführt zu werden, vielmehr kann man alle Abteilungen eines Ringes vereinigen, wenn unter  $\Delta\Theta : n$  der Unterschied der Dichtigkeit gegen  $\Theta_0$  im Mittel für einen Ring verstanden wird.

Wie die Formeln abzuändern sind, wenn  $\Theta$  sich mit der Tiefe ändert, bedarf keiner Erörterung.

Anstatt der im Vorhergehenden erörterten strengen Reduktion wird man in einzelnen Fällen sich mit Annäherungen begnügen können. Befindet sich z. B.  $P'$  auf der Höhe eines Berges, so wird man oftmals der Wirklichkeit ziemlich nahe kommen, wenn man für den Berg die Anziehung eines geraden Kreiskegels oder Rotationsparaboloids in Rechnung zieht und für das Terrain, auf welches sich der Berg aufsetzt, die Anziehung einer weit ausgedehnten, horizontalen Platte annimmt. Reduziert man zuerst wie für horizontales Terrain nach S. 166 § 16 (6), so hat man nachträglich die zuviel abgezogene Anziehung wieder beizufügen, nämlich für einen *Kegel* von der Höhe  $h$  und dem Radius  $a$  der Basis nach S. 143 § 2 (4):

$$+ \frac{3}{2} \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{h}{R} \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} g \quad (8)$$

und für ein *Paraboloid* gleicher Höhe und Basis nach S. 144 § 3 (4), darin  $b = h$ ,  $c = \text{null}$  und  $2pb = a^2$  gesetzt:

$$+ \frac{3}{2} \frac{\Theta}{\Theta_m} \left( \sqrt{a^2 + h^2} - \frac{a^2}{2h} \log \text{nat} \left[ 1 + \frac{2h}{a^2} \sqrt{a^2 + h^2} + \frac{2h^2}{a^2} \right] \right) \frac{g}{R}. \quad (9)$$

Da  $h$  fast immer so klein sein wird, daß der Einfluß von  $h^2 : a^2$  zu vernachlässigen ist, erhält man in meist ausreichender Annäherung als *Verbesserung des bereits für horizontales Terrain korrigierten  $g$*  im Falle (Fig. 25)

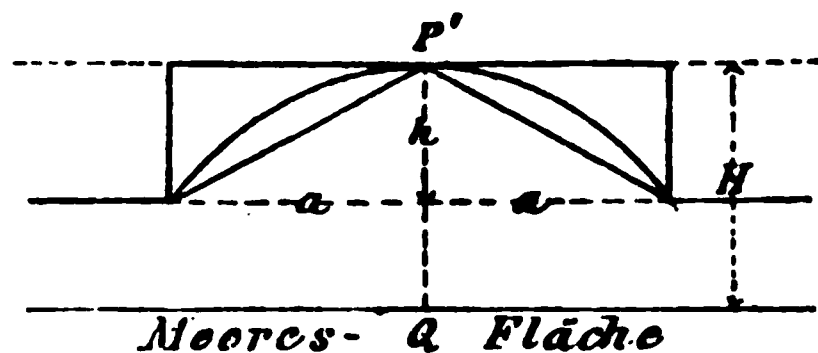


Fig. 25.

$$\text{des Kegels:} \quad + \frac{2h}{R} \frac{3}{4} \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{h}{a} g \quad (8^*)$$

$$\text{des Paraboloids:} \quad + \frac{2h}{R} \frac{3}{4} \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{2}{3} \frac{h}{a} g \quad (9^*)$$

und, wie wir zur Vergleichung nach S. 164 (2) hinzufügen:

$$\text{des Cylinders:} \quad + \frac{2h}{R} \frac{3}{4} \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{1}{2} \frac{h}{a} g. \quad (10)$$

Die strenge Reduktion wegen der Anziehung des Terrains führt C. A. F. Peters 1855 im 40. Bde. der *Astronom. Nachr.* No. 939 S. 45 u. ff. für die Beobachtung in Gölsten mittelst einer Zerlegung des Grundrisses in Quadrate aus. Die Formel, welcher man bei dieser Zerlegung bedarf, ist jedoch sehr kompliziert: sie enthält nicht nur zwölf verschiedene Quadratwurzel ausdrücke, sondern auch vier Logarithmen und vier Arcustangens.

§ 19. Die Reduktion der Schwerebeobachtungen wegen der Kondensation. Wie schon bemerkt wurde, genügt die übliche Reduktion aufs Meeresniveau nicht: sie bildet nur einen Teil der auszuführenden Reduktionen. Für sich allein betrachtet erscheint jene Reduktion einerseits nicht konsequent, insofern sie nur Massenunregelmäßigkeiten *über* dem Meeresniveau berücksichtigt, dagegen diejenigen *unterhalb* desselben, also insbesondere bei Inseln die Existenz der umgebenden Wassermassen, ignoriert; sie erscheint andererseits in ihrer Berechtigung fraglich, weil die Massenunregelmäßigkeiten vielfach gar keinen lokalen Charakter haben, wie insbesondere die allgemeine Erhebung der Kontinente übers Meeresniveau.\*) Unsere Reduktions-

\*) Stokes giebt in seiner mehrfach erwähnten Abhandlung *On the Variation of Gravity* zunächst an, daß man aufs Meeresniveau nur nach der Formel  $g \left(1 + \frac{2H}{R}\right)$  reduzieren müsse. Hierzu gelangt er durch die Annahme, daß man sich die über das Meeresniveau hervortretenden Massen ohne wesentliche Änderung der Form der Meeresfläche auf dieselbe kondensiert denken könne. Haben diese Massen aber in der Umgebung des betreffenden Punktes die Form einer horizontalen Platte, so ist die Vertikalanziehung vor der Kondensation auf jenen Punkt  $P'$  annähernd dieselbe, wie nachher auf den dicht über dem Meeresniveau liegenden Punkt  $Q$  vertikal unter  $P'$ . — Weiterhin bemerkt nun Stokes,



weise hat nun, ganz abgesehen von ihrer früher anderweit begründeten Notwendigkeit, den Vorteil, diese Mängel zu beseitigen, dabei aber doch die Wirkung wirklich lokaler Massenunregelmäßigkeiten abzuschwächen, indem dieselben um rund  $21^{\text{km}}$  nach dem Erdinnern zu verschoben werden.

Bei der Berechnung des Kondensationseffekts kann man, was nunmehr zunächst wichtig zu bemerken ist, von der Krümmung der Meeresfläche absehen. Um dieses nachzuweisen, betrachten wir letztere als Kugelfläche, indem dies sicherlich einen hohen Grad von Annäherung für den vorliegenden Zweck giebt. Auch denken wir uns dabei der Einfachheit halber die Massenunregelmäßigkeiten auf diese Kugelfläche kondensiert und nehmen zunächst die Massendichtigkeit an allen Stellen einer den Punkt  $P'$  zentrisch umgebenden Scheibe der Kugelfläche konstant, etwa gleich  $\Theta h$ , an.

Ist nun  $r$  der Radius der Kugelfläche,  $r'$  der Abstand des Punktes  $P'$  vom Zentrum  $C$  derselben,  $\Psi$  der Zentriwinkel am Rande der Scheibe in Bezug auf die Linie  $P'C$ , so ist mit Rücksicht auf Fig. 13 S. 144 nach Formel (3) S. 145, wenn  $\Theta h$  für  $\Theta dr$  geschrieben wird, die Anziehung der Scheibe auf  $P'$  gleich

$$2\pi k^2 \Theta h \frac{r^2}{r'^2} \left( 1 + \frac{r - r' \cos \Psi}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \Psi}} \right).$$

Vor der Kondensation können wir für unsern Zweck  $r = r'$  setzen und erhalten als Anziehung:

$$2\pi k^2 \Theta h \left( 1 + \sin \frac{\Psi}{2} \right). \quad (1)$$

Nach derselben setzen wir in der Parenthese  $r = r' - \alpha r'$ . Der Faktor vor der Parenthese ist nach der Kondensation derselbe wie vorher. Es folgt als Anziehung:

$$2\pi k^2 \Theta h \left\{ 1 + \frac{2 \sin^2 \frac{\Psi}{2} - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 4(1 - \alpha) \sin^2 \frac{\Psi}{2}}} \right\}. \quad (2)$$

Der Effekt der Kondensation ergibt sich durch Subtraktion von (1)

dafs allerdings die lokalen Anomalieen von  $g$  auf diese Weise erhalten blieben und dafs es daher doch besser sei, (wohl insofern  $g$  nur in einigen Punkten gegeben ist) nach Youngs Regel zu reduzieren. Dafs er aber die Reduktion nach  $g \left( 1 + \frac{2H}{R} \right)$  für die allein richtige halten würde, wenn  $g$  überall gegeben wäre, geht daraus hervor, dafs er den Einfluß der Reduktionsgrößen nach Young aufs Endergebnis für diesen Fall schätzt (nach Formel (10) § 34 dieses Kapitels, wobei in dieser Formel für  $g$  die Youngsche Reduktion zu setzen ist, so dafs die rechte Seite dieser Gleichung dann den Fehler in  $G\mathfrak{b}_1$  anzeigt) Nach seiner Rechnung ist der Fehler in  $\mathfrak{b}_2$  nur  $-0,0000012$ , also verschwindend.

und (2), wenn wir zugleich für  $g$  den Näherungsausdruck  $\frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R$  einführen, näherungsweise gleich einer Verminderung der Anziehung um

$$\frac{3}{2} \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{h}{R} \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 4(1-\alpha)\sin^2 \frac{\Psi}{2}}} + \sin \frac{\Psi}{2} \left[ 1 - \frac{2 \sin \frac{\Psi}{2}}{\sqrt{\alpha^2 + 4(1-\alpha)\sin^2 \frac{\Psi}{2}}} \right] \right\} g. \quad (3)$$

Dagegen erhält man aus der Formel (2) des § 1 S. 141 unter Annahme einer ebenen Scheibe als Verminderung der Anziehung infolge der Kondensation,  $z = \alpha r'$  und  $a = \Psi r'$  gesetzt:

$$2 \pi k^2 \Theta h \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \Psi^2}}, \quad (4)$$

oder näherungsweise unter Einführung von  $g$  wie oben:

$$\frac{3}{2} \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{h}{R} \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \Psi^2}} \right\} g. \quad (5)$$

Es sind nunmehr die Ausdrücke (3) und (5) zu vergleichen. Für  $\Psi = \text{null}$  giebt in beiden Fällen die geschlungene Parenthese den Wert 1; bei wachsendem  $\Psi$  nimmt die Parenthese in (3) sicher zunächst rascher zu als in (5), da  $2 \sin \frac{\Psi}{2} < \Psi$  und mithin schon der erste Teil der Parenthese (3) gröfser als die Parenthese (5) ist, der zweite Teil jener aber positiv bleibt, solange  $4 \sin^2 \frac{\Psi}{2} < \alpha$ , d. h. näherungsweise  $\Psi < 1/17$  genommen wird. Durch Probieren findet man, dafs beiläufig für  $\Psi = \alpha$  bis  $2\alpha$  der Überschufs von (3) über (5) ein Maximum wird im Betrage von rund

$$+ \frac{3}{2} \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{h}{R} \frac{g}{900}.$$

Um für gröfsere Werte von  $\Psi$  als solche von der Ordnung  $\alpha$  bequemer den Verlauf des Unterschiedes von (3) und (5) zu erkennen, wenden wir für die in (3) auftretende Quadratwurzel die Reihenentwicklung nach dem binomischen Satze an, indem wir vorerst schreiben

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4(1-\alpha)\sin^2 \frac{\Psi}{2}}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\Psi}{2} \sqrt{1-\alpha + \frac{\alpha^2}{4 \sin^2 \frac{\Psi}{2}}}}.$$

An Stelle von (2) tritt dann der Ausdruck

$$2 \pi k^2 \Theta h \left\{ 1 + \sin \frac{\Psi}{2} - \frac{\alpha \cos^2 \frac{\Psi}{2}}{2 \sin \frac{\Psi}{2}} \left( 1 + \frac{3}{4} \alpha - \frac{1}{8} \alpha^2 \frac{1 - 5 \sin^2 \frac{\Psi}{2}}{\sin^2 \frac{\Psi}{2}} \right) + \dots \right\} \quad (2^*)$$

und an Stelle von (3):

$$\frac{3}{2} \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{h}{R} \left\{ \frac{\alpha \cos^2 \frac{\Psi}{2}}{2 \sin \frac{\Psi}{2}} \left( 1 + \frac{3}{4} \alpha - \frac{1}{8} \alpha^2 \frac{1 - 5 \sin^2 \frac{\Psi}{2}}{\sin^2 \frac{\Psi}{2}} \right) + \dots \right\} g. \quad (3^*)$$

Diese Entwicklung gilt für  $\frac{\alpha^2}{4 \sin^2 \frac{\psi}{2}} - \alpha < 1$ , oder abgerundet für  $\psi > \alpha$ .

Geht man nur bis  $\psi = 1$ , so kann man in (3\*) für  $\sin$  und  $\cos$  mit Vorteil die Anfänge der Reihenentwicklung einführen und erhält in ausreichender Annäherung:

$$\frac{3}{2} \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{h}{R} \left\{ \frac{\alpha}{\psi} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\psi^2} + \frac{3}{4} \alpha - \frac{5}{24} \psi^2 \right) + \dots \right\} g, \quad (6)$$

während (5) bei entsprechender Entwicklung übergeht in:

$$\frac{3}{2} \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{h}{R} \left\{ \frac{\alpha}{\psi} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\psi^2} + \dots \right) \right\} g. \quad (7)$$

Die Differenz der geschlungenen Parenthesen von (6) und (7) ist gleich

$$\frac{3}{4} \frac{\alpha^2}{\psi} - \frac{5}{24} \alpha \psi, \quad (8)$$

woraus man erkennt, daß mit wachsendem  $\psi$  der Unterschied von (6) und (7), und somit auch derjenige von (3) und (5), abnimmt, bis er bei  $\psi = \text{rund } 1/9$  verschwindet und weiterhin negativ wird.

Das Anwachsen des Unterschieds im Negativen findet nahezu ohne Aufhören statt bis zum Grenzwert  $\psi = \pi$ . Zunächst bis  $\psi = 1$  zeigt dies die Differenz (8). Für größere Werte von  $\psi$  kann man aber die geschlungene Parenthese in (3\*) auf  $\alpha \cos^2 \frac{\psi}{2} : 2 \sin \frac{\psi}{2}$ , diejenige in (5) auf  $\alpha : \psi$  abkürzen und bemerkt nun leicht mittelst des ersten Differentialquotienten von

$$\alpha \left\{ \frac{\cos^2 \frac{\psi}{2}}{2 \sin \frac{\psi}{2}} - \frac{1}{\psi} \right\},$$

daß dieser Unterschied im Negativen wächst bis  $\psi = \text{rund } \frac{5}{6} \pi$  und von da wieder etwas, jedoch nur wenig, abnimmt. Es wird für  $\psi = \frac{5}{6} \pi$  bis  $\pi$  der Überschufs von (3) über (5) rund

$$- \frac{3}{2} \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{h}{R} \frac{g}{900}.$$

Nach dem Vorstehenden ist zwischen der sphärischen und ebenen Berechnung des Kondensationseffektes einer homogenen Scheibe ein Unterschied, der mit wachsendem Radius der Scheibe erst wächst bis zu einem positiven Maximum, dann im wesentlichen abnimmt bis zu einem negativen Maximum. Der größte Unterschied entspricht also einer ringförmigen homogenen Scheibe, deren innerer und äußerer

Radius etwa den Zentriwinkeln  $\varphi = \alpha$  und  $\pi$  zukommen. Denkt man sich innerhalb des ersteren Radius die Dichtigkeit und also das Produkt  $\Theta h$  bei gleichem absoluten Werte von entgegengesetztem Vorzeichen wie auferhalb, so addieren sich die Berechnungsunterschiede zu

$$\frac{3}{2} \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{h}{R} \frac{g}{300}.$$

Setzen wir  $\Theta h : \Theta_m R = \frac{1}{3000}$ , was innerhalb des Zentriwinkels  $\varphi = \alpha$  bei  $\Theta = 2,8$  einem Gebirge von  $4^{\text{km}}$  Höhe, auferhalb bei  $\Theta = 1,8$ , als Differenz von 2,8 und 1, einem  $6^{\text{km}}$  tiefen Ocean entspricht, so ist dieser maximale Berechnungsfehler  $\frac{1}{600000}$  von  $g$ . Aber es dürfte ein solcher Betrag in praktischen Fällen nie eintreten.

Bei vorstehender Untersuchung wurde nun allerdings alle Masse in einer Niveaufläche mit dem angezogenen Punkt vorausgesetzt. Man erkennt aber ohne Schwierigkeit, daß die Berücksichtigung der speziellen Terrainform zu keinem wesentlich anderen Maximalfehler führen kann, indem die Kondensation aufs Niveau des angezogenen Punktes zwischen ebener und sphärischer Rechnung Unterschiede derselben Art giebt, wie sie oben betrachtet wurden. Nur sind sie numerisch geringfügiger und selbst fürs Himalaya-Gebirge nicht erheblich.

§ 20. Fortsetzung: Die Ausführung der Reduktion für die Kondensation beginnt mit der Vervollständigung der üblichen Reduktion auf das Meeresniveau wegen der dabei vernachlässigten Ungleichmäßigkeiten in der Dichtigkeit der Massen unterhalb desselben. Es kommen wieder die Formeln des § 18 S. 169 u. ff. zur Anwendung:

Im Grundriß denken wir uns eine Zerlegung nach konzentrischen Kreisen, wie Fig. 23 S. 169 sie andeutet; im Ringe  $a_i$  bis  $a_{i+1}$  sei zwischen zwei benachbarten

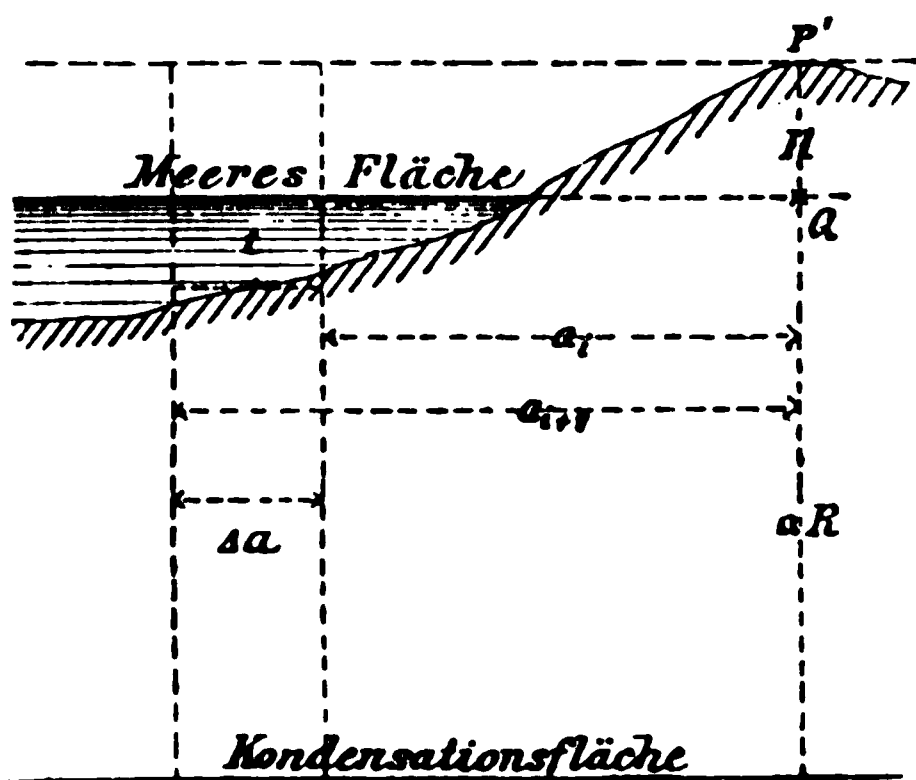


Fig. 26.

Radien der  $n$ . Teil der Peripherie enthalten. Ist nun in einer solchen Abteilung von der Meeresfläche bis zur Tiefe  $t$  die Dichtigkeit gleich  $\Theta$  anstatt  $2,8 = \frac{1}{2} \Theta_m$ , der Dichtigkeit der nach S. 162 § 15 nicht zu berücksichtigenden homogenen Schale zwischen Meeres- und Kondensationsfläche, so wird die Verbesserung des wie üblich, insbesondere

nach § 18 reduzierten  $g$  wegen dieser Abteilung mit Rücksicht auf Formel (7) S. 171 gleich

$$+ \frac{3}{2n} \frac{\Delta \Theta}{\Theta_m} \left\{ \frac{\sqrt{a_{i+1}^2 + (H+t)^2} - \sqrt{a_i^2 + (H+t)^2}}{-\sqrt{a_{i+1}^2 + H^2} + \sqrt{a_i^2 + H^2}} \right\} \frac{g}{R}, \quad (1)$$

worin  $\Theta_m = 5,6$  die mittlere Dichtigkeit der Erde ist,  $R$  deren mittleren Radius bezeichnet und  $\Delta \Theta$  durch die nachfolgende Gleichung definiert wird:

$$\Delta \Theta = \Theta - 2,8. \quad (2)$$

Für Werte von  $a_i > 5(H+t)$  genügt anstatt (1) die Näherungsformel, vergl. (7\*) S. 171:

$$- \frac{3}{4n} \frac{\Delta \Theta}{\Theta_m} \frac{(H+t)^2 - H^2}{R} \left( \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} \right) g. \quad (1^*)$$

Die Formel (1) bzw. (1\*) ist mit  $\Theta = 1$  unmittelbar für alle Abteilungen eines Meeresbeckens anwendbar, das sich in der Umgebung des Beobachtungsortes  $P'$  befindet, vergl. Fig. 26. Wie sie anzuwenden ist, wenn die Dichtigkeit einer Abteilung bis zur Tiefe  $t = nR =$  rund  $21^{km}$  Änderungen erleidet, bedarf keiner Ausführung. Wohl aber ist noch darauf hinzuweisen, daß in (2) anstatt 2,8 auch irgend eine andere normale Dichtigkeit  $\Theta_0$  eingeführt werden darf, was von Vorteil wird, wenn dies für viele Abteilungen die Reduktion zu null macht — überhaupt also die Rechnung erleichtert — nur muß man sich dessen erinnern, wenn später die Anziehung der kondensierten Massen auf  $Q$  ermittelt wird.

Nachdem in der angegebenen Weise der erste Teil der Reduktion ausgeführt worden ist, kommt als zweiter Teil an die Reihe die Berechnung der Anziehung der kondensierten Massen auf  $Q$ . Diese Anziehung ist dem bisher reduzierten Werte der Beschleunigung  $g$  hinzuzufügen. Ihre Berechnung vereinfacht sich dadurch, daß jetzt alle Massen in einer Ebene im Abstände  $nR =$  rund  $21^{km}$  von  $Q$  liegend gedacht werden.

Im Grundriss nehmen wir die Zerlegung wie früher. Als Dichtigkeit in einer Abteilung ist, insoweit die Massen *über* dem Meeresniveau in betracht kommen, das Produkt  $\Theta \cdot h$  aus deren konstant gedachter Dichtigkeit und der Meereshöhe des Terrains einzuführen, wozu noch das Produkt  $\Delta \Theta \cdot t$  hinzutritt, wenn *unter* dem Meeresniveau die Dichtigkeit bis zur Tiefe  $t$  von der normalen Dichtigkeit 2,8 bzw.  $\Theta_0$  um  $\Delta \Theta = \Theta - 2,8$  bzw.  $\Theta - \Theta_0$  abweicht. Wie der Ausdruck für die Dichtigkeit bei mehrfacher Schichtung zu bilden ist, geht hieraus deutlich genug hervor. Bleiben wir also bei dem einfachen Ausdruck  $\Theta \cdot h + \Delta \Theta \cdot t$  stehen, so wird die vertikale Komponente der Anziehung der betreffenden Abteilung mit Rücksicht auf Formel (2) § 1 S. 141, in welcher für  $\Theta dz$  jetzt  $\Theta \cdot h + \Delta \Theta \cdot t$  zu substituieren ist, wenn wir auch sofort  $g$  mit Hilfe des mehrfach benutzten Näherungsausdruckes einführen, gleich

$$+ \frac{3\alpha}{2n} \frac{\Theta \cdot h + \Delta\Theta \cdot t}{\Theta_m} \left( \frac{1}{\sqrt{a_i^2 + \alpha^2 R^2}} - \frac{1}{\sqrt{a_{i+1}^2 + \alpha^2 R^2}} \right) g. \quad (3)$$

Diese Formel kann für  $a_i > 150^{km}$  ohne merklichen Fehler auf

$$+ \frac{3\alpha}{2n} \frac{\Theta \cdot h + \Delta\Theta \cdot t}{\Theta_m} \left( \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} \right) g \quad (3^*)$$

abgekürzt werden. In diesen Formeln kann man genau genug

$$\alpha = \frac{1}{300} \quad \text{und} \quad \alpha^2 R^2 = 450 \text{ Quadr.-Kilom.}$$

setzen.

In Bezug auf die maximale Distanz  $a_i$ , bis zu welcher man vorstehende Formeln anzuwenden hat, wird man leicht bemerken, daß erheblich weiter zu gehen ist, als bei der üblichen Reduktion aufs Meeresniveau. Wenn der Ocean mit in betracht kommt, wird man die Rechnung bis mindestens  $1000^{km}$  Distanz auszudehnen haben, wie die Formeln (1\*) und (3\*) zeigen. Eine große Schwierigkeit erwächst jedoch aus dieser weiten Ausdehnung des Berechnungsbezirks deshalb nicht, weil nur für Distanzen von der Ordnung  $\alpha R$  die Berechnung eine scharfe zu sein braucht und also nur für diese Distanzen die Berechnungselemente genau ermittelt werden müssen. Die genannten Formeln zeigen nämlich, daß bei arithmetischer Progression der  $\alpha$  die Einflüsse der aufeinanderfolgenden Ringe annähernd mit dem umgekehrten Quadrate der Entfernung sich ändern.

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir hier noch Folgendes: Bei der vorstehend auseinandergesetzten Reduktionsrechnung wird die Anziehung der Massen über der Kondensationsfläche *vor* der Kondensation von der Schwerkraft abgezogen und *nach* der Kondensation wieder addiert. Die erstere Anziehung wird auf  $P'$ , die letztere auf  $Q$  bezogen. Ein Teil der Reduktion rührt somit von der Ortsveränderung her. Auf die Ortsveränderung bezieht sich aber auch das Reduktionsglied  $\frac{2H}{R} g$ , vergl. S. 169 § 18 (1), wobei die ganze Erdmasse berücksichtigt ist, insoweit sie nach außen wie eine homogen geschichtete Kugel anziehend wirkt. Damit nun für die Massen außerhalb der Kondensationsfläche die Reduktion wegen der Ortsveränderung nicht zweimal angebracht wird, muß bei der Kondensation von diesen Massen eine gewisse, homogene Schale ausgeschlossen werden, deren Anziehungsunterschied auf  $P'$  und  $Q$  schon in dem Gliede  $\frac{2H}{R} g$  enthalten ist. Die Dichtigkeit dieser Schale würde für  $\Theta_0$  einzuführen sein, wenn nicht der Umstand dieses unnötig machte, daß infolge der Vernachlässigung der Krümmung der Meeresfläche bei der Kondensation für eine homogene Schale der Anziehungsunterschied auf  $P'$  und  $Q$  verschwindend klein wird. Folglich ist  $\Theta_0$ , wie bisher angenommen, auch in dieser Hinsicht beliebig.

§ 21. **Kondensations-Reduktion für eine Inselstation.** Bei der im vorigen Paragraphen angegebenen Vervollständigung der üblichen Reduktion aufs Meeresniveau wird man sich aus praktischen Gründen auf die Berücksichtigung der stärksten bekannten Unregelmäßigkeiten in der Dichtigkeit der Erdkruste beschränken müssen. Ganz besonders wird man den Einfluss der Océane aufzusuchen haben.

Wir wollen hier und im nächsten Paragraphen eine Näherungsformel für kleine Inseln und für Küsten aufstellen, wobei wir annehmen, daß der Beobachtungsort im Meeresniveau liegt. Weiterhin werden wir dann noch einen einfachen Fall für Gebirgsstationen betrachten.

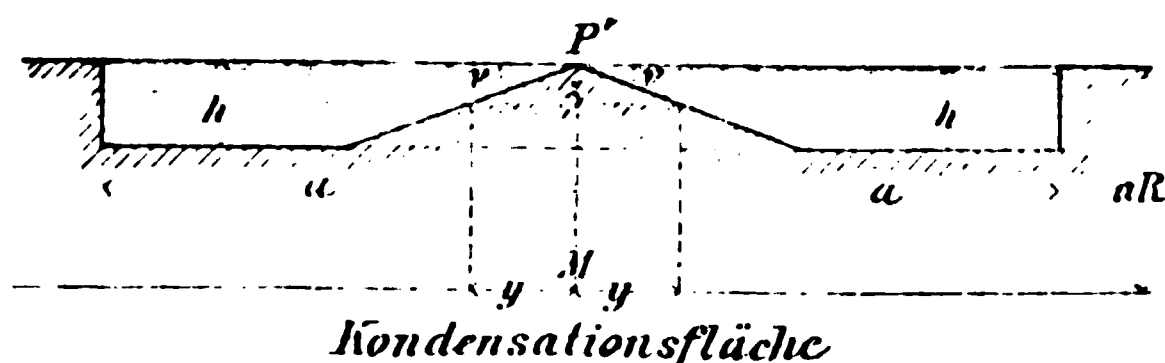


Fig. 27.

Die Insel denken wir uns als geraden Kreiskegel von der Dichtigkeit  $\Theta$ , den Ocean mit dem Radius  $a$  kreisförmig, konzentrisch zur Station  $P'$  auf der Inselspitze, begrenzt, Fig. 27. Als normale Dichtigkeit der Erdkruste nehmen wir  $\frac{1}{2} \Theta_m = 2,8$ .

Um nun auf diejenige Anziehung zu kommen, welche  $P'$  erleiden würde, wenn Ocean und Insel die Dichtigkeit 2,8 hätten, müssen wir erstens subtrahieren die Anziehung des Inselkegels mit der Dichtigkeit  $(\Theta - 1)$  und zweitens addieren die Anziehung eines geraden Kreiscylinders von der Tiefe und äußeren Begrenzung des Océans bei der Dichtigkeit 1,8. Um sodann die Kondensation zum Ausdruck zu bringen, ist die Anziehung der ersteren Masse zu addieren, der zweiten zu subtrahieren, nachdem diese Massen auf die Kondensationsfläche verschoben gedacht worden sind.

Nach S. 142 § 2 (4) ist die negative Anziehung des Inselkegels auf seine Spitze  $P'$  in dem Falle, daß  $(\Theta - 1)$  die Dichtigkeit ist, gleich

$$- 2\pi k^2 \cdot (\Theta - 1) h (1 - \sin \nu). \quad (1)$$

Nach Formel. (2) am gleichen Orte ist die positive Anziehung eines geraden Kreiscylinders von der Höhe  $h$ , dem Radius  $a$  und der Dichte 1,8 auf die Mitte  $P'$  seiner oberen Fläche gleich

$$+ 2\pi k^2 \cdot 1,8 (h + a - \sqrt{a^2 + h^2})$$

oder angenähert:

$$+ 2\pi k^2 \cdot 1,8 h \left(1 - \frac{h}{2a} + \dots\right). \quad (2)$$



Um die positive Anziehung des Inselkegels nach der Kondensation zu erhalten, zerlegen wir denselben in scheibenförmige Elemente vom Radius  $y$  und der Dicke  $dz$ , und kondensieren diese Elemente einzeln. Für das einzelne kondensierte Element ist nach S. 141 § 1 (2) die Vertikalanziehung gleich

$$2\pi k^2 \cdot (\Theta - 1) \left(1 - \frac{\alpha R}{\sqrt{\alpha^2 R^2 + y^2}}\right) dz.$$

Dies ist zu integrieren von  $y$  gleich null bis  $h \cot \nu$ . Rechnen wir  $z$  von  $P'$  bis zur Anfangslage des Elements, so wird  $z = y \tan \nu$  und  $dz = \tan \nu \cdot dy$ ; die positive Anziehung des kondensierten Inselkegels wird daher

$$+ 2\pi k^2 \cdot (\Theta - 1) \tan \nu \int_0^{h \cot \nu} \left(1 - \frac{\alpha R}{\sqrt{\alpha^2 R^2 + y^2}}\right) dy$$

oder gleich

$$+ 2\pi k^2 \cdot (\Theta - 1) h \left\{ 1 - \frac{\alpha R \tan \nu}{h} \log \text{nat} \frac{h + \sqrt{h^2 + \alpha^2 R^2 \tan^2 \nu}}{\alpha R \tan \nu} \right\}. \quad (3)$$

Die negative Anziehung des kondensierten Cylinders wird nach S. 141 § 1 (2) gleich

$$- 2\pi k^2 \cdot 1,8 h \left(1 - \frac{\alpha R}{\sqrt{a^2 + \alpha^2 R^2}}\right)$$

oder angenähert:

$$- 2\pi k^2 \cdot 1,8 h \left(1 - \frac{\alpha R}{a} + \dots\right). \quad (4)$$

Die Verbesserung der beobachteten Beschleunigung  $g$  ergibt sich hiermit, wenn noch zur Reduktion auf Bruchteile von  $g$  der Näherungswert  $\frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R$  mit  $\Theta_m = 5,6$  angewandt wird:

$$- \frac{3}{2} \frac{\Theta - 1}{5,6} \frac{h}{R} \left\{ \frac{\alpha R \tan \nu}{h} \log \text{nat} \frac{h + \sqrt{h^2 + \alpha^2 R^2 \tan^2 \nu}}{\alpha R \tan \nu} - \sin \nu - \frac{1,8}{\Theta - 1} \frac{\alpha R - \frac{1}{2} h}{a} + \dots \right\} g. \quad (5)$$

Dieselbe ist in der Regel negativ, denn nach § 11 S. 155 schneidet die Insel gerade diejenigen Massendefekte aus, welche bei der Kondensation eine Vermehrung der Anziehung geben würden — allerdings unter der Voraussetzung, daß nicht die Dichtigkeit der Insel abnorm klein und ihr Böschungswinkel vielleicht außerdem abnorm groß ist. Bei der Beurteilung des letzten Gliedes ist übrigens immer zu beachten, daß der Minimalwert von  $a$  gleich  $h : \tan \nu$  ist, mithin dieses Glied den Betrag von

$$\frac{1,8}{\Theta - 1} \frac{\alpha R}{h \cot \nu}$$



keinesfalls überschreiten kann. Aber im offenen Ocean tritt der Betrag dieses Gliedes ganz zurück, so daß man es bei einer Schätzung vernachlässigen wird. Auch das Glied  $\sin \nu$  in der Parenthese (5) kann man in der Regel seiner relativ geringen Gröfse halber vernachlässigen.

Als Näherungsformel für Inseln im offenen Ocean (bis 100 Meilen Abstand von Kontinenten) hat man damit

$$-\frac{3}{2} \frac{\Theta - 1}{5,6} \frac{h}{R} \frac{\log \text{nat} (n + \sqrt{n^2 + 1})}{n} g \quad (6)$$

für

$$n = h \cot \nu : a R .$$

Hiernach ergibt sich z. B. für  $\Theta = 2,8$ ,  $h = 3500^m$  und  $\cot \nu = 30$  die Reduktion gleich rund  $-g : 8000$ .

§ 22. Küstenstation. Wir denken uns die Küste von oben gesehen geradlinig durch  $P'$  hindurch begrenzt, den Abfall des Festlandes unter dem Winkel  $\nu$  bis zur Tiefe  $h$ : Fig. 28. Quer zur Längsrichtung der Küste denken wir uns ferner Kontinent und Meer sehr breit. Dann kommt bei der Kondensation nur ein Abschnitt des Festlandes von der Form eines geraden Prismas mit dem Querschnitt  $ABP'$  in betracht. Denn wäre auch dieses Prisma mit Wasser erfüllt, so würde der Kondensationseffekt gleich null sein, weil er nach S. 142 § 1 nicht nur null ist für jede weit ausgedehnte Scheibe, sondern zufolge der Symmetrie auch für jede durch einen Vertikalschnitt durch  $P'$  gebildete Hälfte einer solchen.

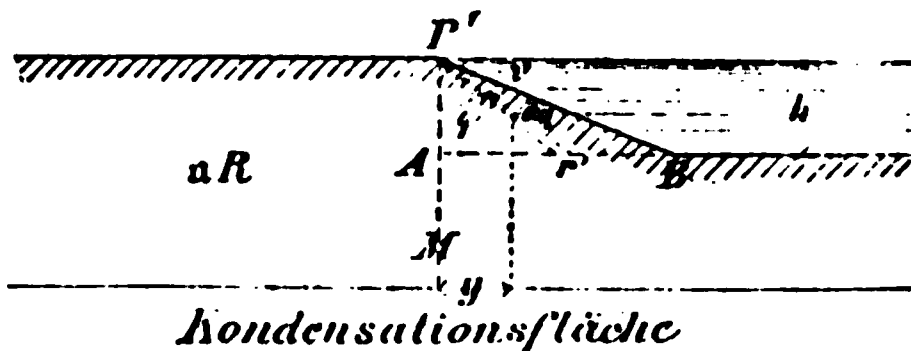


Fig. 28.

Das Prisma zerlegen wir der Länge nach in Elemente vom Querschnitt  $dq$ . Hat ein solches von  $P'$  den kürzesten Abstand  $r$ , welcher im Querprofil, Fig. 28, gemessen wird, so ist die Anziehung des Elements in Richtung  $r$  abzüglich der des Wassers gleich

$$k^2 (\Theta - 1) \int_{-L}^{+L} \frac{r dq dx}{\sqrt{r^2 + x^2}^3},$$

wenn  $\Theta$  die konstante Dichtigkeit des Prismas ist und  $x$  einen Abstand vom Querprofil in der Längsrichtung bezeichnet, der von  $-L$  bis  $+L$  variiert. Nach bekannten Grundformeln ist diese Anziehung gleich

$$k^2 (\Theta - 1) \frac{2L dq}{r \sqrt{r^2 + L^2}}, \quad (1)$$

d. i. in allen hier in betracht kommenden Fällen, bei denen die Küstenlänge  $L$  beiderseits von  $P'$  eine bedeutende sein wird, ausreichend genau gleich

$$2k^2 (\Theta - 1) \frac{dq}{r}. \quad (1^*)$$

Hiervon kommt gegenwärtig die vertikale Komponente in betracht, die durch Multiplikation von  $(1^*)$  mit  $\cos \varphi$ ,  $\varphi$  der Winkel zwischen  $r$  und der Vertikalen, hervorgeht. Setzen wir  $dq = r d\varphi \cdot dr$ , so wird die Vertikalanziehung des Prismas auf  $P'$  gleich

$$2k^2 (\Theta - 1) \int_0^{\frac{\pi}{2} - \nu} \int_0^{r'} \cos \varphi d\varphi dr \quad \text{d. i.} \quad 2k^2 (\Theta - 1) \int_0^{\frac{\pi}{2} - \nu} r' \cos \varphi d\varphi$$

oder, weil  $r' \cos \varphi = h$  ist, gleich

$$2k^2 (\Theta - 1) h \left( \frac{\pi}{2} - \nu \right). \quad (2)$$

Diese Anziehung ist von der in  $P'$  beobachteten Beschleunigung abzuziehen. Nach erfolgter Kondensation denken wir uns alle Elemente, welche in derselben Vertikalen im Abstand  $y$  von  $M$  liegen, vereinigt. In Formel  $(1^*)$  tritt dann an Stelle von  $r$  die  $\sqrt{n^2 R^2 + y^2}$  und an Stelle von  $dq$  das Produkt  $(h - y \tan \nu) dy$ , da  $h - y \tan \nu$  die Höhe des Prismenprofils im Abstand  $y$  ist. Die vertikale Komponente wird daher gleich

$$2k^2 (\Theta - 1) \int_0^{h \cot \nu} \frac{nR (h - y \tan \nu)}{n^2 R^2 + y^2} dy.$$

Das unbestimmte Integral ist

$$h \arctan \frac{y}{nR} - \frac{1}{2} nR \tan \nu \log \text{nat} (n^2 R^2 + y^2) + \text{Konst.}$$

Beachtet man, daß  $\arctan u = \frac{\pi}{2} - \arccot u = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{u}$  gesetzt werden kann, so findet man nun ohne Schwierigkeit als Vertikalanziehung nach der Kondensation:

$$2k^2 (\Theta - 1) h \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{nR \tan \nu}{h} - \frac{nR \tan \nu}{h} \log \text{nat} \frac{\sqrt{h^2 + n^2 R^2 \tan^2 \nu}}{nR \tan \nu} \right\}. \quad (3)$$

Zieht man hiervon (2) ab, so folgt als Reduktion wegen der Kondensation für das beobachtete  $g$  unter üblicher Einführung des Näherungswertes für  $g$ :

$$- \frac{3}{2\pi} \frac{\Theta - 1}{5,6} \frac{h}{R} \left\{ \frac{1}{n} \log \text{nat} \sqrt{n^2 + 1} + \arctan \frac{1}{n} - \nu \right\} g \quad (4)$$

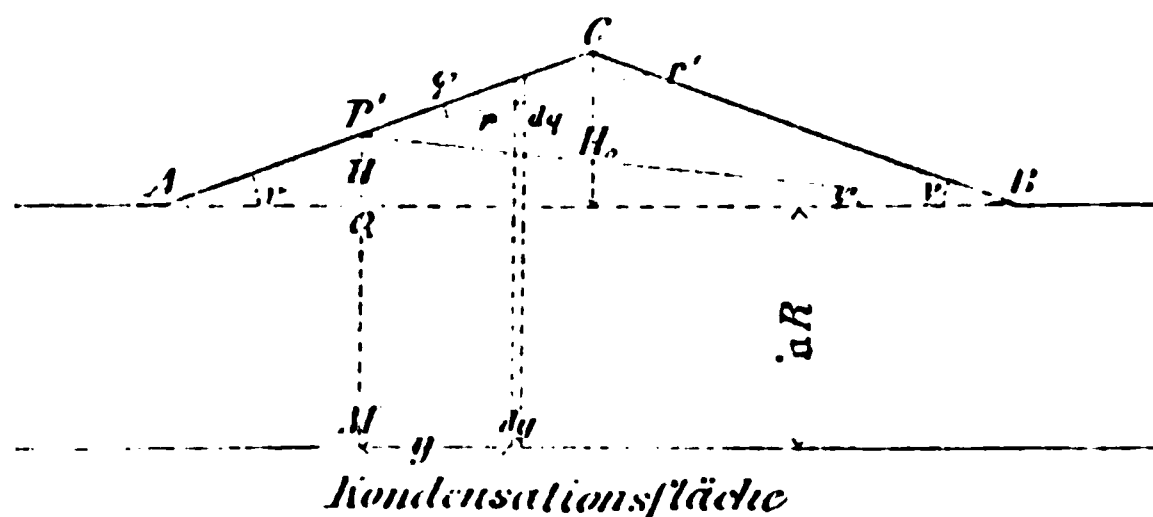
mit

$$n = h \cot \nu : nR.$$

Vernachlässigen wir das meist unbedeutende  $\nu$ , so läßt sich (4) mit dem entsprechenden Ausdruck (6) für eine Inselstation leicht vergleichen, und man erkennt, daß (4) ungefähr  $\frac{1}{3}$  von jenem Ausdruck (6) unter sonst gleichen Verhältnissen ist. Da aber die Küsten der Kontinente durchschnittlich langsamer abfallen als diejenigen der kleinen Inseln der Ozeane, so wird der Bruchteil noch kleiner.

Für die Werte  $h = 3500^m$ ,  $\cot \nu = 48$  und  $\omega = 2,8$  folgt die Korrektur gleich rund  $-g : 30000$ .

§ 23. Gebirgsstation. Die übliche Reduktion befreit die beobachtete Beschleunigung zwar mehr oder weniger richtig von der Anziehung der Massen, welche sich über die Meeresfläche erheben, unterläßt aber völlig die Berücksichtigung der Anziehung der kondensierten Gebirgsmasse. Diese kann bei ausgedehnten Gebirgsmassen bedeutend werden. Als Beispiel betrachten wir einen im Verhältniß zur Breite sehr langen Gebirgsrücken mit dem Querprofil  $ABC$ , einem gleichschenkeligen Dreieck.



**Fig. 21.**

Vor der Kondensation ist die vertikale Anziehung auf einen im mittleren Querprofil liegenden Punkt  $P'$ , Fig. 29, durch den Ausdruck

$$2 k^2 \Theta \iint \cos \left( \frac{\pi}{2} + \nu - \varphi \right) d\varphi dr \quad (1)$$

gegeben, den man mit Rücksicht auf die veränderte Bedeutung von  $\varphi$  aus dem vorigen Paragraphen, Formel (1\*) und folgende Zeilen, leicht entnimmt. Die Integration nach  $r$  ergiebt  $r'$ , den Radiusvektor des Contours  $CBA$  in der durch  $\varphi$  bezeichneten Richtung.

Wenn der Endpunkt von  $r'$  auf  $CB$  liegt, d. h.  $\varphi$  sich zwischen null und  $\nu + \psi$  befindet, so ist

$$r' = P' C \cdot \frac{\sin 2\nu}{\sin (2\nu - \varphi)} = \frac{2(H_0 - H) \cos \nu}{\sin (2\nu - \varphi)}. \quad (2)$$

Liegt dagegen der Endpunkt von  $r'$  auf  $BA$ , d. h.  $\varphi$  zwischen  $\nu + \psi$  und  $\pi$ , so ist

$$r' \cos \left( \frac{\pi}{2} + \nu - \varphi \right) = H. \quad (3)$$

Hiermit giebt (1):

$$2 k^2 \Theta \left\{ 2 (H_0 - H) \cos \nu \int_0^{\nu+\psi} \frac{\sin(\varphi - \nu)}{\sin(2\nu - \varphi)} d\varphi + H \int_{\nu+\psi}^{\pi} d\varphi \right\},$$

oder unter Ausführung des zweiten Integrals und mit Einführung von  $\varphi' = 2\nu - \varphi$  im ersten Integral:

$$2 k^2 \Theta \left\{ H (\pi - \nu - \psi) - 2 (H_0 - H) \cos \nu \int_{\nu-\psi}^{2\nu} \frac{\sin(\varphi' - \nu)}{\sin \varphi'} d\varphi' \right\}.$$

Durch Auflösung von  $\sin(\varphi' - \nu)$  folgt ohne Schwierigkeit:

$$2 k^2 \Theta \left\{ H(\pi - \nu - \psi) - 2(H_0 - H) \cos \nu \left[ (\nu + \psi) \cos \nu - \sin \nu \log \text{nat} \frac{\sin 2\nu}{\sin(\nu - \psi)} \right] \right\}. (4)$$

Führen wir endlich noch den mehrfach benutzten Näherungswert von  $g$  ein, so geht der vorstehende Ausdruck für die Vertikalanziehung des Gebirgsrückens auf  $P'$  über in:

$$\frac{3}{25,6} \Theta \left\{ \frac{H}{R} \left( 1 - \frac{\nu + \psi}{\pi} \right) - \frac{H_0 - H}{R} \left[ 2 \frac{\nu + \psi}{\pi} \cos^2 \nu - \frac{\sin 2\nu}{\pi} \log \text{nat} \frac{\sin 2\nu}{\sin(\nu - \psi)} \right] \right\} g. (5)$$

Die Formel zur Reduktion auf das Meeresniveau für horizontales Terrain berücksichtigt von der geschlungenen Parenthese nur das Hauptglied  $H : R$ ; doch ist der Fehler, da man jene Formel eben nur bei kleinen Werten von  $\nu$  anwenden und sonst strenger reduzieren wird, jedenfalls gering. Um dieses bei dem mit dem  $\log \text{nat}$  behafteten Gliede einzusehen, beachten wir, daß nach Fig. 29

$$\frac{\sin 2\nu}{\sin(\nu - \psi)} = \frac{P'B}{P'C} = \frac{P'B \cdot \sin \nu}{H_0 - H}$$

ist und erhalten:

$$\begin{aligned} & \frac{H_0 - H}{R} \frac{\sin 2\nu}{\pi} \log \text{nat} \frac{\sin 2\nu}{\sin(\nu - \psi)} = \\ & \frac{H_0}{R} \frac{\sin 2\nu}{\pi} \cdot \frac{H_0 - H}{H_0} \left( \log \text{nat} \frac{P'B \cdot \sin \nu}{H_0} + \log \text{nat} \frac{H_0}{H_0 - H} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Da  $H_0 - H$  und  $P'B$  mit wachsendem  $H$  abnehmen, falls nur das Profil  $ACB$  bei  $C$  stumpf ist, was hier lediglich in betracht kommt, so hat der mit dem ersten Logarithmus gebildete Teil vorstehenden Ausdrucks sein Maximum bei  $H$  gleich null; dasselbe ist gleich

$$\frac{H_0}{R} \frac{\sin 2\nu}{\pi} \log \text{nat} (2 \cos \nu). \quad (7)$$

Da ferner allgemein  $u \log \text{nat} u$  für  $u = \text{null}$  und eins gleich null ist, für  $u = \frac{1}{e}$ , wo  $e$  die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet, aber ein negatives Maximum hat, so erhält der mit dem zweiten Logarithmus gebildete Teil von (6) den Wert null für  $H = H_0$  und für  $H$  gleich

null, einen Maximalwert aber für  $H_0$ :  $(H_0 - H) = e = 2,7 \dots$ .  
Dieses Maximum ist rund gleich

$$\frac{H_0}{R} \frac{\sin 2\nu}{2,7 \pi}. \quad (8)$$

Nachdem hiermit bewiesen worden, daß man, wie oben bemerkt, in (5) die geschlungene Parenthese durch  $H : R$  bis auf meist unerhebliche Glieder der Ordnung  $H_0 \sin \nu : R$  ersetzen kann, gehen wir zur Ableitung einer Formel für die vertikale Komponente der Anziehung des Gebirgsrückens nach seiner Kondensation über.

Legen wir in den Abständen  $y$  und  $y + dy$  von  $P'QM$ , Fig. 29, parallele Vertikalebene in die Längsrichtung des Prismas, so giebt die Kondensation der Masse des Prismenstreifens zwischen diesen beiden Ebenen in Bezug auf  $Q$  als vertikale Komponente der Anziehung mit Rücksicht auf S. 182 (1\*):

$$2 k^2 \Theta \frac{\alpha R (H + y \tan \nu)}{\alpha^2 R^2 + y^2} dy \quad (9)$$

falls die Schnittebenen zwischen  $A$  und  $C$  zu liegen kommen. Liegen dagegen die Schnittebenen zwischen  $C$  und  $B$ , so lautet der entsprechende Ausdruck:

$$2 k^2 \Theta \frac{\alpha R (2H_0 - H - y \tan \nu)}{\alpha^2 R^2 + y^2} dy. \quad (10)$$

Die gesamte Vertikalanziehung folgt aus (9) und (10) durch Integration nach  $y$  von  $y = -H \cot \nu$  bis  $y = (H_0 - H) \cot \nu$  bzw. von hier bis  $y = (2H_0 - H) \cot \nu$ . Es ergibt sich ohne Schwierigkeit unter Einführung des Näherungswertes von  $g$ :

$$+ \frac{3}{2\pi} \frac{\Theta}{5,6} \frac{H_0}{R} \left\{ \frac{n}{n_0} \arctan n + \frac{2n_0 - n}{n_0} \arctan(2n_0 - n) - 2 \frac{n_0 - n}{n_0} \arctan(n_0 - n) \right. \\ \left. + \frac{1}{n_0} \log \text{nat} \frac{(n_0 - n)^2 + 1}{V(n^2 + 1) ([2n_0 - n]^2 + 1)} \right\} g, \quad (11)$$

worin gesetzt ist

$$n_0 = H_0 \cot \nu : \alpha R,$$

$$n = H \cot \nu : \alpha R.$$

Der Ausdruck (11) stellt die positive Korrektur des wie üblich, und zwar streng, aufs Meeresniveau reduzierten Beobachtungswertes von  $g$  dar. Dieselbe nimmt jedenfalls von oben nach unten ab.

Das Maximum bei  $n = n_0$ , wo  $P'$  sich auf dem Kamm des Gebirgsrückens befindet, wird gleich:

$$+ \frac{3}{2\pi} \frac{\Theta}{5,6} \frac{H_0}{R} \left\{ 2 \arctan n_0 - \frac{1}{n_0} \log \text{nat} (n_0^2 + 1) \right\} g. \quad (12)$$

Dagegen ist das Minimum bei  $n = \text{null}$ , d. h.  $P'$  am Fufse des Gebirgsrückens, gleich:

$$+ \frac{3}{2\pi} \frac{\Theta}{5,6} \frac{H_0}{R} \left\{ \frac{1}{n_0} \log \operatorname{nat} \frac{n_0^2 + 1}{\sqrt{4n_0^2 + 1}} + 2 \arctan 2n_0 - 2 \arctan n_0 \right\} g. \quad (13)$$

Wenn, wie in der Regel bei größeren Erhebungen,  $n_0$  die Einheit übersteigt, so erscheint es vorteilhaft, in (12) und (13) von der Relation  $\arctan u + \arctan \frac{1}{u} = \frac{\pi}{2}$  Gebrauch zu machen. Diese Formeln gehen alsdann über in folgende:

$$+ \frac{3}{2\pi} \frac{\Theta}{5,6} \frac{H_0}{R} \left\{ \pi - 2 \arctan \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0} \log \operatorname{nat} (n_0^2 + 1) \right\} g, \quad (12^*)$$

und

$$+ \frac{3}{2\pi} \frac{\Theta}{5,6} \frac{H_0}{R} \left\{ \frac{1}{n_0} \log \operatorname{nat} \frac{n_0^2 + 1}{\sqrt{4n_0^2 + 1}} + 2 \arctan \frac{1}{n_0} - 2 \arctan \frac{1}{2n_0} \right\} g. \quad (13^*)$$

Daraus ist ersichtlich, daß selbst dann, wenn  $P'$  am Fuße eines großen Gebirgsrückens liegt, die Vertikalanziehung nach der Kondensation erheblich ausfällt.

Für  $H_0 = 5000^m$ ,  $\Theta = 2,8$ ,  $\cot \nu = 60$  und  $n_0 = 14$ , welche Werte in roher Annäherung dem *Himalaya* entsprechen, ist die Korrektur des wie üblich reduzierten  $g$  rund gleich:

im Maximum (Kamm)  $+ g : 2050$

im Minimum (Fuß)  $+ g : 22000$ .

Im ersten Falle beträgt sie nahezu soviel, als bei der Reduktion auf den Meeresspiegel für Lokalanziehung subtrahiert worden ist, d. i. nach Formel (5), in welcher  $\psi = \nu$ ,  $H = H_0$  zu setzen ist,  $- g : 1700$ , so daß die totale Reduktion sich auf  $- g : 10000$  stellt.

**§ 24. Hilfssatz:** Für ein homogenes Sphäroid, welches von einem schwach abgeplatteten Rotationsellipsoid nur wenig abweicht, ist es erlaubt, die Entwicklung des Potentials außerhalb nach negativen Potenzen des Radiusvektors für die praktischen Zwecke als bis zur Oberfläche konvergent zu betrachten.

In § 15 S. 163 wurde die Gültigkeit vorstehenden Satzes angenommen, um die Zulässigkeit des nachfolgend entwickelten Kondensationsverfahrens darzuthun. Es ist jetzt der Beweis des Satzes zu liefern. Um uns direkt auf die irdischen Verhältnisse zu beziehen, denken wir uns zu dem homogenen Sphäroid von der Dichte  $\Theta$  innerhalb der konzentrisch zum Schwerpunkt eingeschriebenen Kugel noch solche Massen in Form von konzentrischen Kugelschalen beigefügt, daß die mittlere Dichte  $\Theta_m = 5,6$  herauskommt. Für  $\Theta$  setzen wir schließlich 2,8. Das Sphäroid soll vom Rotationsellipsoid so abweichen, wie das Geoid vom Erdellipsoid. Die Abweichungen sind charakterisiert durch die maximale normale Erhebung und Senkung und die Lotabweichung. Wir nehmen an, daß die in § 15 S. 163 angedeu-

teten Untersuchungen den Betrag der ersteren auf  $\leq 500^m$ , der letzteren auf  $\leq 1,5'$  festgestellt haben. Für die Zwecke der Untersuchung reicht es aber aus, der Wellenform die Kreiskegelform zu substituieren, welche eher ungünstiger als günstiger wie jene ist. Als Maximum der Höhe eines Kreiskegels setzen wir  $1000^m$  an, als konstantes Gefälle seiner Seitenfläche  $1:5000$ , entsprechend einer durchschnittlichen Lotablenkung von  $3/4'$ .

Wir betrachten zunächst einen Kegel, welcher auf das Ellipsoid aufgesetzt ist und untersuchen, wie sich für einen Punkt  $P'$  seiner Oberfläche Potential und Schwerkraft ändern, wenn wir denselben auf eine Parallelfäche zur Ellipsoidfläche im Abstand  $aR$  nach innen kondensieren. Zur Veranschaulichung der Situation kann Fig. 29 S. 183 dienen,  $AB$  als Ellipsoidfläche gedacht.

Vor der Kondensation hat man als Vertikalanziehung des Kegels sehr nahe, wenn  $N$  die Höhe von  $P'$  über dem Ellipsoid bezeichnet:

$$\frac{3}{2} \frac{\Theta}{5,6} \frac{N}{R} g, \quad (1)$$

indem hier die Formel (3) § 16 S. 164 für eine horizontale Platte zur Anwendung gelangen darf, wie bei dem geringen Gefälle der Seitenflächen ohne weiteres klar ist, aber auch durch die Ungleichung (5) S. 168 verifiziert werden kann, wenn man darin im Maximum  $h_1 = h_2 = h = 1000^m$ ,  $h:a = 1:5000$  setzt.

Um die Anziehung nach erfolgter Kondensation auf bekannte Formeln zurückzuführen, substituieren wir ein Mal dem Kegel ein unendlich langes Prisma von dem Querschnitt, wie ihn Fig. 29 zeigt, ein zweites Mal einen Kegel, dessen Spitze  $P'$  und dessen Höhe gleich  $N$  ist, bei demselben Gefälle des Mantels wie für den großen Kegel. Offenbar erhalten wir so zwei Grenzwerte, die den richtigen Wert zwischen sich enthalten.

Für den Fall der Substitution des Prismas folgt nach Formel (1) S. 185 als Anziehung nach der Kondensation:

$$\frac{3}{2\pi} \frac{\Theta}{5,6} \frac{N_0}{R} \left\{ \frac{n}{n_0} \arctan n + \frac{2n_0 - n}{n_0} \arctan (2n_0 - n) - 2 \frac{n_0 - n}{n_0} \arctan (n_0 - n) \right. \\ \left. + \frac{1}{n_0} \log \text{nat} \sqrt{\frac{(n_0 - n)^2 + 1}{(n^2 + 1)([2n_0 - n]^2 + 1)}} \right\} g, \quad (2)$$

worin gesetzt ist:

$$\begin{aligned} n_0 &= N_0 : aR \tan \nu \\ n &= N : aR \tan \nu, \end{aligned} \quad (3)$$

wenn  $N_0$  die Höhe des ganzen Kegels und  $\tan \nu$  das Gefälle seines Mantels bezeichnet. Eigentlich ist  $aR$  um  $N$  zu vergrößern, da der angezogene Punkt bei der Kondensation nicht von  $P'$  nach  $Q$  verschoben wird, sondern in unveränderter Lage bleibt; aber für vorliegende Schätzung genügt  $aR$  auch.

Wird der kleine Kegel substituiert, so ist nach S. 180 § 21 (3), wenn daselbst  $\Theta$  für  $\Theta - 1$  gesetzt und  $g$  eingeführt wird, die Anziehung:

$$\frac{3}{2} \frac{\Theta}{5,6} \frac{N}{R} \left( 1 - \frac{1}{n} \log \text{nat} [n + \sqrt{n^2 + 1}] \right) g. \quad (4)$$

Um vorstehende Ausdrücke zu deuten, muß man beachten, daß für die in betracht kommenden Werte  $n R = 21000^m$  und  $\tan \nu < 1 : 5000$  die Hilfsgrößen  $n_0$  und  $n$  die Einheit sicher überschreiten, wenn  $N_0$  und  $N$  größer als  $4,2^m$  werden.

Schließen wir nun zunächst Fälle aus, wo  $N_0$ ,  $N$  oder auch  $N_0 - N$  kleiner als  $17^m$  ist, so wird  $n_0$  sowohl wie  $n$  und  $n_0 - n$  größer als 4. Dies findet statt bei Wellen größerer Erhebung für alle Lagen von  $P'$ , welche nicht sehr nahe am Fusse oder an der Kuppe sich befinden. In Formel (2) kann man nun, weil  $n$ ,  $2n_0 - n$  und  $n_0 - n$  große Zahlen bezeichnen, von nachstehender, für große  $u$  vorteilhaften Relation Gebrauch machen:

$$\arctan u = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{u} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{u} + \frac{1}{3u^3} - \dots$$

Die Glieder in (2) mit  $3u^3$  im Nenner für  $u = n$ ,  $2n_0 - n$  und  $n_0 - n$  können aber wegbleiben, da sie weniger als 1 Milliontel  $g$  geben. Außerdem heben sich die Glieder  $1 : u$  für die 3 Werte von  $u$  zusammengekommen auf, und es bleibt für (2) nach naheliegender Reduktion:

$$\left\{ \frac{3}{2} \frac{\Theta}{5,6} \frac{N}{R} + \frac{3}{2} \frac{\Theta}{5,6} n \tan \nu \cdot \frac{1}{\pi} \log \text{nat} \frac{(n_0 - n)^2 + 1}{\sqrt{(n^2 + 1) ([2n_0 - n]^2 + 1)}} \right\} g, \quad (5)$$

während (4) in entsprechender Schreibweise lautet:

$$\left\{ \frac{3}{2} \frac{\Theta}{5,6} \frac{N}{R} - \frac{3}{2} \frac{\Theta}{5,6} n \tan \nu \cdot \log \text{nat} [n + \sqrt{n^2 + 1}] \right\} g. \quad (6)$$

Die Vergleichung von (1) mit den Grenzwerten (5) und (6) zeigt, daß die zweiten Teile der letzteren Ausdrücke Grenzwerte der Änderung der Schwerkraft in  $P'$  infolge der Kondensation der kegelförmigen Erhebung bezeichnen. Diese Änderung ist aber für jede Lage von  $P'$  unerheblich. Setzt man zum Zwecke des Nachweises im zweiten Teile von (5)  $n_0 - n = u$  und führt anstatt  $n$  überall  $u$  ein, so wird der mit  $n$  veränderliche Faktor

$$\log \text{nat} \frac{(n_0 - n)^2 + 1}{\sqrt{(n^2 + 1) ([2n_0 - n]^2 + 1)}} = \log \text{nat} \frac{u^2 + 1}{\sqrt{([n_0 + u]^2 + 1) ([n_0 - u]^2 + 1)}}.$$

Die Differentiation nach  $u$  giebt den Differentialquotienten des letzten Ausdrucks gleich

$$\frac{2n_0^2 u (n_0^2 + 3 - u^2)}{(u^2 + 1) ([n_0 + u]^2 + 1) ([n_0 - u]^2 + 1)},$$

welcher für  $u = \text{null}$  bis  $n_0$  stets positiv ist. Hiernach genügt es, die äußersten in betracht kommenden Werte von  $u$  ins Auge zu



fassen. Als solche nehmen wir null und  $n_0$ , da die Bedingung  $n_0$ ,  $n$  und  $n_0 - n > 4$  sich nicht auf den zweiten Teil von (5) bezieht. Für  $u = \text{null}$  ist  $n = n_0$  und der in (5) auftretende  $\log \text{nat}$  gleich  $-\log \text{nat}(n_0^2 + 1)$ ; für  $u = n_0$  ist  $n = \text{null}$  und derselbe  $\log \text{nat}$  gleich  $\log \text{nat}(n_0^2 + 1) - \frac{1}{2} \log \text{nat}(4n_0^2 + 1)$ . Der Wert des zweiten Teils von (5) liegt also für  $\Theta = 2,8$ ,  $\tan \nu = 1 : 5000$  und  $N = 1000^m$  mit  $n_0 = 240$  zwischen rund

$$-\frac{1}{500000} g \quad \text{und} \quad +\frac{1}{1000000} g. \quad (7)$$

Der zweite Teil von (6) wird am größten für  $n=n_0$ , und zwar ist sein Wert unter denselben Voraussetzungen wie vorher alsdann gleich rund

$$-\frac{1}{800000} g. \quad (8)$$

Da nun für kleinere Werte von  $\nu$  und  $N$  die entsprechenden Werte der zweiten Glieder in (5) und (6) noch kleiner sind, so erkennt man, daß für alle Lagen von  $P'$  auf der Seitenfläche einer kegelförmigen Erhebung, welche in Höhe von Fuß oder Kuppe um mehr als  $17^m$  absteigen, die Kondensation nur einen unerheblichen Effekt auf die Schwerkraft hat. Dasselbe gilt aber auch für Lagen von  $P'$  bis zum Fusse und zur Kuppe; wenn dieses noch eines Beweises bedürfte, so würde es ausreichen für den Fuß und die Kuppe die Gültigkeit zu zeigen, was wir aber unterlassen können.

Vorstehendes läßt die Unerheblichkeit des Kondensationseffekts einer kegelförmigen bzw. wellenförmigen Erhebung der eingangs angegebenen Art auf die Größe der Schwerkraft für Punkte in der Nähe der Sphäroidoberfläche deutlich erkennen.

Für das Potential bedarf es keiner längeren Rechnung; hier können wir sogleich an die Ergebnisse in § 7 S. 149, insbesondere an Formel (4) S. 151 anschließen. Dieselbe giebt die Änderung des Potentials, welche durch Kondensation einer homogenen, unendlich dünnen Scheibe der Kugeloberfläche vom Radius  $r$  auf die Kugeloberfläche vom Radius  $r_i$  entsteht, wobei die Ausdehnung der Platte so genommen ist, daß der Kondensationseffekt ein Maximum wird. Betrachten wir nun das dem Sphäroid zu grunde liegende Ellipsoid als Kugel, was für den Zweck der Ermittlung des Kondensationseffektes ausreicht, und umschließen wir diese Kugeloberfläche konzentrisch durch eine zweite außerhalb im Abstand von  $500^m$ , so enthalten beide alle zu kondensierenden, wellenförmigen Erhebungen zwischen sich, und die erwähnte Formel (4) stellt den überhaupt möglichen maximalen Betrag des Effektes dar, wenn für  $r - r_i$  gesetzt wird  $nR$  und für  $dr$  der Betrag von  $500^m$ . Das kleine Glied  $E_r : r'$  in (4) dürfen wir vernachlässigen. Es folgt

$$2 \pi k^2 \Theta n R . 500,$$

woraus nach *Bruns' Theorem* S. 148 durch Division mit  $g = \frac{4}{3}\pi k^2 \Theta_m R$  als maximale Verschiebung der Flächen konstanten Potentials in der Nähe der Oberfläche sich rund  $\frac{5}{4}m$  ergeben. Diese Verschiebung entspricht einem Fehler in dem Betrage der Schwerkraft außerhalb von etwa  $\frac{1}{2500000}$  desselben; sie ist also ganz unerheblich.

Bisher wurden nur Erhebungen über das Ellipsoid betrachtet. Daß Senkungen kein wesentlich verschiedenes Resultat geben werden, ist unmittelbar klar. Es bleibt nur das eine Bedenken, ob die Entwicklung nach negativen Potenzen des Radiusvektors noch genügt für Punkte  $P'$ , welche in einer Senkung liegen: zwar außerhalb der Oberfläche des Sphäroids, aber doch innerhalb derjenigen des Ellipsoids. Um dieses Bedenken zu beseitigen, denken wir uns innerhalb des Ellipsoids ein konzentrisches, koaxiales Ellipsoid, welches die Senkungen gerade noch ausschließt, dessen Axen also nach unseren Annahmen um eine Größe von etwa  $500m$  kleiner sind, als diejenigen des ursprünglichen Ellipsoids. Die Oberflächen beider Ellipsoide können hier als Parallellflächen angesehen werden. Wir kondensieren nun die ganze Schicht außerhalb des inneren Ellipsoids.

Auf einen Punkt  $P'$  der Sphäroidfläche in der Senkung wirkt diese Schicht wegen des geringen Gefälles der Senkungsfläche, abgesehen von der Krümmung der Ellipsoidoberfläche, in Richtung der Vertikalen anziehend wie eine unterhalb gelegene, horizontale, unendliche Platte von der Stärke  $P'Q'$ , Fig. 30, wobei  $P'Q' = N_0 - N$

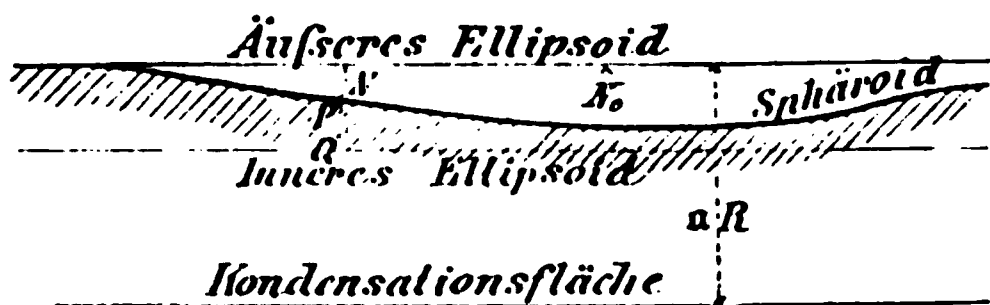


Fig. 30.

ist. Durch die Kondensation ändert sich hieran aber nichts. Denn ohne die Senkung würde die Schicht zwischen den Ellipsoidoberflächen nach der Kondensation noch anziehen wie eine horizontale, unendliche Platte von der Stärke  $N_0$ . Die durch die Senkung abgeschnittenen Massen ziehen zufolge obiger Untersuchungen nach der Kondensation in vertikaler Richtung beinahe an, wie eine Platte von der Stärke  $N$ ; da diese Anziehung abgeht, so bleibt die Anziehung einer Platte von der Stärke  $N_0 - N$ , wie vor der Kondensation. Hat demnach diese letztere auf die Schwerkraft keinen erheblichen Einfluß, so ist ihr Einfluß überhaupt als unerheblich anzusehen, da auch der Kondensationseffekt bezüglich des Potentials verschwindet, was die obigen Untersuchungen ohne weiteres erkennen lassen.

Für das Sphäroid mit kondensierter Oberflächenschicht ist aber die Entwicklung nach negativen Potenzen des Radiusvektors bis zur Oberfläche konvergent; sie ist es nach vorstehenden Untersuchungen also auch in hinreichender Annäherung für die Massen des Sphäroids in der ursprünglichen Lagerung.

§ 25. Ältere Pendelbeobachtungen zur Bestimmung der Intensität der Schwere. Wir gehen nun dazu über, auf das vorhandene Beobachtungsmaterial die Kondensationstheorie anzuwenden, um dann die Abplattung der Meeresfläche abzuleiten.

Die epochemachenden Messungen von *Kater*, *Sabine*, *Foster* u. a. (vergl. S. 85 Anm.) wurden mit sehr einfach konstruierten, invariablen Pendeln ausgeführt, die man mittelst einer Schneide auf einer Achatplatte schwingen liefs, welche auf einem stabilen Gerüst an einer Wand oder auf einem breitbasierten, schweren und beschwerten Metallstativ befestigt war.\*) Wir geben die Resultate dieser Messungen mit Benutzung von *Bailys* Arbeit in den *Memoirs of the Royal Astronomical Society* VII 1834. *Bailys* Reduktionen der Beobachtungen sind adoptiert, aber nicht seine Verkuppelung der Reihen verschiedener Beobachter, sodaß die im Folgenden gegebenen Schwingungszahlen z. T. mit *Bailys* Haupttabelle S. 96—97 a. a. O. differieren.

1. *Kater* 1818—19 mit einem Pendel (bestehend aus einer flachen Stange mit Linse), welches auf einer Achatplatte auf einem schweren, gußeisernen Rahmen schwang. Letzterer war über der an einer Wand aufgestellten Uhr (an deren verlängerten Rückwand) befestigt. Publiziert in *Phil. Transact.* 1819. Die Stationen liegen nahe bei Stationen der *Trigonometrical Survey*. In *Unst* beobachtete *Kater* dicht bei dem Orte, wo früher (um 1808) *Biot* beobachtet hatte.

Die Beobachtungen begannen in *London* und endeten, abgesehen von *Shanklin Farm*, wo zuletzt beobachtet wurde, in *London*. Beide Ergebnisse für *London* stimmen auf 0,03 Schwingungen. Ob *Kater* hier das Konsol und die Achatplatte des oben beschriebenen Apparates, oder des gleich zu erwähnenden Reversionspendels benutzte, ist nicht angegeben; vergl. dazu Nr. 6 weiterhin.

In der folgenden Tabelle giebt die zweite Kolumne die geogr. Breite, die dritte die Meereshöhe  $H$  in Metern, die vierte die korrigierten täglichen Schwingungszahlen nach *Baily*, die fünfte die Länge des Sekundenpendels in Metern, die sechste die Korrektur an den Werten der fünften Kolumne, in Einheiten der sechsten Decimalstelle, wenn nicht nach *Bouguer-Young* mit  $2HF : R$ , sondern einfach mit  $2H : R$  auf den Meeresspiegel reduziert wird, als wäre das Terrain über letzterem bis zur Station nicht vorhanden. Die siebente Kolumne giebt den Faktor  $F$ , der zu den Werten der fünften Kolumne gehört.  $F$  wurde nach *Young* für ebenes Terrain in der Regel zu 0,6, bei umgebenden Hügeln etwas gröfser angenommen.

\*) Ein Abrifs der älteren und neueren Beobachtungsmethoden findet sich in *Clarks Geodesy* S. 323—339. Vergl. auch *Wüllner, Experimentalphysik*, Bd. 1 1882 S. 124 u. ff.

1	2	3	4	5	6	7
Shanklin Farm bei Dun- nose, I. Wight . . . . .	50° 37' 24"	74 <sup>m</sup>	86061,77	0,994042	+ 7	0,7
London . . . . .	51 31 8	25	065,54	4129	+ 3	0,66
Arbury Hill . . . . .	52 12 55	225	069,00	4209	+21	0,7
Clifton . . . . .	53 27 43	104	072,79	4297	+10	0,68
Leith . . . . .	55 58 41	21	083,29	4539	+ 2	0,66
Portsoy . . . . .	57 40 59	29	089,96	4693	+ 4	0,6
Unst. . . . .	60 45 28	9	100,61	4939	+ 1	0,5

Gemeinsame Korrektion nach der  
weiterhin folgenden Ausgleichung: + 14.

Die Meereshöhe für *London* hat sich später, vergl. Nr. 6, genauer zu 28<sup>m</sup> ergeben; die Differenz von 3<sup>m</sup> mit dem oben angenommenen Werte hat aber auf die Reduktion keinen bemerkenswerten Einfluß.

Bei der Berechnung der 5. Kolumne aus der 4. wurde für *London*, Mr. *Brownes* Haus (Portland Place), einstweilen der Wert angesetzt, zu dem *Kater* mittelst des von ihm angegebenen Reversionspendels gelangte. Derselbe fand, *Phil. Transact.* 1819 p. 415 :

$$\mathfrak{L}_0 = 39,13929 \text{ Zoll engl.},$$

wobei die geogr. Breite nach der trigonometrischen Vermessung wie oben angegeben wird. Mit Rücksicht auf den (S. 86 angegebenen) Verwandlungslogarithmus von engl. Zollen in Meter:

$$8,4048298 - 10$$

folgt hieraus

$$\mathfrak{L}_0 = 0,9941289^m.$$

Gehört nun zu  $\mathfrak{L}_0$  die Schwingungszahl  $n_0$ , zu einem beliebigen  $\mathfrak{L}$  aber  $n$ , so ist zur Berechnung von  $\mathfrak{L}$  (vergl. S. 86) anzusetzen:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 \left( \frac{n}{n_0} \right)^2.$$

Der *Katersche* Wert von  $\mathfrak{L}_0$  kann übrigens nicht die Sicherheit neuerer absoluter Bestimmungen beanspruchen; jedenfalls würde er mit Rücksicht auf *Bailys* Versuche, *Phil. Transact.* 1832, einer Umrechnung wegen der Ungleichheit des Luftmitschwingens in beiden Pendellagen infolge der unsymmetrischen Form des Pendels bedürfen. Die Ausgleichung aller Beobachtungen ergab weiterhin für dieses  $\mathfrak{L}_0$  als Korrektion + 0,011<sup>mm</sup>, wovon aber ein Teil Maßstabsreduktion ist.

2. *Goldingham* 1820—21 mit einem *invar.* *Katerschen* Pendel an der Wand; *Phil. Transact.* 1822 p. 127—170. In *London* beobachtete vor der Absendung des Pendels *Kater* im Juli 1820 — ob auf der Achatplatte des Apparates oder seiner eigenen, ist nicht angegeben. Zwei große Reihen in *Madras* stimmen im Mittelwert auf 0,05 Schwingungen überein, aber es fehlt die Rückkehr des Pendels nach *London*.

Die Beobachtung in *Gaunsah Lout* ist später gemacht und nicht publiziert. Wir folgen bei der Angabe der Schwingungszahlen wie oben *Baily*; überhaupt gelten die zu der Aufstellung der vorigen Tabelle gegebenen Bemerkungen auch hier sowie weiterhin, wenn nichts Besonderes bemerkt ist.

1	2	3	4	5	6	7
Gaunsah Lout						
Westküste v. Sumatra	0 <sup>n</sup> 1' 49"	?	86173,36	0,991063	+ 0	.
Madras Observator.	13 4 9	8 <sup>m</sup>	179,06	1194	+ 1	0,66
London . . . . .	51 31 8	.	306,56	4129	+ 3	.

Gemeinsame Korrektion — 8.

Die Meereshöhe auf *Gaunsah Lout*, einem Eiland, ist mangels anderer Angabe zu null angenommen. Die gemeinsame Korrektion ist als Mittel der Korrektionen für *London* und *Madras* abgeleitet. Es wird nämlich nach der weiterhin folgenden Ausgleichung erhalten für *London* 0,994140, für *Madras* nach Nr. 19 0,991168; die Verbesserungen der Angaben der 5. Kolumne sind also bezw. + 11 und — 26, im Mittel — 8 Einheiten der 6. Decimalstelle.

3. *Hall*, unterstützt von *Foster*, 1820—23 mit einem invar. *Katerschen* Pendel an der Wand; *Phil. Transact.* 1823 p. 211—288. Die Beobachtungen begannen und endeten in *London*; wahrscheinlich infolge eines Unfalls auf *San Blas* differieren die Ergebnisse für *London* um 0,95 Schwingungen. Ob daselbst auf der Achatplatte des Apparats oder der des *Katerschen* Reversionspendels beobachtet wurde, ist nicht bemerkt. Je zwei in *San Blas* und *Rio* angestellte Reihen von *Hall* und *Foster* differieren um 1,15 bezw. 0,15 Schwingungen.

1	2	3	4	5	6	7
Galapagos . . . . .	+ 0 <sup>n</sup> 32' 19"	4 <sup>m</sup>	86107,64	0,991014	+ 0	0,66
San Blas de California	+ 21 32 24	35	131,87	1572	+ 4	0,6
Rio Janeiro . . . . .	— 22 55 22	22	137,96	1712	+ 2	0,6
London . . . . .	+ 51 31 8	.	242,87	4129	+ 3	

Gemeinsame Korrektion + 5.

4. *Brisbane* 1822 mit einem invar. *Katerschen* Pendel an der Wand; *Phil. Transact.* 1823 p. 308—325. In *London* beobachteten *Kater*, *Brisbane* und *Rümker* vor Absendung des Pendels; nachher ist dort nicht wieder beobachtet. In *Paris* beobachteten *Brisbane* und *Dunlop* je eine Reihe mit 0,65 Schwingungen Differenz. Welchen Wert *Baily* bei *Paramatta* für *F* annimmt, ist nicht zu ersehen — *Brisbane* reduziert überhaupt nicht aufs Meeresniveau; wir haben für





Die gemeinsame Korrektion bestimmt sich durch den Ausgleichungswert für *London*.

6. *Sabine* 1822—24 mit den beiden invar. *Katerschen* Pendeln Nr. 3 und 4; *An Account of Experiments to determine the Figure of the Earth*, 1825. *Sabine* beobachtete 1821 zuerst in *London*, Mr. *Brownes* Haus; dann 1822 auf den Südstationen *St. Thomas—New York*, wobei die *Katersche* Aufstellung an der Wand benutzt wurde. 1823 wurde zunächst wieder in *London* beobachtet, dann auf den Stationen des Polarkreises, wobei ein 200 Pfund schweres, gußeisernes Stativ von der Form eines gleichseitigen Dreiecks mit 6½ Fuß Seite in der Vorderansicht zur Aufhängung des Pendels diente. Die Uhr stand innerhalb des Stativs ganz isoliert auf einem Holzdreifuß. Zuletzt, 1823—24, wurde nochmals in *London* beobachtet. Die Differenz beider Pendel war in *London* 1821 11,25 Schwingungen; 1823 11,20 und 9,70; 1823—24 9,75; auf den Südstationen 9,39 bis 10,00, im Mittel 9,68; auf den Polarstationen 9,27 bis 9,74, im Mittel 9,51. Die größeren Differenzen in *London* 1821 und 1823 zu Anfang erklärten sich dadurch, daß in *London* mit *Katers* Achatplatte beobachtet worden war; als diejenigen des Apparats benutzt wurden, ging die Differenz 1823 auf 9,70 herab. Die Ergebnisse in *London* 1823 und 1823—24 stimmen für beide Pendel bis auf 0,1 Schwingungen überein. Die folgende Tabelle giebt wieder nach *Baily* die Schwingungszahlen, u. s. f., vergl. Nr. 1.

1	2	3	4	5	6	7
St. Thomas, Guineainseln . . . . .	+ 0° 24' 41"	6 <sup>m</sup>	86032,97	0,991120	+ 1	0,6
Maranham . . . . .	— 2 31 43	23	023,33	0898	+ 3	„
Ascension . . . . .	— 7 55 48	5	036,69	1205	+ 1	„
Sierra Leone . . . . .	+ 8 29 28	58	031,67	1090	+ 7	„
Trinidad . . . . .	+ 10 38 56	6	030,91	1072	+ 1	„
Bahia . . . . .	— 12 59 21	65	036,51	1201	+ 8	„
Jamaica . . . . .	+ 17 56 7	3	048,74	1483	+ 0	„
New York . . . . .	+ 40 42 43	20	121,94	3171	+ 2	„
London . . . . .	+ 51 31 8	28	163,48	4129	+ 3	„
Drontheim . . . . .	+ 63 25 54	37	202,31	5025	+ 4	„
Hammerfest . . . . .	+ 70 40 5	9	224,75	5543	+ 1	„
Grönland . . . . .	+ 74 32 19	10	234,31	5764	+ 1	„
Spitzbergen . . . . .	+ 79 49 58	6	246,80	6053	+ 1	„

Gemeinsame Korrektion + 14.

7. *Foster* 1824—25 mit dem Pendel Nr. 3 von *Sabine*; *Phil. Transact.* 1826 I p. 1—70. Es wurde mit dem Dreifuß beobachtet, der in *Greenwich* auf dem soliden Steinflur stand. Hier ist vor und nach der Reise beobachtet, mit 0,2 Schwingungen Differenz. Wir geben die Schwingungszahlen nach *Baily*, ohne diesem im Anschluß der Beobachtungen an die früher mit Pendel Nr. 3 erhaltenen zu folgen; denn da *Foster* neue Achatplatten anwandte, scheint uns ein Anschluß an die älteren Beobachtungen unzulässig.

1	2	3	4	5	6	7
Greenwich . . . . .	51° 28' 40"	55 <sup>m</sup>	86158,40	0,994119	+ 6	0,6
Port Bowen . . .	73 13 39	37	229,25	5754	+ 4	0,66
Gemeinsame Korrektion + 24.						

Die Höhe ist für *Greenwich* um 7<sup>m</sup> zu groß, vergl. Nr. 11 weiterhin; welchen Wert *Baily* angewandt hat, ist nicht zu ersehen. Jedenfalls ist der Einfluß unerheblich. Die gemeinsame Korrektion ergibt sich mit Rücksicht auf den Ausgleichungswert für *Greenwich*.

8. *Fallows* 1825—28 mit dem Pendel Nr. 4 von *Sabine*; *Phil. Transact.* 1830 p. 153—175. Im Juli und August 1825 beobachtete *Ronald* in *London*, November 1828 *Fallows* auf dem *Kap*; nachher ist nicht wieder in *London* beobachtet. Für *London* ist nach *Baily* das Mittel aus *Sabines* Angabe mit demselben Pendel und *Ronalds* Wert angesetzt; beide weichen übrigens nur 0,02 Schwingungen von einander ab. Auf dem *Kap* wurden 3 Reihen von 3 Beobachtern genommen; sie differieren um 0,15 Schwingungen im Maximum.

Die geogr. Breite für den Beobachtungsort nahe bei dem Observatorium auf dem *Kap* giebt *Fallows* vorläufig zu — 33° 55' 56" an; unter der Annahme, daß seit 1830 das Observatorium nicht verlegt ist, setzten wir daher die Breite desselben nach neueren Bestimmungen an. *F* ist bei *Baily* fürs *Kap* nicht angegeben; wir setzten dafür 0,66: sein Betrag hat nur geringen Einfluß.

1	2	3	4	5	6	7
Kap der guten Hoffnung . . . . .	— 33° 56' 3"	10 <sup>m</sup>	86101,64	0,992587	+ 1	0,66
London . . . . .	+ 51 31 8	.	168,50	4129	+ 3	.
Gemeinsame Korrektion + 2.						

9. *Sabine* 1827 mit den Pendeln Nr. 7 und 8; *Phil. Transact.* 1828 p. 35—77. Die Aufhängung erfolgte wie früher mittelst eines Dreifußes, in *Paris* im *Observatoire royal*, *Salle de la Méridienne*, wo auch *Biot* beobachtet hatte. Es wurde erst in *Paris*, dann in *London* beobachtet — nicht nochmals in *Paris*. Beide Pendel differieren im



Mittelwert um 0,05 Schwingungen, die 13 Einzelwerte für jedes Pendel bis zu 1 Schwingung. Wir geben die Schwingungszahlen nach *Baily*; mit welchen Meereshöhen und Koeffizienten  $F$  derselbe reduziert hat, ist nicht zu ersehen.

1	2	4	5
Paris . . . . .	48° 50' 14"	85930,86	0,993860
London . . .	51 31 8	85942,49	4129
Gemeinsame Korrektion + 17.			

10. *Sabine* 1828—29 mit dem Pendel Nr. 12; *Phil. Transact.* 1829 p. 83—102 und 1830 p. 239—255. Es wurde in *London* und *Greenwich*, dann nach Revision der Schneide wieder in *London* und *Greenwich*, sodann in *Altona* und endlich nochmals in *Greenwich* beobachtet. Die Beobachtung in *Altona* erfolgte an einem Wandkonsol mit besonderer Achatplatte, das später von *C. F. W. Peters* benutzt wurde (Nr. 21); über die Beobachtungsweise in *Greenwich* und *London* ist nichts mitgeteilt. Die wiederholten Beobachtungen stimmen im Endwert bis auf 0,22 Schwingungen. Wir geben die Schwingungszahlen nach *Baily* mit der Modifikation, daß wir seine Angaben S. 88—89 unter Nr. 9 und 10 für *Greenwich* und *London*, als wesentlich auf denselben Beobachtungen beruhend, zusammenfassen. Welche Werte der Meereshöhen und Koeffizienten  $F$  *Baily* zur Reduktion angewandt hat, ist auch hier nicht zu ersehen.

1	2	4	5
Greenwich	51° 28' 40"	85970,30	0,994145
London . . .	51 31 8	85969,59	4129
Altona . . .	53 32 45	85978,54	4336
Gemeinsame Korrektion + 5.			

11. *Foster* 1828—31, nach *Bailys* Bearbeitung in den *Memoirs of the Royal Astronom. Soc.* VII 1834 p. 81. Es wurden 2 invariable *Katersche* Pendel von Messing, Nr. 10 und 11, und 2 unsymmetrische *Katersche* Reversionspendel von Eisen bzw. Kupfer benutzt; in folgender Tabelle giebt die Zahl in Klammer hinter der Schwingungszahl, welche für *London* auf 86400 reduziert ist, die Anzahl der benutzten Schneiden, wobei die Reversionspendel als je 2 invariable behandelt sind. *Foster* benutzte für jedes Pendel stets dieselbe Achatplatte, deren beinahe jedes Pendel seine besondere hatte. Auch wandte er 2 breitbasierte Eisen-Stativ an, je eines für eine Pendel-Gruppe. Die Uhr hing an einem besonderen Holz-Stativ. *Foster* begann mit *London* und *Greenwich*; indessen wurde am ersteren Orte, *Mr. Brownes* Haus (51°31'8" Breite, 28<sup>m</sup> Höhe), nicht auf dem Stativ

beobachtet, sondern an der Wand, wo 1818 *Kater* mit dem Reversionspendel beobachtet hatte. Auch kamen daselbst nur 2 Pendel zur Anwendung. Die *Greenwicher* Beobachtungen sind nach *Baily* p. 45 nicht einwurfsfrei, vielleicht infolge eines Irrtums bei der Pendelaufhängung; dieselben sind daher besser nicht zu benutzen. Obwohl wir dies gethan haben, sind sie doch von uns wenigstens in nachfolgende Tabelle mit aufgenommen worden, weil die Differenz der beiden Pendel 103,08 Schwingungen vom Mittelwert der Differenz auf allen Stationen 103,44 nicht sehr abweicht. *Baily* beobachtete nach der Rückkehr der Apparate, da *Foster* auf der Reise verunglückte, nochmals in *London* in seinem Hause (51°31'26" Breite, 31<sup>m</sup> Höhe); die Ergebnisse stimmen bei den beiden vorher benutzten Pendeln auf 0,7 Schwingungen im Mittel. Im allgemeinen differieren die Pendel auf verschiedenen Stationen, *Baily* p. 71, bis zu 2,5 Schwingungen täglich.

Die geogr. Breite des *Kap d. g. H.* setzt *Baily* gleich — 33°54'37"; da aber im Observatorium beobachtet ist, nehmen wir — 33°56'3", vergl. Nr. 8.

1	2	3	4	5	6	7
Para . . . . .	— 1°27' 0"	12 <sup>m</sup>	86260,61 (6)	0,990924	+ 1	0,666
Maranham . . . . .	— 2 31 35	24	258,74 (4)	0881	+ 2	„
Fernando do Noronha	— 3 50 0	11	271,20 (2)	1167	+ 1	„
Ascension . . . . .	— 7 55 23	5	272,25 (6)	1192	+ 0	„
Porto Bello . . . . .	+ 9 32 30	4	272,01 (2)	1186	+ 0	„
Trinidad . . . . .	+ 10 38 55	6	267,24 (6)	1077	+ 1	„
St. Helena . . . . .	— 15 56 7	9	288,29 (4)	1560	+ 1	„
Kap d. g. H. . . . .	— 33 56 3	10	331,33 (6)	2549	+ 1	„
Montevideo . . . . .	— 34 54 26	4	334,36 (2)	2619	+ 0	„
[Greenwich] . . . . .	+ 51 28 40	48	398,90 (2)	[4104]	+ 5	„
London . . . . .	+ 51 31 17	30	400,00 (6)	4129	+ 3	„
Staten Island . . . . .	— 51 46 23	5	415,22 (6)	4479	+ 0	„
Kap Horn . . . . .	— 55 51 20	12	417,98 (2)	4543	+ 1	„
Süd Shetland Inseln	— 62 56 11	7	444,52 (6)	5154	+ 1	„

Gemeinsame Korrektion + 22.

12. *Lütke* 1826—29 mit *Halls* Pendel. Wir haben im Folgenden die Angaben von *Borenius*, vergl. die S. 87 angegebene Schrift, benutzt. Sie weichen etwas von denjenigen *Bailys* ab, entsprechen aber der neueren Angabe *Lütkes* im 3. Bd. der *Mémoires prés. à l'Académie imp. de St. Pétersbourg* 1837. In *Kandaluks* ist nicht von *Lütke*, sondern von *Reinecke* beobachtet. Die Schwingungszahlen sind so redu-

ziert, daß sie *Fosters* Angabe für *St. Helena* entsprechen; ebenso wurde von uns vorläufig  $\mathfrak{F}$  für diesen Ort adoptiert. Die geogr. Breite desselben ist nach *Baily* angesetzt. Die zur Reduktion aufs Meeresniveau angewandten Werte der Meereshöhe und von  $F$  sind uns nicht bekannt.

1	2	4	5
Ualan, Carolinen I..	+ 5° 21' 16"	86275,64	0,991269
Guam, Ladronen I..	+ 13 26 18	280,85	1389
St. Helena.....	- 15 54 59	288,29	1560
Bonin Insel.....	+ 27 4 9	322,10	2338
Valparaiso.....	- 33 2 30	328,44	2483
Greenwich.....	+ 51 28 40	399,25	4112
Petropawlowsk..	+ 53 0 59	408,87	4333
Sitka.....	+ 57 3 0	420,62	4604
Petersburg.....	+ 59 56 31	432,39	4875
Kandalaks.....	+ 67 7 43	452,55	5339

Gemeinsame Korrektion + 17.

13. *Parrot* 1829—33, mit einem 24 Zoll langen invar. Pendel auf einer Chalcedonplatte an der Wand; nach *Stebnitzki*, *Astronom. Nachr.* 1882 Bd. 103 Nr. 2472 S. 375, mitgeteilt. Diese Beobachtungen, welche *Baily* noch nicht zugänglich sein konnten, verdienen Vertrauen. In *Dorpat* wurde vor und nach der Reise beobachtet; wir haben das  $\mathfrak{F}$  für diesen Ort einstweilen nach *Sawitsch*, vergleiche Nr. 17<sup>a</sup> weiterhin, angesetzt.

Die Koefficienten  $F$  haben wir bei *Tiflis* und *Ararat* rückwärts aus den a. a. O. ebenfalls mitgeteilten Schwingungszahlen ohne Reduktion aufs Meeresniveau unter Voraussetzung der Benutzung von *Bouguers* Formel berechnet. Bei *Dorpat* ist  $F$  von uns zu 0,625 angenommen; hier scheint ein Druckfehler vorzuliegen, da die Reduktion aufs Meeresniveau hier nur im Betrage von + 0,25 anstatt + 0,50 Schwingungen eingeführt ist; dadurch entsteht 0,005<sup>mm</sup> Unsicherheit in  $\mathfrak{F}$  — wir haben die fürs Meeresniveau angegebene Zahl beibehalten.

1	2	3	4	5	6	7
Ararat, Kloster des heiligen Jakob .....	39° 46' 12"	1883 <sup>m</sup>	110819,67	0,992901	+ 225	0,62
Tiflis .....	41 41 27	435	834,38	3165	+ 56	0,59
Dorpat .....	58 22 51	47	921,47	4726	+ 6	0,625

Gemeinsame Korrektion + 21.

14. *Freycinet* 1817—20 mit 3 Pendeln, davon das eine (Nr. 3), wie invariable *Katersche*, mit flacher, zwei andere mit runder Stange; *Voyage autour du monde entrepris par l'ordre du Roi, Observations du Pendule, Paris* 1826 p. 29. Vergl. auch *Phil. Transact.* 1828 p. 38. Auf den *Falklandinseln* wurde nur 1 Pendel beobachtet. Nach *Baily* differieren die Unterschiede der Ergebnisse der 3 Pendel für die verschiedenen Stationen bis zu 6,5 Schwingungen täglich; doch meint er, daß die Anwendung der 3 Pendel die Fehler eliminiere. Er reduziert soweit nötig; für die *Falklandinseln* ist die Reduktion wegen der runden Form der Pendelstange etwas zweifelhaft. Hierauf kommt jedoch wegen der Unsicherheit der Messungen wenig an, ebenso wie auf den Umstand, daß uns die im Original angegebenen Meereshöhen und Koeffizienten *F* fehlen. Für *Paris* haben wir  $\mathfrak{F}$  vorläufig nach *Sabine*, Nr. 9, angesetzt.

1	2	4	5
Rawak . . . . .	— 0° 1' 34"	86279,35	0,990948
Guam . . . . .	+ 13 27 51	300,86	1442
Isle de France Port Louis	— 20 9 56	315,97	1790
Mauwi Sandw. I. . . . .	+ 20 52 7	315,41	1776
Rio Janeiro . . . . .	— 22 55 13	311,39	1684
Port Jackson . . . . .	— 33 51 34	351,96	2617
Kap d. g. II. . . . .	— 33 55 15	349,48	2560
Paris . . . . .	+ 48 50 14	406,00	3860
Falkland Inseln French Bay	— 51 35 18	414,64	4059
Gemeinsame Korrektion + 18.			

15. *Duperrey* 1822—25 mit *Freycinets* Pendeln Nr. 1 und 3; publiziert (nach Angabe *Bailys*) in den *Connaissance des temps* 1830. Auf *Ascension* und *Isle de France* schwang nur Nr. 3. Nach *Baily* differieren die Unterschiede der Pendelergebnisse bis zu 2,0 Schwingungen. Für *Paris* haben wir  $\mathfrak{F}$  vorläufig nach *Sabine* angesetzt; Angaben für Meereshöhe und Koeffizient *F* fehlen uns.

1	2	4	5
Ascension . . . . .	— 7° 55' 48"	90132,96	0,991182
Isle de France . . . . .	— 20 9 23	159,63	1768
Port Jackson . . . . .	— 33 51 40	196,55	2581
Toulon . . . . .	+ 43 7 20	232,31	3368
Paris . . . . .	+ 48 50 14	254,65	3860
Falkland Inseln st. Louis	— 51 31 44	266,44	4120
Gemeinsame Korrektion + 34.			

16. *Biot* u. *Mathieu* 1808—24 (?) mit einem Decimalsekundenpendel. Wir entlehnen aus *Biot, Mémoire sur la Figure de la Terre* (*Mémoires de l'Ac. royale des Sciences de l'Institut de France* t. 8 1829), da *Baily* diese Messungen nicht aufführt. Die Angaben bei *Biot* (im Folgenden, Kolumne 6) sind nur mit  $2H : R$  aufs Meeresniveau reduziert; wir haben daher (in der 5. Kolumne) auch die Werte nach *Bouguers* Formel mit  $F = \frac{5}{8}$  beigelegt. Inwieweit vorstehende Werte sonst reduziert sind, ist nicht angegeben. Die Unterschiede in den geogr. Breiten mit den Angaben von *Kater* unter Nr. 1 für *Unst* und *Leith* sind wohl nicht ganz reell.

1	2	3	5	6	7
Lipari . . . . .	38° 28' 37"	9 <sup>m</sup>	0,993078	0,993079	0,625
Formentera . . . . .	38 39 56	203	3046	3070	„
Barcelona . . . . .	41 23 15	4	3232	3232	„
Figeac . . . . .	44 36 45	223	3432	3458	„
Bordeaux . . . . .	44 50 26	17	3451	3453	„
Fiume . . . . .	45 19 0	65	3576	3584	„
Padua . . . . .	45 24 3	31	3604	3607	„
Mailand . . . . .	45 28 1	150	3530	3548	„
Clermont-Ferrand .	45 46 48	406	3535	3582	„
Paris . . . . .	48 50 14	70	3859	3867	„
Dünkirchen . . . . .	51 2 10	4	4080	4080	„
Leith . . . . .	55 58 37	21	4529	4531	„
Unst . . . . .	60 45 25	9	4945	4946	„

Gemeinsame Korrektion + 19.

*Bessel* hat in seiner Abhandlung über die *Länge des Sekundenpendels in Königsberg* (*Abh. der Berl. Ak.* 1826; Werke Bd. 3 S. 164) die Beobachtungen von *Biot*, *Arago* und *Humboldt* in *Greenwich* 1817—18 und in *Paris* (vor- und nachher) mit 2 unveränderlichen Pendeln, die nahezu Sexagesimalsekunden schwangen, reduziert. Man vergl. auch *Biot et Arago, Recueil d'Observations géod.* 1821, sowie *Walker, Account of the pendulum operations* (der genaue Titel dieses engl. indischen Pendel-Werkes folgt unter Nr. 19) App. 2 p. 32. Nach *Sabine, Phil. Transact.* 1828 p. 35, zeigten allerdings die Beobachtungen keine gute Übereinstimmung; immerhin scheint uns die Bestimmung vergleichsweise nicht ohne Wert, da beide Pendel die Differenz *Paris-Greenwich* bis auf 0,000034<sup>m</sup> übereinstimmend geben.

Setzt man die Schwere in *Paris* gleich 1, so wird sie darnach in *Greenwich* gleich 1,0002523; hierbei fehlt die Reduktion aufs Meeresniveau. Nimmt man  $\mathfrak{L}$  für *Greenwich* gleich 0,994145, so wird es für

Paris 0,993894; nimmt man ferner die *Bouguersche* Reduktion für beide Orte bezw. gleich  $+11$  und  $+16$  Einh. der 6. Stelle, so folgt

1	2	3
Paris . . . . .	48° 50' 14"	0,993899
Greenwich	51 28 40	4145
Gemeinsame Korrektion — 10.		

§ 26. Neuere Pendelbeobachtungen und absolute Bestimmungen. Um den Einfluß der Luft vollständiger zu eliminieren, als es bei Anwendung invariabler Pendel oder auch unsymmetrischer *Katerscher* Reversionspendel möglich ist, wurden in neuerer Zeit die relativen Schwerebeobachtungen mit invariablen Pendeln im Vacuum (nach *Airys* Vorschlag) oder mit symmetrischen Reversionspendeln (nach *Bessel*, *Astronom. Nachr.* 1850 Bd. 30 Nr. 697 S. 1) ausgeführt. Leider hat sich herausgestellt, daß im letzteren Falle die Stative mehrfach derjenigen Festigkeit und breiten Basis, sowie hinreichend soliden Untergrundes ermangelten, wie zu einwurfsfreien Beobachtungen nötig. Wenn auch diese Fehlerursache bei den relativen Beobachtungen größtenteils unschädlich bleibt, so besitzen doch infolge dessen nicht alle neueren Messungen eine im Vergleich zu den älteren Bestimmungen erhöhte Genauigkeit, wie man gehofft hatte. Denn bei letzteren wurde an der Wand beobachtet oder es kam ein sehr festes breites Stativ zur Anwendung. (Von der Solidität des *Sabineschen* Stativs haben sich weitere Kreise auf der *Loan Collection* in London 1876 durch Augenschein überzeugt; vergl. auch den *Bericht über die wissenschaftlichen Apparate auf der Londoner internationalen Ausstellung* von 1876 S. 190).

Das Mitschwingen des Stativs bei den neueren Reversionspendeln konstatierte *C. S. Peirce* für seinen Apparat gelegentlich seiner Beobachtungen in *Berlin* 1875, wobei er abwechselnd das Pendel an der Wand und auf dem Stativ schwingen liefs\*). Weitere Untersuchungen von *E. Plantamour* zeigten, daß auch das Fundament des Stativs von Einfluß ist. Für das  $\frac{3}{4}$ -Sekunden-Reversionspendel der *Schweiz* von *Repsold* ist darnach wegen des Mitschwingens eine Korrektion nötig von

$$+0,1724^{mm} = 0,0764 \text{ par. Lin. für festes Holzfundament,}$$

$$+0,1302 \text{ bis } +0,1357^{mm} = 0,0577 \text{ bis } 0,0602 \text{ par. Lin. für Steinfundament.}$$

\*) Nach einer Bemerkung von *C. Brühns* in den *Verhandlungen der perm. Kommission der europ. Gradmessung zu Brüssel* 1876 (publ. 1877) S. 48. Vergl. auch die *Verhandl. der allgemeinen Konferenz zu Stuttgart* 1877 (publ. 1878) S. 22 u. Annex Ib S. 171.

Hieraus erkennt man, daß ohne Beachtung des Untergrundes eine Unsicherheit von mehreren Hundertelmillimetern entstehen kann\*).

17<sup>a</sup>. Sawitsch, Lenz und Smyslof 1865—68 mit zwei Repsold'schen  $\frac{3}{4}$ -Sekunden-Reversionspendeln auf Stahlplatten; *Memoirs of the Royal Astronomical Society* 1870—71 vol. 39. Vergl. auch *Vierteljahrsschrift der Astronom. Ges.* 1874 Bd. 9 S. 44 und *Clarke, Geodesy* p. 343.

1	2	3	4	5	6	7
Ismail . . . . .	45° 20' 34"	30"	440,4479	0,993534	+	4 0,625
Kischinef. . . . .	47 1 30	92	5278	3714	+	11 „
Kamenetz . . . . .	48 40 39	178	5844	3842	+	21 „
Kremenetz . . . . .	50 6 8	297	6533	3997	+	35 „
Bélin . . . . .	52 2 22	141	7268	4163	+	16 „
Wilna . . . . .	54 41 2	101	8353	4408	+	12 „
Jakobstadt . . . . .	56 30 3	83	8900	4531	+	10 „
Dorpat . . . . .	58 22 47	68	9762	4726	+	8 „
Reval . . . . .	59 26 37	3	441,0190	4820	+	0 „
St. Petersburg . . . . .	59 56 30	8	0319	4852	+	1 „
Nicolaistadt . . . . .	63 5 33	14	1293	5071	+	2 „
Tornéa . . . . .	65 50 43	4	2525	5349	+	0 „

Gemeinsame Korrektion + 16.

Die 4. Kolumne giebt die ursprünglich beobachteten Werte der Länge des Sekundenpendels in par. Linien um eine Konstante nach *Lütke's* Beobachtung (vergl. im vorigen Paragraphen Nr. 12) derartig vermehrt, daß sich die Zahlen den von *Kater* und *Sabine* erhaltenen Längen einreihen. Für uns ist der Betrag dieser Konstanten gleichgültig, da *Sawitsch* auf grund späterer Messungen eine zweite Korrektion angebracht hat. Es wurden nämlich von *Zinger* in *Pulkowa* und von *Heaviside* in *Kew* mit dem Apparat die Pendellängen gemessen und die Konstanten des Apparats Neubestimmt. Folgendes Täfelchen giebt diese Pendellängen in par. Lin. und Metern sowie die früher ermittelte Länge für *Petersburg*, welche nach der älteren Berechnung 440,958 par. Lin. gegeben hatte, neu berechnet; *Memoirs of the Royal Astronom. Soc.* 1877—79 Bd. 44 (publ. 1879) S. 307—315.

\*) *Verhandlungen der perm. Kommission zu Hamburg* 1878 (publ. 1879) S. 9; ausführlich in der Abh.: *Recherches expérimentales sur le mouvement simultané d'un pendule et de ces supports* par *E. Plantamour* am Schlusse der Publikation über die *Verhandl. der allgem. Konf. zu Stuttgart* 1877 S. 51.



1	2	3	4	5	6	7
Kew .....	51° 28' 6"	.	440,6405	0,994156	.	.
Pulkowa .....	59 46 19	75 <sup>m</sup>	9428	4838	+ 9	0,625
Petersburg .....	59 56 30	8	9488	4852	+ 1	„

Gemeinsame Korrektion + 16.

Für das 1. Täfelchen haben wir mit Rücksicht auf die Neuberechnung für *Petersburg* die 5. Kolumne aus der 4. durch Verwandlung der par. Lin. in Meter mit dem Logarithmus 7,3533062 — 10 und unter Beifügung von — 0,041<sup>mm</sup> konstanter Korrektion ermittelt. Dieselbe berücksichtigt auch das Mitschwingen des Stativs, welches im Mittel für beide Pendel nach *Kuhlbergs* Untersuchung, *Astronom. Nachr.* 1882 Bd. 101 Nr. 2416 S. 243, eine Korrektion von + 0,0650 par. Lin. erfordert. Bei der 2. Tabelle ist diese Korrektion an den Angaben der 4. Kolumne beim Übergang zur 5. angebracht worden. Wegen mangelnder Berücksichtigung des Untergrundes haften vielleicht an einzelnen Werten  $\mathfrak{f}$  noch Fehler bis zu + 0,040<sup>mm</sup>, da nicht überall dieselben Verhältnisse wie bei den Versuchen von *Kuhlberg* stattfanden, der in der Regel auf Steinpfeilern beobachtete und vermutlich auch dafür die Korrektion bezüglich des Mitschwingens bestimmt hat\*).

In Bezug auf die erlangte Genauigkeit ist noch Folgendes zu bemerken: die Bestimmungen haben nach der Anordnung der Beobachtungen mit Rücksicht auf alle Korrektionen die Bedeutung von absoluten Messungen. In *Kew*, wo 1873—74 *Heaviside* beobachtete, führten beide Pendel bis auf 0,0004 Zoll engl. zu demselben Werte, und der hieraus unter Beifügung der Korrektion für das Mitschwingen des Stativs berechnete, oben angegebene Wert\*\*) stimmt mit einem weiterhin unter Nr. 19 aufgeführten, absoluten Werte, der mittelst eines anderen Apparats erhalten worden ist, auf 0,006<sup>mm</sup>. Diese Differenz erscheint für zwei wesentlich verschiedene absolute Bestimmungen ganz unerheblich, wenn man beachtet, daß *Sawitsch* nach

\*) Hr. *Sawitsch* korrigiert in der 2. Abhandlung mit dem *Plantamourschen* Wert der Korrektion gleich 0,0765 par. Lin. Auf briefliche Anfrage erteilte aber derselbe seine Zustimmung zur Anwendung des inzwischen bekannt gewordenen *Kuhlbergschen* Wertes. Bei dieser Gelegenheit wurden wir freundlichst in Kenntnis gesetzt über die Meereshöhen der Stationen und den Betrag des Koeffizienten  $F' = \frac{1}{2} \dots$

\*\*) Nach S. 258 des in Nr. 19 zu erwähnenden engl. indischen Pendel Werkes ist die Pendellänge für *Kew* nach denselben Beobachtungen zu 39,1345 Zoll engl., d. i. mit den Verwandlungslogarithmen 8,4048298 — 10 auf Meter und weiter mit 2,6166938 auf par. Lin. gleich 440,6391 par. Lin., anstatt 440,6405 wie oben, angegeben. Die geringe Differenz haben wir weiter nicht beachtet.

S. 262 des engl. indischen Pendel-Werkes in *Petersburg* zwischen seinen beiden Pendeln sogar 0,018 par. Lin. Differenz hatte.

S. 299 des ebengenannten Werkes wird als Endresultat zahlreicher Untersuchungen des russischen Apparates in England und Indien hervorgehoben, daß er entschieden den invariablen Pendeln mit festen Schneiden und soliderer Aufstellung nachstehe\*). Selbst in der Anwendung mit festgestellten Schneiden und Achatplatten zeigte sich der russische Apparat den invariablen Pendeln nachstehend, wie dies folgende Zusammenstellung von Bestimmungen nach S. 298 a. a. O. zeigt, wobei für alle Pendel in *Kew* die Länge des Sekundenpendels zu 39,1401 Zoll engl. angenommen ist:

	Invar. Pendel		Russische Pendel	
	Nr. 4	Nr. 1821	Nr. 1	Nr. 2
Ismailia	39,0644	39,0646	39,0660	39,0655
Aden	0243	0243	0241	0246
Colaba	0367	0366	0366	—
Kaliana	0584	0585	0608	0546.

17<sup>b</sup>. *Kuhlberg* 1879—80 mit denselben beiden Pendeln wie vorher; *Astronom. Nachr.* 1881 Bd. 99 Nr. 2370 S. 281. Die Schneiden sind während der ganzen Beobachtungsreihe in derselben Lage belassen, wie bei den letzten Beobachtungen von *Heaviside* in *Kew* (vergl. auch S. 200—242 des engl. ind. Pendel-Werkes). Um die Resultate denen unter Nr. 17<sup>a</sup> anreihen zu können, ist eine Korrektur angebracht, weshalb wir die Beobachtungen der Tüfelchen von 17<sup>a</sup> und 17<sup>b</sup> als eine Reihe ansehen dürfen.

1	2	3	4	5	6	7
Jelisabethpol ...	40° 40' 53"	427 <sup>m</sup>	440,1714	0,993098	+ 50	0,625
Batum .....	41 39 28	2	2522	3280	+ 0	„
Tiflis .....	41 41 29	435	2126	3179	+ 56	0,59
Dnschett .....	42 4 49	846	1368	3062	+ 100	0,625
Gudaur .....	42 29 17	2247	1476	3087	+ 265	„
Wladikawkas ...	43 1 59	693	2629	3305	+ 82	„

Gemeinsame Korrektur + 16.

Die Korrektur wegen des Mitschwingens des Stativs ist auch hier beim Übergang von der 4. zur 5. Kolumne berücksichtigt. Wäh-

\*) Der Umstand, daß die Schneiden für den Zweck absoluter Bestimmungen nicht ganz fest angebracht worden sind, veranlaßte wahrscheinlich auch bei Versuchen zu *Kaliana* einen Fehler von 0,01 Zoll engl. in dem Ergebnis mit einem der beiden russischen Pendel.

rend *Kuhlberg* sich noch der *Plantamourschen* Werte bedient:  $+0,0577$  par. Lin. im allgemeinen,  $+0,0764$  für *Gudaur* und *Duschett*, wo das Stativ auf Holzboden stand, haben wir die neuere, oben erwähnte *Kuhlbergsche* Bestimmung benutzt und demgemäß im allgemeinen  $+0,0650$  par. Lin. angewandt, wie auch für *Tiflis*, wo *Stebnitzki* beobachtete, bei anderer Gelegenheit geschieht.\*) Für *Gudaur* und *Duschett* haben wir die Korrektur auf  $+0,0837$  erhöht, um dem Holzboden Rechnung zu tragen. Einige Unsicherheit ist bei diesen Korrekturen allerdings nicht zu umgehen.

18. *Albrecht* 1869 — 70 mit einem *Repsoldschen* Sekunden-Reversionspendel; *Publikationen des kön. preuss. geod. Instituts, astronom. geodät. Arbeiten* 1870 und 1872, 1869 und 1867 (publ. 1871 und 1874); vergl. auch *A. Fischer, Astronom. Nachr.* 1876 Bd. 88 Nr. 2094 S. 84. Die 4. Kolumne des folgenden Täfelchens zeigt die Beobachtungsergebnisse in Metern ohne Rücksicht auf das Mitschwingen des Stativs; beim Übergang zur 5. Kolumne ist deshalb die Korrektur  $+0,0001820^m$  angebracht, die so bemessen ist, daß für *Berlin* sich *Bessels*  $\mathfrak{k}$  ergibt. Wegen der Unmöglichkeit, den Untergrund zu berücksichtigen, entsteht auch hier eine nicht geringe Unsicherheit.

1	2	3	4	5	6	7
Mannheim . . . . .	49° 29' 11"	125 <sup>m</sup>	0,9937207	0,993903	+ 8	0,732
Bonn . . . . .	50 43 45	62	38869	4069	+ 5	„
Inselsberg . . . . .	50 51 11	910	38926	4075	+ 77	„
Seeberg . . . . .	50 56 6	353	38835	4066	+ 30	„
Gotha . . . . .	50 56 38	315	38036	3986	+ 27	„
Leyden . . . . .	52 9 20	0	40252	4207	+ 0	„
Berlin . . . . .	52 30 17	36	40498	4232	+ 3	„

Gemeinsame Korrektur  $+3$ .

Die gemeinsame Korrektur ist mit Rücksicht auf den Ausgleichungswert für *Berlin* angesetzt. Bezüglich *Mannheims* muß bemerkt werden, daß die Erdschicht daselbst nur  $100^m$  dick ist,  $25^m$

\*) *Astronom. Nachr.* 1882 Bd. 103 Nr. 2472 S. 375. Allerdings folgt mit  $+0,0650$  für *Tiflis* 440,2776 anstatt 440,2792, wie daselbst angegeben ist. Die kleine Differenz haben wir ebensowenig beachtet, wie die in der Breite, deren Sekunden daselbst zu 31 notiert sind. Dagegen haben wir im obigen Täfelchen *Tiflis* mit den im vorigen Paragraphen unter Nr. 13 gegebenen, neueren Daten reduziert (mit den *Kuhlbergschen* Daten  $H = 471^m$ ,  $J' = 0,625$  wurde  $\mathfrak{k} = 0,993191$ ).

der angegebenen Höhe kommen auf einen Turm. Bei *Inselberg* ist in der Publ. 1874 S. 225 bei der Reduktion aufs Meeresniveau für 1800 par. Fuß der Höhe eine parabolische Bergkuppe gesetzt, dabei aber eine falsche Reduktionsformel angewandt. Indessen ist der entstehende Fehler wegen der geringen Abweichung vom ebenen Terrain unerheblich (etwa  $0,002^m$ ) und innerhalb der Grenzen der Unsicherheit der Reduktion überhaupt enthalten.

19. *Basevi* und *Heaviside* 1864—74 mit 2 invariablen Pendeln (davon eines das Pendel Nr. 4 von *Sabine*) im Vacuum auf Achatplatten an festen großen Holzstativen; *Account of the operations of the great trigonometrical survey of India*, vol. V: *Details of the pendulum operations*, Calcutta 1879. Die Stationen bilden z. T. eine Reihe von 2 zu 2 Grad Breitendifferenz auf dem mittleren Meridian *Vorderindiens*, z. T. sind es Küstenstationen. In *Madras* ist in demselben Observatorium beobachtet, wo *Goldingham* die Länge des Sekundenpendels ermittelte. Der Unterschied der täglichen Schwingungszahl beider Pendel schwankt nach S. 133 a. a. O. von 49,69 bis 50,91; die in *Kew* 1864 und 1873 erhaltenen Schwingungszahlen differieren für das eine Pendel um 0,1, fürs andere um 0,5 Schwingungen. Ebenso günstig ist die Übereinstimmung bei wiederholten Beobachtungen in *Kaliana* 1866, 70 und 73.

*Heaviside* bestimmte 1873 mittelst *Katers* renoviertem Reversionspendel für *Kew* die absolute Länge des Sekundenpendels zu

$$39,14008 \text{ Zoll engl.} = 0,994150^m$$

(a. a. O. S. 293). Diese Zahl ist in der 5. Kolumne des folgenden Tableaus eingeführt, vergl. a. a. O. S. 133.

Die Kolumne 4\* giebt die Anziehung des Terrains nach dem 2. Gliede von *Bouquers* Formel mit  $F = 0,625$  in Schwingungen; in einigen Fällen ist darunter die unregelmäßige Terrainanziehung bemerkt. Diese dem Original entlehnten Angaben übersetzt die 6. Kolumne in Metermaß.

1	2	3	4	4*	5	6
Punnae . . . . .	8° 9' 28"	15"	85982,88	+ 0,07	0,991005	+ 2
Kūdankolam . . .	8 10 21	51	85982,99	+ 0,26	0,991008	+ 6
Minicoy . . . . .	8 17 1	2	85987,02	+ 0,01	0,991101	+ 0
Mallapatti . . . . .	9 28 45	88	85983,34	+ 0,44	0,991016	+ 10
Alleppy . . . . .	9 29 39	2	85985,90	+ 0,01	0,991075	+ 0
Pachapaliam . . .	10 59 40	296	85984,77	+ 1,50	0,991049	+ 35
Aden . . . . .	12 46 53	2	85991,68	+ 0,01	0,991208	+ 0
Mangalore . . . . .	12 51 37	2	85988,89	+ 0,01	0,991144	+ 0

1	2	3	4	4*	5	6
Bangalore, Süd.	13° 0' 41"	950 <sup>m</sup>	85986,47	+ 4,83	0,991088	+ 111
Bangalore, Nord	13 4 56	917	85987,08	+ 4,66	0,991102	+ 107
Madras . . . . .	13 4 8	8	85989,10	+ 0,04	0,991149	+ 1
Namthábád . . . .	15 5 52	358	85990,71	+ 1,82	0,991186	+ 42
Cocanáda . . . . .	16 56 21	3	85998,25	+ 0,02	0,991360	+ 0
Kodangal . . . . .	17 7 57	584	85995,91	+ 2,96	0,991306	+ 68
Damargida . . . .	18 3 17	593	85996,03	+ 3,01	0,991309	+ 69
Colaba(Bombay)	18 53 46	11	86005,28	+ 0,05	0,991522	+ 1
Somtana . . . . .	19 5 0	522	86000,69	+ 2,66 — 0,04	0,991416	+ 60
Badgaon . . . . .	20 44 23	342	86005,13	+ 1,73	0,991518	+ 40
Calcutta . . . . .	22 32 55	6	86012,73	+ 0,03	0,991693	+ 1
Ahmadpúr . . . . .	23 36 21	516	86012,62	+ 2,62 — 0,07	0,991691	+ 59
Kaliánpúr . . . . .	24 7 11	538	86014,87	+ 2,73	0,991743	+ 63
Pahárgarh . . . . .	24 56 7	500	86015,30	+ 2,54	0,991752	+ 58
Usira . . . . .	26 57 6	247	86023,50	+ 1,25 — 0,11	0,991942	+ 26
Datairi . . . . .	28 44 5	218	86028,57	+ 1,11	0,992059	+ 26
Kaliána . . . . .	29 30 55	247	86029,33	+ 1,25	0,992077	+ 29
Nojli . . . . .	29 53 28	269	86029,87	+ 1,36	0,992089	+ 31
Dehra . . . . .	30 19 29	683	86026,89	+ 3,47 — 0,29	0,992020	+ 73
Mussoorie . . . . .	30 27 41	2109	86030,47	+ 10,72 — 1,17	0,992103	+ 220
Ismailia . . . . .	30 35 55	10	86036,01	+ 0,05	0,992230	+ 1
Meean Meer . . . .	31 31 37	215	86036,36	+ 1,09	0,992238	+ 25
More . . . . .	33 15 39	4696	86024,48	+ 23,86 — 0,41	0,991965	+ 540
Kew . . . . .	51 28 6	5	86119,19	+ 0,02	0,994150	+ 0

Gemeinsame Korrektion + 19.

Die gemeinsame Korrektion ist nach Maßgabe des Ausgleichungswertes für *Kew* angesetzt.

20. *Bessel, Schumacher, C. F. W. Peters* mit *Bessels* Faden-Pendelapparat. Derselbe wurde von *Bessel* in *Königsberg* und *Berlin*, von *Schumacher* in *Güldenstein* angewandt; *Peters* wiederholte nach Ablauf von 4 Decennien die Beobachtungen in *Königsberg* und *Berlin* auf Anordnung des Präsidenten des kön. preuß. geodät. Instituts, *Baeyer*, um die Unveränderlichkeit der dem Apparat beigegebenen Toise zu prüfen. Die Enden derselben sind allerdings nicht völlig unbeschädigt





achtete *Peirce* nach *E. Plantamour* und *Cellerier* noch nicht genügend die Verschiedenheit des Fundaments\*), und es besteht hinsichtlich des Metermafsstabes eine geringe Unsicherheit. Die Differenz mit *Bessel* für *Berlin* ist z. T. dem Umstande zuzuschreiben, daß das Meter jetzt um etwa  $0,008^{mm}$  kleiner definiert ist, als gesetzlich aus der Toise (*Annual Report upon the Surveys of northern and northwestern lakes in charge of C. B. Comstock* 1881 p. 2788).

1	2	3	4	5	6	7
Hoboken . . . . .	40° 44' 31"	9 <sup>m</sup>	0,9932074	0,993207	+ 1	0,74
Paris . . . . .	48 50 14	70	39500	3950	+ 5	„
Kew . . . . .	51 28 6	6	41790	4179	+ 0	„
Berlin . . . . .	52 30 16	35	42482	4248	+ 3	„

Gemeinsame Korrektion — 13.

In vorstehender Tabelle ist die 5. Kolumne lediglich eine Abkürzung der vierten. Die Meereshöhe für *Hoboken* haben wir rückwärts aus den Originalangaben für die Länge des Sekundenpendels ohne Reduktion berechnet und dabei  $F$  so angenommen, daß damit für *Paris*, *Kew* und *Berlin* die bekannten Werte von  $H$  herauskamen. Auch die geogr. Breite für *Hoboken* ist rückwärts berechnet aus den Angaben von *Peirce* für die Reduktion auf den Äquator; sie ist auf 2'' sicher.

§ 27. Zusammenstellung von Bestimmungen am gleichen oder nahezugleichen Orte. Nachstehende Tabelle giebt für diese Bestimmungen diejenigen vier Decimalstellen der Längen  $\mathfrak{L}$  des Sekundenpendels, welche hinter 0,99 folgen. In den Fällen, wo die geogr. Breite gleichnamiger Stationen bei verschiedenen Beobachtern verschieden ist, wurde mit  $+0,000001.5 \sin 2B \triangle B$ , für  $\triangle B$  in Minuten, auf die angegebene Breite reduziert. Diese Reduktion entspricht der Variation  $0,0053 \mathfrak{L} \sin^2 B$  in  $\mathfrak{L}$ . Während *New York* und *Hoboken* bei 4<sup>km</sup> Distanz mit Rücksicht auf diese Reduktion noch als eine Station betrachtet werden durften, ist dies bei *Kew*, *London* und *Greenwich* nicht geschehen, da hier die Distanzen successive 2 und 1 geogr. Meile betragen. Die gleichnamigen Stationen *Falklandinseln* bei *Freycinet* und *Duperry* sind bei 1 Meile Abstand wegen sehr verschiedener orographischer Verhältnisse als verschiedene Stationen aufgefaßt; ebenso *Guam* bei *Lütke* und *Freycinet* wegen 3 Meilen Abstand. Diese Stationen brauchten in der Tabelle gar nicht aufgeführt zu werden.

\*) *Verhandlungen der allgem. Konferenz der europ. Gradmessung zu München* 1880 (publ. 1881) S. 6 Annex IIa, Bericht über die Pendelbeobachtungen.



	Martinique — 2° 31' 39"	Ascension — 7° 55' 36"	Trinidad + 10° 36' 66"	[Madras] + 13° 4' 8"	St. Helena — 16° 56' 7"	Ile de France — 20° 9' 40"	Bio Janeiro — 22° 55' 17"	Port Jackson — 35° 51' 37"	Kap d. G. H. — 35° 56' 3"	Hoboken + 40° 44' 31"	Wien + 41° 41' 28"	Paris 48° 50' 14"	Kew 51° 28' 6"	Greenwich 51° 28' 40"	London 51° 31' 8"	Berlin 52° 30' 16"	Altona 53° 32' 46"	Güldenstern 54° 13' 9"	Königsberg 54° 42' 50"	Leith 55° 58' 39"	Dorpat 58° 22' 49"	Petersburg 59° 56' 30"	Ums 60° 46' 27"
1. Kater.....															4129				4539				4939
2. [Goldingham]				[1194]											[4129]								
3. Hall .....						1712									4129								
6. Sabine.....	0398	1205	1072							3174					4129								
8. Fallows .....									2587						4139								
9. Sabine.....												3860			4129								
10. Sabine.....														4145	4129	4386							
11. Foster.....	0381	1192	1077		1560				2549					[4104]	4129								
12. Lütke .....					1561									4112								4875	
13. Parrot .....											3166										4726		
14. Freycinet .....						1790	1634	2617	2681			3860											
15. Duperrey .....		1192				1766		258				3860											
16. Biot.....												3859								4529			4946
— Biot, Arago u. Humboldt.....														4145									
17. Sawitsch und Kuhberg .....												3899									4726	4852	
19. [Basevi und Heavside] .....				[1149]							3179		4156										
20. Bessel und Schumacher .....													[4150]										
— Peters .....																4282		4386	4410				
21. Peters .....																		4374	4436				
22. Peirce .....																4282	4347		4452				
										3207		[3950]	4179			4248							

Als besonders brauchbar sind zu nennen die Reihen 1, 3, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 19 und 21. Die Genauigkeit beeinträchtigende Momente liegen vor bei Reihe 2, *Goldingham*: das Pendel ist nach der weiten Seereise nicht zurückgekehrt;

14, *Freycinet*: grofse Differenzen, gemildert durch Anwendung von 3 Pendeln;

15, *Duperry*: ziemlich grofse Differenzen, zwar kleiner als bei *Freycinet*, aber auch nur 2 Pendel;

17, *Sawitsch* u. *Kuhlberg* } nicht völlig befriedigende Berücksichtigung des Untergrunds; Schneiden nicht  
22, *Peirce* } absolut fest;

20, *Bessel*, *Schumacher* u. *Peters*: absolute Bestimmung.

Über 12 und 16 sind uns nähere Umstände nicht bekannt.

Für die Ausgleichung der Ergebnisse gemeinsamer Stationen wurde noch Folgendes erwogen: Aus den Reihen 6, 10, 21 und 22 gelangt man mit *London* = 0,994129 auf 2 Wegen zu *Kew*, und zwar findet sich *Kew* = 0,994146 und 52, im Mittel 0,994149, was mit den Werten für *Kew* in Reihe 17 und 19 leidlich paßt. Nun sieht man aber, daß die Reihen 2 und 19 nicht harmonieren, sondern für *Madras* stark von einander abweichen. Mit Rücksicht auf obige Bemerkung zu Reihe 2 wurde daher ihre Angabe für *Madras* als in der Ausgleichung nicht stimmfähig weggelassen, womit die Reihen 2 und 19 überhaupt aus der Ausgleichung herausfielen. Ausgeschlossen wurde auch der Wert für *Paris* nach 22; derselbe wird nämlich, wenn *Kew* = 0,994150 gesetzt wird, gleich 0,993921, was mit den älteren Bestimmungen ganz und gar nicht stimmt und vielleicht auf die gerade bei *Paris* zweifelhafte Berücksichtigung des Untergrunds in Reihe 22 zurückzuführen ist.

§ 28. Ausgleichung der mehrfachen Bestimmungen. Dieselbe erfolgte nach einer Annäherungsmethode (vergl. *Ausgleichungsrechnung* S. 154—158), wobei alle Bestimmungen als relative aufgefaßt wurden. Es ergaben sich die Resultate beistehender Tabelle (S. 213).

Die konstanten Korrekturen der einzelnen Reihen, welche sich zunächst fanden, wurden um eine gemeinsame Korrektur so vermehrt, daß den absoluten Bestimmungen von *Heaviside*, *Bessel*, *Schumacher* und *Peirce* möglichst genügt wird, also die Summe der Reihenkorrekturen zu 17, 19, 20 und 22 null giebt: Diese Korrekturen sind gegenwärtig + 16, + 19, + 13 und — 13 Mikrons (Tausendmillimeter); denkt man sich aber mit Rücksicht auf die Bemerkung zu § 26 Nr. 22 über die neue metrische Längeneinheit die Angaben in Nr. 17, 19 und 20 durch Beifügung von + 8 auf neues Metermaß reduziert, so sind die Reihenkorrekturen nunmehr + 8, + 11, + 5 und — 13. Da jedoch in den beiden ersten Fällen

	Maran-	ham-	Ascen-	Trini-	St. He-	Isle de	Rio Ju-	Port	Jackson	Kap. d.	Hobo-	Tillis.	Paris.	Kew.	(Green-	London.	Berlin.	Altona.	Gülden-	Königs-	Leith.	Dorpat.	Peters-	burg.	Unst.	Gewicht	Reihen-	[2]	Anzahl	[12g]	
1. Kater																4143					4553				4953	2	+ 14	0	3	108	
3. Hall							1717									4134					-3				+6	2	+ 5	+ 1	2	122	
6. Sabine	0912	1219	1086								3188					4143										3	+ 14	- 1	5	189	
8. Fallows		-4	-2	+5						2589						4131										2	+ 2	0	2	324	
9. Sabine													3877			4146										2	+ 17	- 1	2	122	
10. Sabine																4341										3	+ 5	0	3	258	
11. Foster	0903	1214	1099	1582						2571						4151										2	+ 22	- 3	6	602	
12. Lütke		+5	+3	-8	-1											4129										1	+ 17	+ 1	3	461	
13. Parrot					1578											+14										2	+ 21	+ 1	2	50	
14. Freycinet												3186														1	+ 18	+ 2	5	226	
15. Duperry																										1	+ 34	+ 2	4	254	
16. Biot																										2	+ 19	+ 1	3	90	
— B., A. u. H.																										1	- 10	+ 1	2	113	
17. Saw.u.Kuhl.																										2	+ 16	+ 2	4	204	
20. B. u. Sch.																										2	+ 13	+ 1	3	946	
— Peters																										2	+ 11	+ 1	2	170	
21. Peters																										3	- 4	- 1	3	297	
22. Peirce																										2	- 13	0	3	36	
Ausgleichungs-																															
werte	0908	1217	1091	1581	1805	1712	2625	2580	3191	3190	3882	4169	4143	4140	4235	4342	4392	4441	4550	4744	4876	4959									Σ[12g] = 4572
[1g]	-2	+1	-1	+1	0	0	0	+1	+3	-2	+3	0	+1	-1	+1	0	0	+3	-2	-2	0	+2									
Anzahl	2	3	2	2	2	2	2	3	5	2	7	2	3	7	3	2	2	3	2	2	2	2									Gesamtanzahl = 57.
[g]	5	6	5	3	2	3	2	5	4	5	4	7	4	5	17	7	6	4	7	4	4	3									

dasselbe englische Normalmaß zu grunde liegt, haben diese beiden Korrekturen nur zusammen das gleiche Gewicht wie die 3. und 4. erhalten. Die Summe von  $\frac{1}{2}(8 + 11) + 5 - 13$  ist in der That genügend genau gleich null.

Die Tabelle zeigt also die Zahlen der vorhergehenden Tabelle, vermehrt um die den einzelnen Reihen zukommenden konstanten Korrekturen. Unter jedem Wert ist die Verbesserung  $\lambda$  in Mikrons angesetzt, welche die Ausgleichung fordert. Die Gewichte  $g$  sind nach Maßgabe der Bemerkungen am Schlusse des vorigen Paragraphen geschätzt. Daß nun wirklich sehr nahe eine Ausgleichung nach der Methode der kl. Qu. vorliegt, zeigt sich darin, daß für jede Horizontalreihe die Summe  $[\lambda]$  und für jede Vertikalkolonne die Summe  $[\lambda g]$  nahezu null wird. (S. vorh. Seite.)

Die Anzahl der Unbekannten der Ausgleichung ist gleich  $21 + 18 = 39$ , indem relative Werte für 22 Orte aus 18 Reihen mit 18 Reihenkorrekturen bestimmt sind. Hiermit folgt der m. F. einer Beobachtung vom Gew. 1 in Mikrons gleich

$$\sqrt{\frac{1572}{57 - 39}} \text{ d. i. } \pm 16.$$

Fürs Gew. 2 und 3 wird er bezw.  $\pm 11$  und  $\pm 9$  Mikrons.

Bildet man die Durchschnittswerte von  $\lambda \lambda g$  für die 3 Gewichtsklassen, so erhält man

$$\begin{array}{ll} \text{Gew. 1} & 1054 : 14 = 75 \\ \text{„ 2} & 2774 : 32 = 87 \\ \text{„ 3} & 744 : 11 = 68, \end{array}$$

woraus man erkennt, daß die Gewichte im allgemeinen ziemlich richtig angesetzt sind.

Mit Rücksicht auf die Relation  $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 n^2 : n_0^2$  (vergl. S. 192) findet man, daß den m. F. 9, 11 und 16 Mikrons in der Länge  $\mathfrak{L}$  des Sekundenpendels die nachstehenden m. F. in der tägl. Schwingungszahl entsprechen:

$$\pm 0,4, \quad 0,5 \text{ und } 0,7,$$

Beträge, die recht plausibel erscheinen.

Günstig erscheint das Ergebnis der Ausgleichung auch insofern, als der kassierte *Fostersche* Wert für *Greenwich* durch dieselbe in 0,994126 übergeht und nur noch 17 Mikrons Fehler aufweist. Günstig ist auch, daß die in den Reihen 17 und 19 auftretenden absoluten Bestimmungen für *Kew* durch die Ausgleichung sich bis auf 3 Mikrons nähern.

Über die konstanten Korrekturen derjenigen Reihen, welche sich nicht in der Ausgleichung befinden, ist schon bei den Aufstellungen in § 25 und § 26 das Nötige gesagt.

§ 29. Übersicht der Längen des Sekundenpendels.

Nr	Name	Geographische Breite B.	Geographische Länge von Paris.	Geographische Länge des Sek. Pendels in Metern	Autho- rität	Quotient $\frac{0.02336}{\sin 2 B}$	Redu- ziert auf 45° Br.	Kondens.-Red. C	redu- ziert wegen Massen- kon- d.	Verh.	Allgem. Reollog. Charakter.	Messhöhe	Bemerkungen, mit Bezug auf Anomalien lokalen Charakters
1.	Rawak Insel d. Westküste von Neu-Guinea	0° 1' 34" S	128 35' E	0966	Freye.	+ 2636	3602	—	0.99 25 3577	— 28 (I)			Teil eines Archipels Küstencha- rakter. Thätig vulkan. Gegend; Sandlagen.
2.	Gaunah Lout Eiland d. Südwest- küste v. Sumatra	0° 1' 49" N	96 30' E	1055	Gold.	+ 2636	3691	—	50 3641	— 92 I			Teil eines Archipels, thätig vulkan. Gegend.
3.	St. Thomas Guineanische	0° 21' 41" N	4 24' E	1134	Sabine	+ 2636	3770	+	1 3716 55	— 167 I			Thätig vulkan. Gegend, Basalt. 15 □ Mln. Fläche.
4.	Galapagos	0° 32' 19" N	93 50' W	1019	Hall	+ 2636	3655	—	96 3559	— 10 I			Thätig vulkan.; Laven mit Höhlen; steile Küste. In 4 km ein 500 m hoher Berg. 70 □ Mln. Fläche 'größte I., wo die Stat. lag
5.	Para	1° 27' 0" S	50 46' W	0948	Foster	+ 2633	3581	+	1 3579 10	— 23 K			Sand und Lehm 10 m tief, 15 Mln. von der Küste an breitem Fluß.
6.	Maranham	2° 31' 39" S	46 40' W	0908	Ausgl.	+ 2626	3634	+	2 3621 12	+ 25 (I)			Insel von Küstencharakter; alluvialer Boden, Sand.
7.	Fernando do No- ronha	3° 50' 0" S	34 41' W	1189	Foster	+ 2612	3801	+	1 3572 230	— 23 I			Gebirgige Insel, erloschener Vulkan. Basalt, Hornblende, Porphyr. □ Mln. Fläche 40 Mln v. d. Küste
8.	Ualan, Carolinen Inseln	5° 21' 16" N	160 41' E	1286	Lütke	+ 2390	3876	—	100 3776	— 227 I			Kl vulkanische Insel, Basalt.
9.	Ascension	7° 55' 36" S	16 42' W	1217	Ausgl.	+ 2536	3752	+	1 3558 170	— 14 I			Erloschener Vulkan, Lava, Schlacken; nahe Berge 300 m hoch, höchster Gipfel 809 m, 13 km Durchmesser, 700 m von der Küste; sandig.
10.	Punnae	8° 9' 28" N	75 20' E	1014	B. u. H.	+ 2531	3545	+	2 3527 20	+ 22 K			
11.	Kudankolam	8° 10' 21" N	76 24' E	1027	"	+ 2530	3557	+	6 3548 20	+ 6 K			Steiniger Rücken 1200 m v. d. Küste.
12.	Minicoy, Maldiven Inseln	8° 17' 1" N	70 42' E	1120	"	+ 2527	3647	—	160 3497	+ 52 I			Korallenland 60 Mln v. d. Küste.

Nr	Name	Geographische Breite $B$	Geograph. Länge von Paris	Länge des Sek. Pendels in Metern	Antiricht. Hk.	$0,002886 \times \cos 2B$	C reduziert auf $45^\circ$ Br	Kondens.-Red.	C' reduziert wegen Massenkonst.	Verb.	Allgem. geolog. Charakter	Meereshöhe M.	Bemerkungen, mit Bezug auf Anomalien lokalen Charakters.
13.	Sicra Leone	8° 29' 28" N	15° 35' W	0,99	Sabine	+ 2522	0,99 8696	+ 7 27	0,99 8696	—	67 K	59	Erdschicht auf weißem Granit.
14.	Mallapatti	9 28 45 N	75 48 E	1035	B. u. H.	+ 2494	3599	+ 10	3599	+ 10	F	88	Granitbühl.
15.	Allepy	9 29 39 N	74 0 E	1094	"	+ 2493	3597	— 14	3573	— 24	K	3	200 m v. d. Küste am Hafen, der durch eine Landung vom Meere getrennt ist.
16.	Porto Bello	9 32 30 N	81 55 W	1208	Foster	+ 2492	3700	— 50	3650	— 101	K	4	Landengev. Panama. 100 b 600 m hohe Berge, 8 m nabe, Porphyry, Basalt.
17.	Trinidad	10 38 56 N	63 55 W	1091	Ausgl.	+ 2456	3547	+ 1 17	3551	+ 18	(I)	6	Insel, aber ganz Küstencharakter. Fläche 82 □ Mln. 8 m tiefe Lahn- und Pechschicht, nördl. eine Reihe Vulkane, auch Gebirge bis zu 1000 m hoch in der Nähe.
18.	Pachapalium	10 69 40 N	75 20 E	1068	B. u. H.	+ 2445	3513	+ 35	3543	+ 1	F	396	Sehr gebirgig.
19.	Aden	12 46 53 N	42 42 E	1227	"	+ 2376	3605	— 20	3555	— 36	K	2	Halbinsel von etwa 6 km Durchmesser, an der Nordküste, in 1 km Abstand, allgemeine Erhebung 180 m, Berge bis 500 m, vulkan. Ursprung. In 30 m Abstand steigt das Land rasch zu dem südlichen Plateau Vorderindiens an.
20.	Mangalore	12 51 37 N	72 33 E	1163	"	+ 2375	3598	— 20	3519	+ 31	K	2	Beur stelle Küste tiefe Erdschicht über Sandstein, erloschener Vulkan.
21.	Bahia	12 59 21 S	40 51 W	1216	Sabine	+ 2870	3595	+ 8 40	3553	— 4	K	65	Hochplateau.
22.	Bangalore S.	13 0 41 N	75 17 E	1107	B. u. H.	+ 2369	3476	+ 111	3587	— 38	F	950	Hochplateau.
23.	Madras	13 4 9 N	77 57 E	1168 [1186]	" Gold.	+ 2367	3535	+ 1 20	3516 [3534]	+ 33 [+ 15]	K	6	5 km von der Küste.
24.	Bangalore N	13 4 56 N	75 22 E	1121	B. u. H.	+ 2366	3487	+ 107	3594	— 45	F	917	Hochplateau.
25a.	Guam, Ladronen, Inseln	13 26 18 N	142 26 E	1406	Lütke	+ 2351	3787	— 150	3607	— 58	I	.	Kalbfunde mit flachen Küsten und Korallenriffen. Die nördlich gelegenen Inseln sind thätige Vulkane.
25b	"	13 27 51 N	142 38 E	1460	Freye.	+ 2350	3810	— 150	3600	— 111	I	.	

Nr	Name	Geographische Breite B	Geograph. Länge von Paris.	Länge des Sek. Pendels in Moten C	0,005886 > cos g B.	E' reduziert auf 45° Br C	Kondens.-Fak.	E' reduziert wegen Messen.-kond. C"	Verh.	Allgem. geolog. Charakter.	H. Meereshöhe	Bemerkungen, mit Bezug auf Anomalien lokalen Charakters
26.	Namthabad	15° 5' 52" N	75° 19' E	1205	B. u. H.	0,99 + 2279 3483	+ 42	0,99 3525	+ 24	F	358	Hochebene; Boden sandig über black cotton soil.
27.	St. Helena	15 56 7 S	8 1 W	1581	Ausgl.	+ 2239 3820	+ 175	1 3646	- 97	I	9	Erioseher Vulkan, Basalt, Quarz- fels, Erde, nahe Berge bis 1000 m; steile Klippe, Fläche 2 □ Min.
28.	Cocanada	16 56 21 N	79 58 E	1379	B. u. H.	+ 2189 3568	- 20	3548	+ 1	K	8	50 m nördl. Berge bis 900 m hoch.
29.	Kodangal	17 7 57 N	75 21 E	1325	"	+ 2179 3804	+ 68	3572	- 23	F	584	Hochland, etwas wellig, abrdl. ver- rissen und in einigen Km. steil abfallend. Black cotton soil.
30.	Jamaica	17 56 7 N	79 14 W	1497	Sabine	+ 2186 3838	- 20	3618	- 64	(I)	8	301 □ Min. groß; Kalk.
31.	Damargida	18 3 17 N	75 23 E	1328	B. u. H.	+ 2130 3468	+ 69	3527	+ 22	F	3	Hochland, auf einer Hügelkette am Fluente mit langsamem Abfall. Black cotton soil.
32.	Colaba (Bombay)	18 53 46 N	70 31 E	1541	"	+ 2083 3524	+ 1	3605	- 56	K	11	Spitze einer kl. Halbinsel; trap rock. In 60 m. Distanz steigt das große Tafelland an, Berge bis 1200 m.
33.	Sontana	19 5 0 N	75 22 E	1435	"	+ 2073 3508	+ 60	3568	- 19	F	522	Auf einem Berge des Hochlands; 75 m. tief steiler Abfall. Trap rock.
34.	Isié de France	20 9 40 S	55 8 E	1805	Ausgl.	+ 2009 3814	- 170	3644	- 96	I	.	Erioseher Vulkan mit steilen Klitten. Berge von 900 m.
35.	Badgaon	20 44 23 N	75 19 E	1537	B. u. H.	+ 1975 3512	+ 40	3552	- 3	F	342	Auf einer sanften Anschwellung eines ausgedehnten Buchens. Vulkanisch, Fläche 35 □ Min.
36.	Mauwi, Sandwich I.	20 52 7 N	159 2 W	1794	Freyc.	+ 1967 3761	- 150	3611	- 62	I	.	Plateau eines cylindr. Basaltfelsens von 150 m. Durchmesser. Südlich Vulkane.
37.	San Blas de California	21 32 24 N	107 36 W	1577	Hall	+ 1926 3508	+ 27	3480	+ 69	K	35	15 Min. v. d. Küste; ausgezeichnetes Land.
38.	Calcutta	22 32 55 N	86 4 E	1712	B. u. H.	+ 1861 3573	+ 1	3504	- 15	K	6	Granit, erloschener Vulkan in der Nähe.
39.	Rio Janeiro	22 55 17 S	45 38 W	1712	Ausgl.	+ 1837 3549	+ 13	3538	+ 11	K	22	Hochland, auf einem isolierten Sand- steinbühl, 90 m. über der Umgegend.
40.	Ahmadpur	23 36 21 N	76 28 E	1710	B. u. H.	+ 1791 3501	+ 59	3560	- 11	F	516	



Nr.	Name	Geographische Breite $\delta$	Geograph. Länge von Paris.	Länge des Sek. Pendels in Metern.	$\frac{1}{\sin \delta}$	$\frac{1}{\cos \delta}$	$\frac{1}{\sin \delta}$ auf 45 Br	Korrekturen	reduziert wegen Massenkonst.	Verb.	Allgem. geolog. Charakter.	Meereshöhe	Bemerkungen, mit Bezug auf Anomalien lokalen Charakters.
11.	Kalianpur	24 7 11 N	75 22 E	1762	B.u.H.	1756	3518	—	0.99	—	39 F	538	Hochland, hügeliger Felsboden.
12.	Pahargurh	24 36 7 N	75 24 E	1771	"	+1099	3470	+	58	3529	+ 21 F	500	Hochland, flacher Gipfel eines 45 m hohen Sandsteinhügels.
13.	Usira	26 57 6 N	75 20 E	1961	"	+1653	3514	+	26	3540	+ 9 F	247	Auf einem Hügel 60 m über der Umgebung. Rother Sandstein.
44.	Bonin Insel	27 4 9 N	140 0 E	2356	Lütke	+1545	3901	—	120	3781	— 232 I	—	Vulkanisch. Basalt, tiefes Wasser ringum. Fläche der ganzen Gruppe 5000 qkm.
45.	Datara	28 44 5 N	75 21 E	2078	B.u.H.	+1417	3493	+	26	3521	+ 28 F	218	Flacher Alluvialboden.
46.	Kalana	29 30 55 N	75 22 E	2096	"	+1356	3452	+	29	3481	+ 68 F	247	Ebener, sandiger Boden.
47.	Nojli	29 53 28 N	75 23 E	2108	"	+1327	3435	+	31	3456	+ 83 F	269	Dauhl.
48.	Dehra	30 19 29 N	75 46 E	2039	"	+1292	3381	+	73	3404	+ 145 F	683	Am Fuße des Himalaya; von hier rascher Anstieg!
49.	Mussoorie	30 27 41 N	75 47 E	2122	"	+1281	3403	+	220	3623	— 74 F	2109	Gipfel eines Berges im südlichen Ausläufer des Himalaya
50.	Ismailla	30 35 55 N	75 56 E	2249	"	+1270	3319	+	1	3520	+ 29 F	10	—
51.	Meen Meer	31 31 37 N	72 6 E	2257	"	+1195	3452	+	25	3477	+ 72 F	215	Flacher, sandiger Boden
52.	Valparaiso	33 2 30 S	74 2 W	2500	Lütke	+1008	3598	—	40	3528	+ 21 K	—	Granit.
53.	More	33 15 39 N	75 34 E	1984	B.u.H.	+1050	3034	+	540	3574	— 25 F	4696	Im Himalaya; Boden verwitterter Felsen. In 6 m Abstand 750 m höher.
54.	Paramatta	33 48 43 S	148 40 E	2504	Briab.	+1004	3668	+	2	3585	+ 14 K	23	30 km von der Küste.
55.	Port Jackson	33 51 37 S	149 0 E	2625	Ausgl.	+1000	3625	—	35	3590	— 41 K	—	Die ganze Bai von Felsen umstaut.
56.	Kap d. g. Heil.	33 56 3 S	16 9 E	2580	"	+ 993	3673	+	1	3641	— 92 K	10	Sand mit Steinen. Berge in 4 km Abstand 1000 m hoch.
57.	Monterideo	34 54 26 S	58 30 W	2641	Foster	+ 910	3651	—	7	3544	+ 5 K	4	Station auf kl. Eiland dicht am Gestade im Hafen. Granit und Glimmerchiefer.
58.	Lipari	38 28 37 N	12 37 E	3097	Biot	+ 596	3692	+	1	3668	— 134 I	9	Thätig vulkan. Gegend, Erhebungen nabebei 300—900 m.

Nr.	N a m e.	Geographische		Geograph. Länge von Paris.	Länge des Sek. Pendels in Metern.	0,002636 $\times \cos 2 B.$	C' redu- ziert auf 45° Br. C	Kondens.-Red.	C' redu- ziert wegen Massen- kond. C	Verb.	Allgem. Geolog. Charakter.	// Meereshöhe	Bemerkungen , mit Bezug auf Anomalieen lokalen Charakters.
		Breite B.	Länge										
59.	Formentera	38° 39' 56" N	0° 55' 11" E	3065	Biot	+ 578	0,99 3643	+ 24 40	0,99 3627	—	78 I	203 <sup>m</sup> 2	1 Mln. Fläche.
60.	Ararat	39 46 12 N	2 E	2922	Parrot	+ 478	3400	+ 225	3625	—	76 F	1883	1840 noch thätiger Vulkan.
61.	Jelisabethpol	40 40 53 N	44 1 E	3114	Kuhlhb.	+ 396	3510	+ 50	3560	—	11 F	427	Im Thale des Kur südl. vom Kau- kasus.
62.	Hoboken-New York	40 44 31 N	76 22 W	3191	Ausgl.	+ 391	3582	+ 2 23	3561	—	12 K	15	Flache Küste; in N. Y. 30 <sup>m</sup> Sand auf Serpentin.
63.	Barcelona	41 23 15 N	0 12 W	3251	Biot	+ 332	3583	—	3556	—	7 K	4	Steiler Küstenabfall.
64.	Batum	41 39 28 N	39 18 E	3296	Kuhlhb.	+ 307	3603	—	3583	—	34 K	2	—
65.	Tiflis	41 41 28 N	42 28 E	3190	Ausgl.	+ 304	3494	+ 56	3550	—	1 F	435	Flussthal.
66.	Duschett	42 4 49 N	42 22 E	3078	Kuhlhb.	+ 268	3346	+ 100	3446	+ 103	103 F	846	Kaukasus; meist Kalkgebirge.
67.	Gudaur	42 29 17 N	42 8 E	3103	"	+ 231	3334	+ 263	3599	—	50 F	2247	Kaukasus; Abhang des Kasbek.
68.	Wladikawas	43 1 59 N	42 21 E	3321	"	+ 180	3501	+ 82	3583	—	34 F	693	Kaukasus: Pafs am Kasbek; Berg 5043 <sup>m</sup> hoch aus Trachtyporphyr.
69.	Toulon	43 7 20 N	3 36 E	3402	Dup.	+ 172	3574	—	27 3547	+ 2	2 K	.	—
70.	Figeac	44 36 45 N	0 17 W	3451	Biot	+ 36	3457	+ 26	3513	+ 36	36 F	223	Hochland.
71.	Bordeaux	44 50 26 N	2 54 W	3470	"	+ 15	3485	+ 2	3487	+ 62	62 F	17	7 Mln. v. d langsam abfallenden Küste entfernt.
72.	Fiume	45 19 0 N	12 8 E	3595	"	—	29 3566	+ 8	3574	—	25 (K)	65	Kontinental wegen geringer Tiefe des Adriatischen Meeres. Der 1000 <sup>m</sup> hohe Karst nahebei.
73.	Ismail	45 20 34 N	26 29 E	3550	Saw.	—	32 3518	+ 4	3522	+ 27	27 F	30	12 Mln. v. d. Küste des Schwarzen Meeres.
74.	Padua	45 24 3 N	9 32 E	3623	Biot	—	37 3586	+ 3	3589	—	40 F	31	4 Mln. v. d. Küste.
75.	Mailand	45 28 1 N	6 51 E	3549	"	—	43 3506	+ 18	3524	+ 25	25 F	150	Am Fusse der Alpen.
76.	Clermont-Ferrand	45 46 48 N	0 46 E	3554	"	—	72 3482	+ 47	3529	+ 20	20 F	406	Gebirgig; in 9 <sup>km</sup> Abstand ein 1200 <sup>m</sup> hoher Berg.
77.	Kischinef	47 1 30 N	26 29 E	3730	Saw.	—	186 3544	+ 11	3555	—	6 F	92	—

Nr.	N a m e.	Geographische Breite $B$	Geograph. Länge von Paris.	Länge des Sek. Pendels in Metern.	$0,000356 \times \cos 2B$	$\sigma$ reduziert auf $45^\circ B$ .	Kondens.-Red.	$\sigma$ reduziert wegen Massen-kond.	Verb.	Allgem. Charakter.	Meereshöhe $H$	Bemerkungen, mit Bezug auf Anomalien lokalen Charakters.
78.	Kamenetz .....	48° 40' 39" N	24° 14' E	3858	— 338	0,99	+ 21	3541	+ 8	F	179 <sup>m</sup>	—
79.	Paris .....	48 50 14 N	0 0	3882 [3987]	— 352	3530	+ 8	3538 [3593]	+ 11	F	70	—
80.	Mannheim .....	49 29 11 N	6 8 E	3906	— 412	3494	+ 8	3502	+ 47	F	125	Ebene Gegend.
81.	Kremenetz .....	50 6 8 N	23 23 E	4013	— 467	3546	+ 85	3531	— 32	F	297	Hochland.
82.	Shanklin Farm Isel Wight .....	50 37 24 N	3 32 W	4042	— 514	3528	+ 7	3535	+ 14	[I]	74	Festlandscharakter wegen geringer Meerestiefe. Hügelig; Thon und Kalk.
83.	Bonn .....	50 43 45 N	4 46 E	4072	— 523	3549	+ 5	3554	— 5	F	62	Flach; Hugel nahe.
84.	Inselsberg .....	50 51 11 N	8 8 E	4078	— 535	3543	+ 77	3520	— 71	F	910	Einer der höchsten Gipfel der Gegend.
85.	Seeburg .....	50 56 6 N	8 28 E	4069	— 543	3527	+ 30	3557	— 3	F	353	Gebirgig.
86.	Gotha .....	50 56 38 N	8 23 E	3989	— 543	3446	+ 27	3478	+ 76	F	315	Desgl.
87.	Dünkirchen .....	51 2 10 N	0 3 E	4099	— 551	3548	+ 0	3548	+ 1	(K)	0	Wegen geringer Kanaltiefe von kontinentalen Charakter
88.	Kew .....	51 28 6 N	2 39 W	4169	— 590	3579	+ 0	3579	— 30	F	5	Eben.
89.	Greenwich .....	51 28 40 N	2 20 W	4143	— 591	3552	+ 6	3558	— 9	F	48	Auf einem Hügel.
90.	London .....	51 31 8 N	2 26 W	4140	— 595	3545	+ 3	3548	+ 1	F	28	Hügelig; Thon, Kiesel, Kalk
91 <sup>a</sup> .	Falkland Inseln St. Louis .....	51 31 44 S	60 28 W	4154	— 596	3558	— 15	3548	+ 6			Küstenscharakter, da der Meeresboden bis zum Kontinent geringe Tiefe besitzt.
91 <sup>b</sup> .	French Bay .....	51 35 18 S	60 24 W	4077	— 601	3476	— 15	3461	+ 88	(I)		Wethin Sümpfe.
92.	Belin .....	52 2 22 N	22 53 E	4179	— 641	3538	+ 16	3554	— 5	F	141	Ebene Gegend, Alluvium. Von kontinentalen Charakter wegen geringer Tiefe der Nordsee.
93.	Leyden .....	52 9 20 N	2 9 E	4210	— 652	3558	+ 0	3558	— 9	(K)	0	Kalk u. Serpentin, Bergeshöhe 245 m.
94.	Arbury Hill .....	52 12 55 N	3 33 W	4223	— 657	3566	+ 21	3597	— 38	F	225	Sandboden.
95.	Berlin .....	52 30 16 N	11 4 E	4235	— 683	3552	+ 3	3555	— 6	F	35	
96.	Petropawlowak .....	53 0 59 N	136 23 E	4350	— 729	3621	— 33	3598	— 39	K		Stelle Kiste; Quarzfel.

Nr	Name	Geographische Breite B.	Geograph. Länge von Paris.	Länge des Sek. Pendels in Metern.	Geogr. Autorität.	$0.002536 \times \cos 2B$	Reduziert auf $45^\circ$ Br. g.	Korrektur-Red.	Reduziert wegen Massenkonst. g.	Verb.	Allgemein geol. Charakter.	Meereshöhe H.	Bemerkungen, mit Bezug auf Anomalien im lokalen Charakter.
97.	Clifton ...	53° 27' 43" N	3° 33' W	4311	Kater	—	0,99 767 3544	+ 10	0,99 3554	— 5	F	104	Lehn und Schieferthon, Bergeshöhe 137 m.
98.	Altona...	53 32 45 N	7 36 E	4342	Ausgl.	—	774 3568	+ 2	3570	— 21	F	31	Hügeliges Ufer.
99.	Güldenstein	54 13 9 N	8 30 E	4392	"	—	834 3558	+ 5	3563	— 14	F	67	Hügelig.
100.	Wilna...	54 41 2 N	22 58 E	4424	Saw.	—	874 3550	+ 12	3562	— 13	F	101	—
101.	Königsberg	54 42 50 N	18 10 E	4439	Ausgl.	—	877 3562	+ 2	3564	— 15	F	92	Eben. Wir haben g nach Bougvers Formel mit 0,995 als Koef. reduziert, ausgesetzt.
102.	Staten Island	54 46 23 S	66 19 W	4501	Foster	—	882 3619	— 10	3609	— 60	(I)	5	Küstencharakter: 12 □ Min. Fläche. Grauwacke, Quarzite vermischt mit Lehmablüthen, nördl. Berge bis 600 m.
103.	Kap Horn	55 51 20 S	69 50 W	4565	"	—	975 3590	+ 7	3584	— 35	K	12	Stat. ganz nahe der Küste, nur 50 m Abstand, steile Felsenmassen, Granit, Hornblende, Berg von 600 m Höhe nahe.
104.	Leith	55 58 39 N	5 30 W	4550	Ausgl.	—	985 3564	+ 2	3566	— 17	(K)	21	Festlandschakter wegen geringer Tiefe der See, Sandstein u. streuter Basaltfels, hügelig Ebene Gegend
105.	Jakobstadt	56 30 3 N	23 26 E	4647	Saw.	—	1031 3516	+ 10	3526	+ 23	F	83	Isal von festlandischem Charakter.
106.	Sitka	57 8 0 N	137 40 W	4621	Lütke	—	1076 3545	— 17	3528	+ 21	K	29	Festlandschakter wegen geringer Tiefe der See, Felsen. Serpentin
107.	Portsoy	57 40 59 N	5 9 W	4707	Kater	—	1129 3578	+ 4	3582	— 33	(K)	58	und Granit. Hügelig, die Höhe im Mittel der Augen.
108.	Dorpat	58 22 49 N	24 24 E	4744	Ausgl.	—	1177 3567	+ 7	3574	— 25	F	58	Festlandschakter wegen geringer Tiefe der See; flach.
109.	Reval	59 26 37 N	22 25 E	4890	Saw.	—	1274 3562	+ 0	3562	— 13	(K)	3	Hügelig.
110.	Pulkowa	59 46 19 N	27 59 E	4864	"	—	1300 3554	+ 9	3563	— 14	F	75	Kalkstein.
111.	Petersburg	59 56 30 N	27 59 E	4876	Ausgl.	—	1314 3562	+ 1	3563	— 14	F	8	Festlandschakter wegen geringer Tiefe der See. Serpentin.
112.	Unst	60 45 27 N	3 11 W	4959	"	—	1378 3581	+ 1	3582	— 33	(I)	9	

Nr.	N a m e.	Geographische Breite B.	Geograph. Länge von Paris.	Länge des Sek. Pendels in Metern. ℓ	Autori- tät.	$0,002636$ $\times \cos 2 B.$	ℓ redu- ziert auf 45° Br. ℓ'	Kondens.-Red.	ℓ' redu- ziert wegen Massen- kond. ℓ''	Verb.	Allgem. geolog. Charakter.	Meereshöhe H.	Bemerkungen, mit Bezug auf Anomalieen lokalen Charakters.
113.	Süd Shetland I. . . . .	62° 56' 11" S	62° 51' W	0,99 5176	Foster	— 1545	0,99 3631	+ — 1 20	0,99 3612	— 63	I	7 <sup>m</sup>	Thätige Vulkane; Tuff, Lava. Im N. E. Berge von 600 <sup>m</sup> .
114.	Nicolaistadt . . . . .	63 5 33 N	19 17 E	5087	Saw.	— 1557	3530	+ —	3532	+ 17	(K)	14	Festlandscharakter wegen geringer Tiefe der See.
115.	Drontheim . . . . .	63 25 54 N	8 3 E	5039	Sabine	— 1582	3457	+ —	3461	+ 88	(K)	37	Desgl.; Thon auf Glimmerschiefer.
116.	Tornea . . . . .	65 50 43 N	21 54 E	5365	Saw.	— 1753	3612	+ —	3612	— 63	(K)	4	Desgl.
117.	Kandalaks . . . . .	67 7 43 N	30 6 E	5356	Lütke	— 1840	3516	+ —	3516	+ 33	(K)	.	Desgl.; Niederung; Granit.
118.	Hammerfest . . . . .	70 40 6 N	21 25 E	5557	Sabine	— 2058	3499	+ —	3500	+ 49	(K)	9	Halbinsel am Hafen in tiefem Wasser; doch im ganzen kontinentaler Charakter. Glimmerschiefer.
119.	Port Bowen . . . . .	73 13 39 N	91 15 W	5778	Foster	— 2198	3580	+ —	3584	— 35	[I]	37	Insel von Kontinentalcharakter. Kalkstein.
120.	Grönland, Ostküste . . . . .	74 32 19 N	21 10 W	5778	Sabine	— 2261	3517	+ — 1 20	3498	+ 51	K	10	Sandstein.
121.	Melville, Südostseite . . . . .	74 47 12 N	113 8 W	5861	"	— 2273	3588	+ — 1 10	3579	— 30	K	10	900 [Mn. große Insel. Sandstein- chen mit Sand.
122.	Spitzbergen . . . . .	79 49 58 N	9 20 E	6067	"	— 2472	3595	+ — 1 10	3586	— 37	K	6	1500 [Mn. große Insel; vor der Küste liegen 1—2 Mn. breit die Wallrofsbänke; Berge bis 1300 <sup>m</sup> hoch. Quarzfels.

Zu vorstehender Zusammenstellung der Längen des Sekundenpendels  $\mathfrak{L}$ , reduziert mit *Bouguers* Formel, wie sie sich zufolge der Ausgleichung ergeben, ist noch zu erwähnen, daß die geogr. Längen teils nach den Originalangaben, teils mit Benutzung vorhandener Zusammenstellungen (von *Borenius* und *A. Fischer*) unter Kontrolle durch Karten angesetzt sind.\*) Die Zahl 0,002636, welche zur Reduktion der Pendellängen auf  $45^\circ$  dient, entspricht einer vorläufigen Ausgleichung. Diese reduzierten Pendellängen  $\mathfrak{L}'$  enthalten selbstverständlich ebenfalls sämtlich nur die *Bouguersche* Reduktion; die Reduktion nach der Kondensationsmethode auf die Werte  $\mathfrak{L}''$  erfordert weitere Reduktionsglieder, welche nach Näherungsformeln berechnet sind, wie es der nächste Paragraph angeben wird.

Die Bemerkungen über lokale Verhältnisse sind zumeist den Originalquellen entlehnt, teilweise aber auch aus Karten entnommen. Der allgemeine geologische Charakter: Festland, Küste oder Insel, ist durch  $F$ ,  $K$  und  $I$  bezeichnet. Eine Parenthese um diese Symbole bedeutet, daß für die Kondensation ein anderer Charakter maßgebend war.

§ 30. Die Kondensations-Reduktionen vorstehender Tabelle konnten wegen uns mangelnder genauer Spezialkarten nur mehr oder weniger roh ausgeführt werden. Dabei wurde ausgegangen für kleine Inseln von der Formel (6) S. 181, welche für die Länge  $\mathfrak{L}$  des Sekundenpendels, insofern dieselbe der Schwerkraft proportional ist, als Reduktion giebt in Bruchteilen von  $\mathfrak{L}$ :

$$- \frac{3(\Theta - 1)}{11,2} \frac{h}{R} \frac{1}{n} \log \text{nat} (n + \sqrt{n^2 + 1}) \quad (1)$$

mit

$$n = h \cot \nu : \mathfrak{n} R, \quad (2)$$

für Küsten von der Formel (4) S. 182:

$$- \frac{3(\Theta - 1)}{11,2} \frac{h}{R} \frac{1}{n} \log \text{nat} \sqrt{n^2 + 1} + n \arctan \frac{1}{n} \frac{1}{\pi}. \quad (3)$$

Hierin ist  $\Theta$  die Dichtigkeit der Insel- bzw. Küstenmasse,  $h$  die Tiefe des Meeres in der weiteren Umgebung,  $\mathfrak{n} R$  die lineare Abplattung der Erde,  $\tan \nu$  das Gefälle der Böschung.

Mit Rücksicht auf die Unvollkommenheit dieser Formeln behufs einer genauen Darstellung der Reduktionen erschien es ausreichend, dieselben in folgender Weise zu vereinfachen. Es wurde allgemein  $\mathfrak{L} = 1^m$ ,  $\Theta = 2,8$ ,  $\mathfrak{n} R = 21^m$  gesetzt; da sich ferner  $n$  in allen Fällen mindestens gleich 2,5, meist aber mehr als doppelt so groß fand, wurde

\*) Der Meridian von *Ferro* liegt  $20^\circ$  westlich *Paris*, derjenige von *Greenwich*  $= 2^\circ 20'$  westlich *Paris*.

$$\log (n + \sqrt{n^2 + 1}) = \log 2n, \quad \log \sqrt{n^2 + 1} = \log n$$

$$n \arctan \frac{1}{n} = 1$$

und

$$\frac{\log \text{nat } n + 1}{\pi} = \frac{\log \text{nat } 2n}{3}$$

gesetzt. Letzteres giebt einen Fehler, der indes in den ungünstigsten vorkommenden Fällen kaum einige Mikrons in  $\mathfrak{L}$  ausmacht und sich überdies z. T. mit einer Vernachlässigung, die in (3) bereits eingeführt ist, kompensiert.

Die Formeln werden nun für Mikrons als Längeneinheit:

$$\text{Red.}_{\text{für Inseln}} = -1600 \tan \nu \log \text{nat } 2n \quad (4)$$

mit

$$n = h^{km} \cdot \cot \nu : 21, \quad (5)$$

und

$$\left\{ \text{Red.}_{\text{für Küsten}} \right\} = \frac{1}{3} \cdot \left\{ \text{Red.}_{\text{für Inseln}} \right\}. \quad (6)$$

Um die Berechnung des Ausdruckes rechter Hand in (4) zu erleichtern und zugleich bequem erkennen zu lassen, welchen Einfluß Änderungen von  $h$  und  $\tan \nu$  auf die Reduktionsgröße haben, wurde eine graphische Tafel für diesen Ausdruck nach *Lalannes* Methode hergestellt.\*) Wird die negative Reduktion (4) mit  $C$  bezeichnet, so giebt (4):

$$\log C = \log (1600 \tan \nu) + \log (\log \text{nat } 2n).$$

Betrachtet man nun  $\log (1600 \tan \nu)$  als Abscisse  $x$ ,  $\log (\log \text{nat } 2n)$  als Ordinate  $y$ , so stellt

$$\log C = x + y$$

für konstantes  $C$  die Gleichung einer Geraden vor, die gegen die Koordinatenachsen unter  $45^\circ$  geneigt ist. Die zu verschiedenen  $C$  gehörigen Geraden sind parallel.

Fig. 31 zeigt die Geraden für  $C = 10, 20, \dots 400$  Mikrons. Jeder Geraden ist der betreffende Wert  $C$  fett aufgedruckt. Das Koordinatennetz der  $x$  und  $y$  ist unterdrückt; es sind vielmehr für verschiedene Werte von  $n$  und  $\cot \nu$  Parallelen zur  $x$ - und  $y$ -Axe angegeben. Ein Versuch wird dem Leser zeigen, daß die Konstruktion der Tafel sehr rasch und, da nur gerade Linien vorkommen, verhältnismäßig genau zu bewerkstelligen ist.

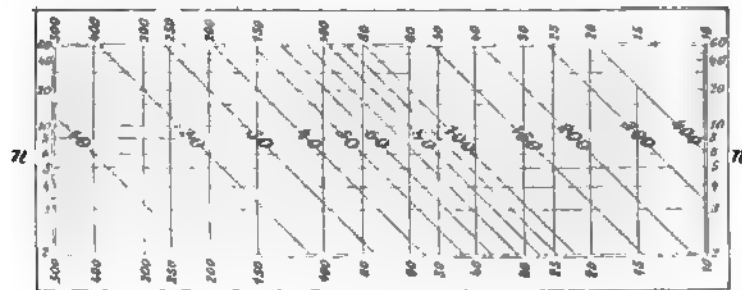
Die Reduktionselemente  $n$  und  $\tan \nu$  wurden fast ausschließlich mittelst der Tiefenkarten abgeleitet, welche *Richard Andrees allgemeiner Handatlas* giebt. Es fand sich, daß für die Küsten die Unsicherheit der Reduktion im Durchschnitt kaum 5 Mikrons beträgt, also wesentlich kleiner ist, als die Unsicherheit der meisten Pendellängen infolge von Beobachtungsfehlern, vergl. S. 214. Erheblich ungenauer

\*) Vergl. *Vogler*, Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln etc. Berlin 1877.



aber sind die Inselreduktionen, weil jene Karten die Böschungsverhältnisse der Inseln nicht genau genug erkennen lassen. Da indessen nur auf wenigen kleinen Inseln beobachtet worden ist, die Inselwerte

### Kondensations-Reduction für Inseln.



col. v  
Die Reduction ist für die Höhe des Schwindungsmaßes in Mikrons  
zu verstehen.

Fig. 31.

zur Ableitung der Abplattung auch nicht benutzt werden, so wurde mit Rücksicht auf die entstehende größere Mühe eine genaue Reduktion für jetzt nicht in Angriff genommen.

Erwähnt sei noch, daß in einigen Fällen weder genau die Küsten-, noch genau die Inselformel zur Anwendung kam, sondern eine Schätzung in der Weise vorgenommen wurde, daß die Ergebnisse dieser Formeln mit einem Faktor multipliziert auftreten. In dieser Beziehung genügt es darauf hinzuweisen, daß für einen Punkt auf einer Landenge die Reduktion annähernd das Doppelte der Küstenkorrektur sein wird, und ferner, daß bei verschiedenen Böschungsverhältnissen einer Insel auf verschiedenen Seiten die Reduktion sich zusammensetzt aus den, den verschiedenen Verhältnissen entsprechenden Werten der Reduktionen, multipliziert mit dem entsprechenden Bruchteil des Umfanges.

Die Kondensationsreduktion auf dem Festlande und überhaupt für Erhebungen des Beobachtungsortes über das Meeresniveau wurde einfach nach Maßgabe des in der *Bouguerschen* Formel auftretenden Gliedes, welches von der Anziehung der zwischen dem Meeresniveau und dem Beobachtungsorte liegenden Schicht abhängt, ausgeführt, dergestalt, daß dieses Glied im Endwerte ganz beseitigt erscheint. Hierbei sind die Angaben der Spezialtabellen §§ 25 und 26 zu vergleichen. In einigen wenigen Fällen war die angewandte Meereshöhe uns unbekannt; dann ist vorstehende Reduktion unterblieben. Übrigens ist in diesen Fällen die Meereshöhe jedenfalls klein, der Fehler also gering.

Völlig streng ist das auf dem Festlande eingeschlagene Verfahren allerdings nur im weithin ebenen Terrain; im Gebirge also werden bei einer strengen Kondensation nach Vorschrift von § 20 noch Änderungen eintreten. Trotzdem diese z. T. nicht unerheblich ausfallen, (vergl. S. 186 § 23), so haben wir doch auch hier vom strengen Ver-

fahren abgesehen, weil eine Überschlagsrechnung zeigte, daß die weiterhin gezogenen Resultate nicht wesentlich beeinflusst werden. Es sind der Fälle, wo eine bedeutende Vernachlässigung stattfindet, verhältnismäßig nicht viele, und z. T. tritt eine Kompensation ein, wie im *Himalaya*, dem *Kaukasus* und in *Thüringen*, wo zu den negativen Fehlern der Hochstationen positive Fehler von Stationen am Fusse der Gebirge kommen.

§ 31. Erfolg der Kondensationsmethode. Aus den auf 45° Breite reduzierten Werten  $\mathfrak{F}'$  für die Länge des Sekundenpendels wurden nun Mittelwerte gebildet für die acht Breitenintervalle 0° bis 10°, 10° bis 20° u. s. f., wie dies nachfolgende Tabelle zeigt. Für den Zweck der Aufstellung einer Interpolationsformel ist noch der hundertste Teil des arithmetischen Mittels der Reduktion auf 45° Breite beigelegt.

Breite.	Charakt.	Anzahl.	Mittelwert von $\mathfrak{F}'$ (unkondens.)	Kond.- Red.	Mittelwert von $\mathfrak{F}''$ (kondens.)	Koeffizient f. d. Ausgleich.
0—10°	<i>F</i>	1	0,99 3529	+ 10	0,99 3539	+ 24,9
	<i>K</i>	8	3591	— 20	3572	+ 25,6
	<i>I</i>	7	3742	— 121	3621	—
10—20	<i>F</i>	7	0,99 3490	+ 70	0,99 3560	+ 22,9
	<i>K</i>	8	3579	— 21	3558	+ 22,9
	<i>I</i>	3	3796	— 158	3638	—
20—30	<i>F</i>	8	0,99 3487	+ 42	0,99 3529	+ 16,1
	<i>K</i>	3	3542	— 14	3527	+ 18,8
	<i>I</i>	3	3825	— 147	3679	—
30—40	<i>F</i>	6	0,99 3357	+ 181	0,99 3537	+ 10,9
	<i>K</i>	5	3597	— 29	3567	+ 9,9
	<i>I</i>	2	3668	— 13	3655	—
40—50	<i>F</i>	16	0,99 3494	+ 44	0,99 3538	+ 0,0
	<i>K</i>	4	3586	— 24	3562	+ 3,0
	<i>I</i>	—	—	—	—	—
50—60	<i>F</i>	26	0,99 3548	+ 11	0,99 3559	— 7,8
	<i>K</i>	6	3568	— 16	3552	— 8,1
	<i>I</i>	—	—	—	—	—
60—70	<i>F</i>	5	0,99 3539	+ 1	0,99 3540	— 16,2
	<i>K</i>	—	—	—	—	—
	<i>I</i>	1	3631	— 19	3612	—
70—80	<i>F</i>	2	0,99 3540	+ 2	0,99 3542	— 21,3
	<i>K</i>	3	3567	— 12	3554	— 23,3
	<i>I</i>	—	—	—	—	—

Der Erfolg der Kondensationsreduktion zeigt sich zunächst in einer besseren Übereinstimmung der Werte in verschiedenen Breiten für jeden der drei Charaktere  $F$ ,  $K$  und  $I$ ; er tritt ferner deutlich hervor in einer großen gegenseitigen Annäherung der Werte für Festland-, Küsten- und Inselcharakter. Für  $F$  und  $K$  ist beinahe jeder Unterschied geschwunden. Berechnet man aus den sieben Differenzen  $F - K$  einen Mittelwert des Unterschiedes der Pendellängen, indem man dabei diesen Differenzen Gewichte  $n_1, n_2 : (n_1 + n_2)$  beilegt,  $n_1$  Anzahl für  $F$ ,  $n_2$  für  $K$ , so folgt für Mikrons als Längeneinheit:

$$F = K - 8 \pm 6,$$

wobei  $\pm 6$  den aus der Übereinstimmung berechneten mittleren Fehler bezeichnet. Dagegen folgt

$$F = I - 105 \pm 16.$$

Man kann hiernach in der That  $F - K$  als null annehmen, selbst wenn man berücksichtigt, daß bei genauerer Reduktion der Festlandsstationen die Differenz sich um ein paar Mikrons vergrößern würde. Von null verschieden ist aber unzweifelhaft die Differenz  $F - I$ . Vielleicht liegt dieses z. T. daran, daß die Inselreduktionen trotz entgegen wirkender Vernachlässigungen der Formel (4) des vorigen Paragraphen etwas zu klein sind, weil die Formel konstante Böschung voraussetzt, während diese vielleicht in der Nähe der Meeresfläche steiler als in größerer Tiefe ist. Zum Teil liegt es auch wohl an der Annahme 2,8 für die Dichtigkeit, die jedenfalls in mehreren Fällen einen um etwa 0,3 höheren Wert hat. Ein Teil der Differenz dürfte aber reell sein. Es läßt sich dieselbe auch nicht wesentlich vermindern durch eine ein wenig veränderte Tiefe der Kondensationsfläche. Die Formel (1) S. 223 zeigt, daß eine Vergrößerung der Inselreduktionen von durchschnittlich 130 auf 230 eine so außerordentliche Verkleinerung von  $n$  d. h. eine so bedeutende Vergrößerung der Tiefe der Kondensationsfläche erfordert, daß sich dadurch auch die Gestalt der Meeresfläche in einem Betrage ändern würde, der nicht mehr zu vernachlässigen ist.

Übrigens braucht man, wenn wirklich wie es scheint,  $I > F$  ist, noch nicht anzunehmen, daß auch auf dem Meere im allgemeinen die Länge des Sekundenpendels größer ist, als auf dem Festlande. Wenn die Inseln Massenanhäufungen sind, denen unterhalb in der Erdrinde nicht Massendefekte entsprechen, würde vielmehr notwendig  $I > F$  sein, wenn auch auf Meer und Festland im allgemeinen gleiche Länge des Sekundenpendels vorhanden wäre. Die Entscheidung der Frage kann nur durch Messungen der Schwerkraft auf dem Meere selbst erfolgen und wird einen Beitrag liefern zur Kenntnis der Konstitution der Erdrinde.\*)

\*) Man vergleiche hierzu auch einen Aufsatz von Faye, *C. R.* 1880 Bd. 90 S. 1444. Derselbe empfiehlt ebenfalls in der Bouguerschen Formel das Terrain-

Es mag bemerkt werden, daß eine ähnliche Frage die ist, ob auf den Bergen die Schwerkraft im allgemeinen, nach gehöriger Reduktion, eine andere ist als in der Ebene. Zur Entscheidung dieser Frage sind gerade in diesem Falle unsere Kondensationsrechnungen nicht scharf genug; wenn sie zeigen, daß auf hohen Bergen  $\mathfrak{K}'$  (mit Kondensation) größer ist als in der Ebene, am Fusse hoher Berge aber kleiner als in der Ebene (vergl. nachstehende Tabelle, deren Werte ohne und mit Kondensation mit 0,993550 als Normalwert für Festland im Meeresniveau verglichen werden können), so liegt dies, namentlich bei den Bergkuppen, größtenteils an Reduktionsfehlern.\*)

Ort.	Höhe. m	Ohne Kondensation $\mathfrak{K}'$	Mit Kondensation. $\mathfrak{K}''$	Bemerkungen.
Bangalore S...	950	0,99 3476	0,99 3587	} Plateau
„ N...	917	3487	3594	
Dehra .....	683	3331	3404	Fuß des Himalaya
Mussoorie .....	2109	3403	3623	Ausläufer des „
Meean Meer...	215	3452	3477	Fuß des „
Moré .....	4696	3034	3574	Himalaya
Ararat.....	1883	3400	3625	
Duschett.....	846	3346	3446	Fuß des Kaukasus
Gudaur .....	2247	3334	3599	Abhang des Kasbek
Wladikawkas ..	693	3501	3583	Pafs am „
Inselsberg ....	910	3543	3620	
Seeberg.....	353	3527	3557	
Gotha .....	315	3446	3473	Fuß des Seeberg.

Da sich die Anomalieen der vierten Kolumne durch genauere Rechnung vermindern oder heben, so scheint es, daß in der That

glied wegzulassen; für die Inseln aber empfiehlt er die Anziehung des Inselpfeilers, seine Dichtigkeit vermindert um 1, abzuziehen. Es ist nun in der That richtig, daß man auf diese Weise findet, daß auf dem Meere und Festland ein Unterschied der Schwere nicht besteht (wir haben dies für obige Inseln mittelst der im 4. Kapitel § 17 entwickelten Näherungsformel durchgeführt und zufällig gerade das gewünschte Resultat erhalten). Der Übelstand ist nur, daß man bei *Fayes* Verfahren von der Wahl der Pfeilerhöhe in hohem Grade abhängt, was bei der Kondensationsmethode nicht der Fall ist. Auch ist *Fayes* Verfahren kein methodisches: es giebt nicht an, wie die Reduktion wird bei nicht kleinen Inseln, bei Küsten u. s. w. Unser strenges Verfahren hat stets eine konsequente Antwort und läßt namentlich für den wichtigen Fall, daß Küsten in betracht kommen, nicht im stich.

\*) Im 6. Kap. § 16 wird erwähnt, daß wiederholt mit leidlichem Erfolge durch Bestimmung der Pendellänge am Fusse und auf dem Gipfel eines Berges

unter hohen Bergen und Gebirgen Massendefekte auftreten, die der Anziehung der sichtbaren Massenanhäufung entgegenwirken. Vergl. hierzu auch im 4. Kapitel § 38.

§ 32. Die Ermittlung der Interpolationsformel für die Schwerkraft  $g$ . Wäre  $g$  im Meeresniveau überall auf der Erdoberfläche bekannt, so würde man zur Herstellung einer Entwicklung von  $g$  nach Kugelfunktionen der geographischen Breite  $B$  und Länge  $L$  nach § 28 (1) S. 116 verfahren. Darnach ist  $g$  im Punkte  $(B', L')$  gleich

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} dL \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n g \cos B dB, \quad (1)$$

wobei die  $P_n$  als Funktionen von  $B', L', B$  und  $L$  (anstatt  $\varphi', \lambda', \varphi$  und  $\lambda$ ) nach Maßgabe von § 4 S. 57 aufzufassen sind. Leitet man andererseits  $g$  aus dem Potential  $W$  der Schwerkraft ab, so nimmt es die Form an:

$$g = G (1 + U_2' + U_3' + U_4' + \dots), \quad (2)$$

wenn  $U_2', U_3', U_4' \dots$  Kugelfunktionen von  $B'$  und  $L'$  zweiten, dritten, vierten, ... Ranges bedeuten. Auf diese Ableitung kommen wir in § 39 dieses Kapitels.

Eine Kugelfunktion ersten Ranges fehlt in (2), wie a. a. O. sich zeigen wird und überdies im zweiten Kapitel unter Voraussetzung gewisser Normalformen für  $W$  schon hervorgetreten ist.

Von dieser Formel interessiert uns besonders die Bestimmung der Glieder  $G$  und  $G U_2'$ . Dieselbe ergibt sich aus der Vergleichung mit den entsprechenden Gliedern in (1). Es ist, da  $P_0 = 1$ , das erste Glied von (1), (d. h. der Mittelwert aller  $g$ , vergl. S. 66):

$$G = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} dL \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g \cos B dB. \quad (3)$$

die mittlere Dichtigkeit der Erde bestimmt worden ist; in solchen Fällen würde natürlich die wegen Kondensation reduzierte Pendellänge des Gipfels ein erhebliches Zuviel aufweisen. Immer aber ist dies nicht der Fall. Dies zeigte oben bereits *Moré*.

So fand auch *Foster* auf *Ascension* auf einem 680<sup>m</sup> hohen Berge die tägliche Schwingungszahl  $n = 85878,96$ . Mit  $nH : R$  reduziert giebt das 85888,13. Am Fusse des Berges in 9<sup>m</sup> Höhe war  $n = 85887,44$ , reduziert: 85887,56. Hier ist nur ein Zuviel von 0,57 Schwingungen oder von 14 Mikrons in  $\mathfrak{T}$  (mit roher Kondensationsreduktion).

Nach *Laplace*, *Méc. cél.* t. 5 l. 11 p. 56, zeigen auch schon *Bouguers* Messungen in *Quito* eine ganz ähnliche Erscheinung; hier erklärt *Laplace* sich dieselbe durch den vulkanischen Charakter der Gegend, infolge dessen viele Hohlräume unterhalb der Bergmassen vorhanden sein würden.

Ferner ist das zweite Glied:

$$G U_2' = \frac{5}{4\pi} \int_0^{2\pi} dL \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_2 g \cos B dB, \quad (4)$$

wobei nach S. 57

$$\begin{aligned} P_2 = & \frac{9}{4} \left( \sin^2 B - \frac{1}{3} \right) \left( \sin^2 B' - \frac{1}{3} \right) \\ & + 3 \cos B \cos B' \sin B \sin B' \cos(L - L') \\ & + \frac{3}{4} \cos^2 B \cos^2 B' \cos 2(L - L'). \end{aligned} \quad (5)$$

Werden aber für die Entwicklung des Potentials  $W$  wie im zweiten Kapitel § 5 S. 59 die drei Hauptträgheitsachsen der Erde als Koordinatenachsen gewählt, so fallen in  $W$  und also auch in  $g$ , vergl. weiterhin § 39, die Glieder mit  $\cos L'$ ,  $\sin L'$  und  $\sin 2L'$  weg und es bleiben nur die Glieder mit  $\left( \sin^2 B' - \frac{1}{3} \right)$  sowie  $\cos 2L'$  übrig. Ganz ist dies indessen bei obiger Entwicklung nicht durchführbar: man bezieht zwar die Breiten auf die Äquatorebene, es ist also die eine Koordinatenaxe die Erdaxe und somit Hauptaxe, aber die geographischen Längen kann man nicht von einer der beiden in der Äquatorebene liegenden Hauptaxen abrechnen, weil deren Lage unbekannt ist. Werden nun die geographischen Längen von einem beliebigen Meridian ab gezählt, so verschwindet (wie schon S. 60 in Parenthese erwähnt) das Glied mit  $\sin 2L'$  nicht. Hiermit wird

$$\begin{aligned} G U_2' = & \frac{45}{16\pi} \left( \sin^2 B' - \frac{1}{3} \right) \int_0^{2\pi} dL \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g \left( \sin^2 B - \frac{1}{3} \right) \cos B dB \\ & + \frac{15}{16\pi} \cos^2 B' \cos 2L' \int_0^{2\pi} \cos 2L dL \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g \cos^3 B dB \\ & + \frac{15}{16\pi} \cos^2 B' \sin 2L' \int_0^{2\pi} \sin 2L dL \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g \cos^3 B dB. \end{aligned} \quad (6)$$

Durch Ausführung der Integrationen würde  $G U_2'$ , wenn man rechter Hand  $G$  als Faktor zieht, die Form annehmen

$$G U_2' = G \left\{ b_2 \left( \sin^2 B' - \frac{1}{3} \right) + b_2' \cos^2 B' \cos 2L' + b_2'' \cos^2 B' \sin 2L' \right\}. \quad (7)$$

Unterbleibt die Bestimmung von  $b_2'$  und  $b_2''$  ebenso wie diejenige der Koeffizienten der höheren Kugelfunktionen, so erhält man hiermit zur Ermittlung der Formel

$$g = G \left\{ 1 + b_2 \left( \sin^2 B' - \frac{1}{3} \right) + \dots \right\} \quad (8)$$

die beiden Gleichungen

$$G = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} dL \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g \cos B \, dB \quad (9)$$

$$G b_2 = \frac{45}{16\pi} \int_0^{2\pi} dL \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g \left( \sin^2 B - \frac{1}{3} \right) \cos B \, dB. \quad (10)$$

Nach diesen strengen Gleichungen kann jedoch die Ermittlung der Konstanten von (8) wegen mangelnden Beobachtungsmaterials nicht stattfinden. Man begnügt sich damit, und muß dies thun, den gegebenen Werten von  $g$  eine Formel (8), oder eine äquivalente Formel, nach der Methode der kleinsten Quadrate anzupassen.

Zunächst wollen wir nun zeigen, daß die Methode der kleinsten Quadrate streng richtige Werte ergeben würde, wenn  $g$  überall auf der Oberfläche bekannt wäre.

§ 33. Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate geht von Fehlergleichungen der Form

$$g + \delta = G + G b_2 \left( \sin^2 B' - \frac{1}{3} \right) + \dots \quad (1)$$

aus, wenn wir für  $g$  rechter Hand denjenigen Ausdruck beibehalten, welcher aus der Entwicklung nach Kugelfunktionen folgt, und wenn wir ferner mit  $\delta$  eine Verbesserung des Beobachtungswertes von  $g$  bezeichnen. Da man nun  $g$  innerhalb des Elementes  $d\sigma' = \cos B' dB' dL'$  der Kugeloberfläche vom Radius 1 als konstant betrachten darf, so legen wir der Gleichung (1) das Gewicht  $d\sigma$  bei und denken uns die ganze Oberfläche dieser Kugel in Elemente  $d\sigma'$  zerlegt und für jedes Element die Gleichung (1) angesetzt. Dann führt die übliche Bildung der Normalgleichungen zu den nachstehenden Gleichungen, die Integration über die ganze Kugeloberfläche erstreckt:

$$G \int d\sigma' = \int g \, d\sigma' \quad (2)$$

$$G b_2 \int \left( \sin^2 B' - \frac{1}{3} \right)^2 d\sigma' = \int g \left( \sin^2 B' - \frac{1}{3} \right) d\sigma' \quad (3)$$

u. s. f.

Jede Gleichung enthält nur einen der unbekannten Koeffizienten  $G$ ,  $G b_2$ , u. s. f. Bilden wir nämlich zunächst die Normalgleichung (2) für  $G$ , so ist die Fehlergleichung (1) mit  $1 \cdot d\sigma'$  zu multiplizieren und dann zu integrieren. In Gleichung (2) nimmt nun der aus der rechten Seite von (1) hervorgehende Ausdruck zunächst die Form an:

$$G \int d\sigma' + G \int U_2' d\sigma' + G \int U_3' d\sigma' + G \int U_4' d\sigma' + \dots,$$

wenn wir die rechte Seite von (1) in die Form

$$G(1 + U_2' + U_3' + U_4' + \dots)$$

gebracht denken, worin  $U_2'$ ,  $U_3'$ ,  $U_4'$  ... die Kugelfunktionen zweiten, dritten, vierten Ranges u. s. f. von  $B'$  und  $L'$  bezeichnen. Nach § 7 (5) S. 66 oder nach der allgemeinen Gleichung (3) § 28 S. 116 verschwinden aber alle Glieder mit Ausnahme des ersten. Hiermit ist (2) als richtig nachgewiesen.

Was (3) anbetrifft, so ist ersichtlich, daß diese Normalgleichung aus der Fehlergleichung (1) entstehen muß, wenn dieselbe mit  $(\sin^2 B' - \frac{1}{3}) d\sigma'$  multipliziert und integriert wird. Die Glieder, welche aus der rechten Seite entstehen, lauten zunächst:

$$\begin{aligned} & G \int (\sin^2 B' - \frac{1}{3}) d\sigma' + G \int U_2' (\sin^2 B' - \frac{1}{3}) d\sigma' \\ & + G \int U_3' (\sin^2 B' - \frac{1}{3}) d\sigma' + G \int U_4' (\sin^2 B' - \frac{1}{3}) d\sigma' + \dots \end{aligned}$$

und hier verschwinden alle Glieder bis auf das zweite nach dem Satze (4) § 28 S. 116. Es folgt also, wenn wir für  $G U_2'$  nunmehr den Ausdruck (7) S. 230 restituieren:

$$\begin{aligned} & G b_2 \int (\sin^2 B' - \frac{1}{3})^2 d\sigma' + G b_2' \int (\sin^2 B' - \frac{1}{3}) \cos^2 B' \cos 2L' d\sigma' \\ & + G b_2'' \int (\sin^2 B' - \frac{1}{3}) \cos^2 B' \sin 2L' d\sigma'. \end{aligned}$$

Man bemerkt leicht, daß wegen  $\cos 2L'$  und  $\sin 2L'$  die letzten beiden Integrale verschwinden, und so bleibt nur das erste Glied, womit auch Gleichung (3) verifiziert ist.

In gleicher Weise würde sich finden, daß bei der Bildung der Normalgleichungen aller Konstanten der in (1) etwa noch angesetzten Glieder immer nur das betreffende sogenannte quadratische Glied übrig bleibt.

Berechnet man nun zu (2) und (3) die Integrale linker Hand, nämlich

$$\int d\sigma' = 4\pi \tag{4}$$



und

$$\int \left( \sin^2 B' - \frac{1}{3} \right)^2 d\sigma' \quad \text{d. i.} \quad \int_0^{2\pi} dL' \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left( \sin^2 B' - \frac{1}{3} \right)^2 \cos B' dB' = \frac{16}{45} \pi, \quad (5)$$

so sieht man sofort, daß (2) und (3) für  $G$  und  $G b_2$  ganz dieselben Werte geben wie (9) und (10) des vorigen Paragraphen.

Mit Hilfe der S. 57 angegebenen Werte von  $P_3$  und  $P_4$  läßt sich die Übereinstimmung beider Methoden durch direkte Ausrechnung für alle Koeffizienten der Glieder bis zum vierten Range incl. nachweisen. Es ist dieses aber nicht nötig, wenn man Satz (2) § 28 S. 116 beachtet, welcher einen allgemeinen Nachweis der Übereinstimmung gestattet. Wir überlassen dieses aber dem Leser und beschränken uns darauf, nur an dem oben entwickelten Glied zweiten Ranges dieses Verfahren zu zeigen, welches leicht auf ein beliebiges Glied übertragen werden kann.

In Gleichung (2) S. 116 nehmen wir  $n = 2$  und  $K_2 = \sin^2 B - \frac{1}{3}$ ; dann verschwinden bei der Integration wegen des Auftretens von  $L$  in  $P_2$ , vergl. (5) S. 230, diejenigen Teile von  $P_2$ , die nicht in  $\left( \sin^2 B - \frac{1}{3} \right)$  multipliziert sind. Es entsteht also, da sich überdies der Faktor  $\left( \sin^2 B' - \frac{1}{3} \right)$  linker Hand gegen  $K_2' = \sin^2 B' - \frac{1}{3}$  rechter Hand aufhebt, die neue Relation:

$$\frac{5}{4\pi} \cdot \frac{9}{4} \int \left( \sin^2 B - \frac{1}{3} \right)^2 d\sigma = 1.$$

Aus (3) des laufenden Paragraphen folgt hiermit

$$G b_2 = \frac{5}{4\pi} \cdot \frac{9}{4} \int g \left( \sin^2 B' - \frac{1}{3} \right) d\sigma',$$

nicht wesentlich verschieden von Formel (10) des vorigen Paragraphen, dem Ergebnis der Entwicklung nach Kugelfunktionen.

§ 34. Fortsetzung. Da  $g$  nicht für die ganze Erdoberfläche gegeben ist, sondern nur in einzelnen Punkten, die ungleichmäßig verteilt sind, so giebt die Methode der kleinsten Quadrate nicht die richtigen Werte. Diese zu erlangen ist aber auf keinem Wege möglich. Übrigens ist die ungleichmäßige Verteilung wenigstens den geographischen Breiten nach, nicht beträchtlich, wie die Tabelle des § 31 S. 226 zeigt, wobei allerdings der Unterschied der Vorzeichen in den Breiten nicht beachtet ist. Eine gleichmäßige Verteilung nach den Breiten verlangt nämlich, daß die Anzahl der beobachteten Werte der Schwerkraft  $g$  bzw. der Pendellänge  $\mathfrak{L}$  in der Breite  $B$  proportional  $\cos B$ , nämlich proportional dem Radius des Parallel-

kreises auf der Kugel vom Radius 1 sei. Im grofsen und ganzen ist dieser Bedingung bei dem zur Zeit vorliegenden Beobachtungsmaterial genügt; man kann ihr aber bei der Ausgleichung dadurch noch besser nachkommen, dafs man den Fehlergleichungen in bevorzugten Breiten Gewichte kleiner als 1 erteilt. Übrigens hat die Gewichtsannahme thatsächlich bei der Auswertung des gegebenen Materials wenig Einflufs, wie wir weiterhin bei der numerischen Rechnung finden werden.

Weit ungleichmäfsiger als nach den Breiten überhaupt ist die Verteilung nach nördlichen und südlichen Breiten und nach den geographischen Längen. Dadurch erhalten die kontinentalen Glieder in  $g$  bzw.  $\mathfrak{K}$  (die Kugelfunktionen von höherem Range als dem zweiten) einen Einflufs, der weit schädlicher sein kann, als derjenige der Glieder lokalen Charakters. Denn während dieser mit dem Orte rasch wechselt und also den Charakter eines zufälligen Beobachtungsfehlers hat, wird jener oftmals ganze Gruppen von Beobachtungsorten in nahezu gleicher Weise beeinflussen.

Hierzu treten noch die Mängel der Reduktion, insofern nämlich die Kondensation nur die erkennbaren Massenunregelmäfsigkeiten berücksichtigen kann. Diese Mängel erzeugen Fehlerglieder lokalen und kontinentalen Charakters.

Die Fehler, welche bei der Ausgleichung infolge ungleicher Verteilung nach den geographischen Längen und infolge von Reduktionsmängeln in  $G$  und  $G\mathfrak{b}_2$  entstehen, kann man nach den Gleichungen (9) und (10) § 32 S. 231 schätzen, unter der Voraussetzung, dafs die Verteilung der  $g$  nach den Breiten, nördliche und südliche durcheinander gerechnet, proportional  $\cos B$  ist. Wir entwickeln die Formel zur Schätzung des Fehlers in  $G\mathfrak{b}_2$ .

Indem wir zunächst  $g$  als überall gegeben voraussetzen, denken wir uns für dieselbe Breite  $\pm B$  den Mittelwert  $g_B$  gebildet und haben sodann aus (10) S. 231

$$G\mathfrak{b}_2 = \frac{45}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_B \left( \sin^2 B - \frac{1}{3} \right) d(\sin B). \quad (1)$$

Durch die oben genannten Ursachen entstehen in den  $g_B$  Fehler  $\delta g_B$ , die man nach Gutdünken zu schätzen hat. Es ist dann der entsprechende Fehler in  $G\mathfrak{b}_2$  gleich

$$\delta(G\mathfrak{b}_2) = \frac{45}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \delta g_B \cdot \left( \sin^2 B - \frac{1}{3} \right) d(\sin B). \quad (2)$$

Für Gruppenbildung von 10 zu 10 Grad folgt näherungsweise richtig:

$$\delta (G h_2) = \frac{45}{4} \left\{ \begin{aligned} & \delta g_5 \cdot \left( \sin^2 5^\circ - \frac{1}{3} \right) (\sin 10^\circ - \sin 0^\circ) \\ & + \delta g_{15} \cdot \left( \sin^2 15^\circ - \frac{1}{3} \right) (\sin 20^\circ - \sin 10^\circ) + \dots \\ & + \delta g_{85} \cdot \left( \sin^2 85^\circ - \frac{1}{3} \right) (\sin 90^\circ - \sin 80^\circ) \end{aligned} \right\},$$

worin  $\delta g_5$ ,  $\delta g_{15}$  u. s. f. nun Mittelwerte der Fehler innerhalb der Gruppen  $0 - 10^\circ$ ,  $10 - 20^\circ$  u. s. f. bezeichnen. Ausgerechnet hat man die Näherungsrelation:

$$\begin{aligned} \delta (G h_2) = & - 0,64 \delta g_5 - 0,50 \delta g_{15} - 0,27 \delta g_{25} - 0,00 \delta g_{35} \\ & + 0,23 \delta g_{45} + 0,38 \delta g_{55} + 0,41 \delta g_{65} + 0,30 \delta g_{75} \\ & + 0,11 \delta g_{85}. \end{aligned} \quad (3)$$

Da nun die Länge  $\mathfrak{L}$  des Sekundenpendels proportional  $g$  ist und angenähert  $1''$  beträgt, so kann man hiernach auch setzen

$$\begin{aligned} \delta h_2 = & - 0,64 \delta \mathfrak{L}_5 - 0,50 \delta \mathfrak{L}_{15} - 0,27 \delta \mathfrak{L}_{25} - 0,00 \delta \mathfrak{L}_{35} \\ & + 0,23 \delta \mathfrak{L}_{45} + 0,38 \delta \mathfrak{L}_{55} + 0,41 \delta \mathfrak{L}_{65} + 0,30 \delta \mathfrak{L}_{75} \\ & + 0,11 \delta \mathfrak{L}_{85}. \end{aligned} \quad (3^*)$$

Mit Rücksicht auf das *Clairautsche* Theorem hat man noch für die Abplattung  $\mathfrak{a}$  sehr nahe

$$\delta \mathfrak{a} = - \delta h_2.$$

Diese Formeln gestatten u. a. den Einfluß der Inselstationen zu schätzen. Auf Inseln ist  $\mathfrak{L}$  sowohl ohne als mit Kondensation größer wie an Küsten und auf dem Festlande. Wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, ist ferner im Mittel für die nördliche und südliche Erdhälfte das Verhältnis von Wasser und Land in allen Breiten annähernd dasselbe. Die Tabelle des § 31 S. 226 zeigt aber, daß die Anzahl der Inselstationen keineswegs für verschiedene Breiten in konstantem Verhältnis zur Anzahl der Küsten- und Festlandsstationen, welche man zusammennehmen darf, steht. Eine Berechnung von  $h_2$  und  $\mathfrak{a}$ , welche diese ungleiche, rein zufällige Verteilung bestehen läßt, kann gar keinen Wert haben; denn eine Vermehrung der Anzahl der Stationen führt der Wahrheit nicht erkennbar näher. Bei den älteren bisherigen Berechnungen, vergl. 2. Kap. § 16 S. 85 u. ff., wurde  $\mathfrak{a}$  um  $1/259$  herum gefunden. Dabei war in äquatorialen Gegenden die Anzahl der Festlands- und Küstenstationen gering im Verhältnis zur Anzahl der Inselstationen. *Clarke* nahm neuerdings die indischen Stationen hinzu, vermehrte so in dieser Zone die Festlands- und Küstenstationen und mußte zufolge (3\*) und (4) einen größeren Wert für  $h_2$  und einen kleineren für  $\mathfrak{a}$  als frühere Rechner erhalten. Daß er den richtigen Werten näher gekommen sei, kann aber auf grund seiner Berechnung nicht behauptet werden.

Bezüglich des Ansatzes der Fehlergleichungen für die Ausgleichung ist es ganz gleichgültig, ob man nach (1) § 33 S. 231 ansetzt:

$$g + \delta = G + G b_2 \left( \sin^2 B - \frac{1}{3} \right) \quad (4)$$

oder

$$g + \delta = A + B \sin^2 B \quad (5)$$

nimmt. Es folgt dieses daraus, daß (5) aus (4) durch die linearen Substitutionen  $G = A + \frac{B}{3}$  und  $G b_2 = B$  hervorgeht und die dem Minimum der Fehlerquadrate entsprechenden Gleichungssysteme

$$\frac{\partial [\delta \delta]}{\partial G} = 0 \quad \frac{\partial [\delta \delta]}{\partial (G b_2)} = 0 \quad (4^*)$$

und

$$\frac{\partial [\delta \delta]}{\partial A} = 0 \quad \frac{\partial [\delta \delta]}{\partial B} = 0 \quad (5^*)$$

mittels jener Substitutionen in einander übergeführt werden können.

An Stelle von (5) kann man endlich auch die Form wählen:

$$g + \delta = C - D \cos 2B. \quad (6)$$

Ebenso wie  $g$  kann man auch die Länge  $\mathfrak{L}$  des mathematischen Sekundenpendels durch Formeln darstellen, die denen für  $g$  ganz analog sind, da  $g$  und  $\mathfrak{L}$  einander proportional sind. Dagegen ist es nicht erlaubt, die tägliche Schwingungszahl eines mathematischen Pendels von konstanter Länge  $l$  in ganz derselben Weise zu behandeln. Nach der Formel für die Schwingungszeit

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

ist die Schwingungszahl  $n$  proportional  $\sqrt{g}$ . Geht man daher von  $n$  aus, so muß die Form  $p + q \sin^2 B$  für  $n^2$  gewählt werden und nicht für  $n$  selbst, d. h. man muß setzen

$$n^2 + \delta = p + q \sin^2 B \quad (7)$$

und  $[\delta \delta]$  zu einem Minimum machen. Da  $n$  wenig variiert, darf man auch, wie u. a. *Baily* und *Clarke* gethan haben, setzen:

$$(n + \delta)^2 = p + q \sin^2 B, \quad (8)$$

wobei dann rechter Hand  $\delta^2$  zu vernachlässigen und die Summe der  $(n\delta)^2$ , oder was nahezu dasselbe giebt, der  $\delta^2$ , zu einem Minimum zu machen ist.

Würde man aber (wie *Borenius*, vergl. die Anmerk. S. 87) die Gleichung

$$n + \delta = p_1 + q_1 \sin^2 B \quad (9)$$

ansetzen, so würde man damit eine Formel zu grunde legen, die der gesuchten Formel (4) gar nicht entspricht, beim Übergang zu  $g$

noch ein Glied vierten Ranges und trotzdem nicht die besten Werte von  $G$  und  $Gh_2$  ergibt.

Es ist hier der Ort, auf eine scheinbare Differenz mit den Angaben auf S. 43 von *H. Bruns, Figur der Erde*, hinzuweisen. Dasselbst wird behauptet und durch ein Beispiel erläutert, daß die Methode der kleinsten Quadrate in ihrer Anwendung auf die Schwere wegen der Störungen auch bei gleichmäßiger Verteilung der Angaben für  $g$  nicht notwendig denjenigen Wert von  $h_2$  liefert, den man im Sinne des zweiten Kapitels zur Bestimmung eines Niveausphäroids erwartet. Dies steht in direktem Gegensatz zu unseren Angaben, jedoch wesentlich nur deshalb, weil wir uns  $g$  wegen Kondensation gewisser Massen in der Erdkruste reduziert denken, während *Bruns* den wie üblich aufs Meeresniveau ohne Kondensation reduzierten Wert  $g$  voraussetzt. *Stokes* dagegen glaubte auch ohne Reduktion wegen Kondensation das richtige  $h_2$  zu erhalten; es ist also für diese Ansicht durch *Bruns* eine Berichtigung gegeben. Aber letzterer teilt nicht mit, wie zu dem besten Werte von  $h_2$  zu gelangen oder wie der Fehler bei dem Ergebnis des gewöhnlichen Verfahrens zu schätzen ist. Unsere Methode hat nun u. a. den Vorteil, zu einer Schätzung dieses Fehlers zu führen: man hat nur nötig, Formel (3) auf die geschätzten Kondensationsbeträge anzuwenden und daraus  $\delta h_2$  sowie mittelst *Clairauts Theorem*  $\delta a$  zu berechnen. Sie giebt auch wesentlich dasselbe Niveausphäroid, welches *Bruns* annimmt, weil die Kondensation Schwerpunktslage, Axenlage und Trägheitsmomente der Erde nur unerheblich ändert, sodaß in den, den Niveausphäroiden  $U$  zu grunde gelegten einfachen Potentialausdrücken bei *Bruns* und hier (im 2. Kapitel) wesentlich dieselben Konstanten auftreten.

Wir müssen nun allerdings erwähnen, daß immerhin auch nach Berücksichtigung der Kondensation sich für die theoretische Richtigkeit der *Brunsschen* Behauptung noch ein Grund ergibt, den wir gleich hier im Anschlusse an den weiterhin folgenden § 39 erledigen. Dasselbst wird nach einem Näherungsverfahren aus dem allgemeinen Ausdrucke für das Potential  $W$  der allgemeine Ausdruck für  $g$  in Kugelfunktionen abgeleitet. Wenn man diese Entwicklung dahin verbessert, daß bei Ableitung von  $g$  aus Gleichung (4) daselbst für  $r'$  überall, wo einfach  $R$  gesetzt ist, der elliptische Wert angewandt wird, so erscheint der Koeffizient  $h_2$  beeinflusst von den Koeffizienten der höheren Kugelfunktionen von  $W$ : er gestaltet sich somit etwas anders als bei der Entwicklung aus  $U$ . Da nun die oben behandelte Berechnung einer Interpolationsformel für  $g$  den ersteren Wert von  $h_2$  ergibt, so paßt dieser nicht streng zu dem Niveausphäroid. Allein die Substitution von  $R$  für  $r'$  genügt, wie auch am Schlusse von § 39 bemerkt wird, und wie man leicht verifizieren kann, völlig für Kugelfunktionen von mäßig hohem Range, wie sie kontinentalen Störungen entsprechen. Den lokalen Störungen genügt die Rechnung freilich nicht; diese äußern sich aber wenig in der Form des Geoids, vielmehr wesentlich nur in  $g$ , woselbst sie gleiche Ordnung wie die kontinentalen erlangen. Ihr Einfluß auf  $h_2$  kann indessen aus den Abweichungen der Einzelwerte  $g$  gegen die Interpolationsformel seinem mittleren Betrage nach geschätzt werden, wenn man die hierbei unschädliche Fiktion macht, daß alle diese Abweichungen lediglich zufälligen Ursprungs seien.

### § 35. Ableitung einer Interpolationsformel für die Länge des Sekundenpendels und für die Schwerkraft.

Wir untersuchen zuerst die Verteilung von Festland  $F$  und Meer  $M$  in verschiedenen Breiten für die nördliche und südliche Erdhälfte, sowie für beide zusammen. Folgende Tabelle zeigt die Anzahl der Längengrade für beide Charaktere  $F$  und  $M$ .

Breite	Nord		Süd		Zusammen	
	$F$	$M$	$F$	$M$	$F$	$M$
0° — 10°	100°	260°	110°	250°	210°	510°
10 — 20	120	240	90	270	210	510
20 — 30	150	210	90	270	240	480
30 — 40	170	190	40	320	210	510
40 — 50	210	150	10	350	220	500
50 — 60	230	130	—	360	230	490
60 — 70	290	70	30	330	320	400
70 — 80	120	240	90	270	210	510

Es zeigt sich hier die merkwürdige Thatsache, daß für die nördliche und südliche Erdhälfte zusammengenommen  $F$  in nahezu konstantem Verhältnis zu  $M$  steht. Infolge dieses Umstandes ist es möglich unter der Voraussetzung, daß in allen Breiten die Schwerkraftsdifferenz  $M - F$  konstant ist, ohne Kenntnis der Schwerkraft auf dem Meere, nur aus den Beobachtungen der Schwerkraft auf dem Lande, den zur Berechnung der Abplattung  $\alpha$  geeigneten Wert von  $b_2$  abzuleiten. Die Inselbeobachtungen, welche doch nicht die Schwerkraft auf dem offenen Meere geben, lassen wir als zu ungleichmäßig verteilt außer acht.

Verstehen wir unter  $\mathfrak{L}$  eine beobachtete und gehörig aufs Meeresniveau, sowie wegen Kondensation reduzierte Länge des Sekundenpendels, so setzen wir mit Rücksicht auf S. 236 (6), wenn  $\delta$  eine Verbesserung,  $B$  die geographische Breite und  $x$  und  $y$  zu bestimmende Konstanten sind:

$$\mathfrak{L} + \delta = x - y \cos 2B. \quad (1)$$

Für  $y$  setzen wir unter Einführung eines Näherungswertes

$$0,002636 \left(1 - \frac{\eta}{100}\right)$$

und erhalten

$$\mathfrak{L} + \delta = x - 0,002636 \left(1 - \frac{\eta}{100}\right) \cos 2B$$

oder  $\mathfrak{L}' + \delta = x + 0,0002636 \cos 2B \cdot \eta, \quad (2)$

wobei  $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L} + 0,002636 \cos 2B \quad (3)$

ist. Die Werte von  $\mathfrak{L}'$  für die einzelnen Orte giebt die Haupttabelle § 29 S. 215 u. ff. und nach derselben die Tabelle § 31 S. 226 für Gruppenmittel. Diese Vereinigung in Gruppenmittel empfiehlt sich, um die nach § 34 notwendige Verteilung nach der geographischen Breite annähernd herzustellen. Darnach soll die Anzahl der Beobachtungen in der Breite  $B$  proportional  $\cos B$  sein. Es ist daher den Gruppenmitteln strenggenommen ein Gewicht proportional dem Mittelwerte von  $\cos B$  für die Gruppe beizulegen.

Um auch in geographischer Länge innerhalb jeder Gruppe eine möglichst günstige Verteilung herzustellen, vereinigen wir im allgemeinen in jeder Gruppe die Werte von  $\mathfrak{L}'$  für  $F$  und  $K$  zu einem einfachen Mittel mit Rücksicht darauf, daß die  $K$ -Werte besser verteilt sind, als die  $F$ -Werte. In einigen Fällen wird aber davon abgewichen. Der Vorgang ist im einzelnen folgender:

Gruppe 0 — 10°. Da für  $F$  nur ein Wert existiert, werden die Werte  $\mathfrak{L}'$  für  $F$  und  $K$  mit Rücksicht auf ihre Anzahlen 1 und 8 zu einem Mittel vereinigt. Strenggenommen ist hierbei noch die Differenz  $F - K = -8$  zu berücksichtigen, die wir aber als zu unsicher ignorieren. Das Mittel wird 0,993568.

Gruppe 10 — 20° bis mit 50 — 60°. Hier wird einfach gemittelt ohne Rücksicht auf die Anzahlen. Das ist sehr nötig, weil von 10—30° alle  $F$ -Werte lediglich in Indien genommen sind und bei 50 — 60° nur in Europa; bei 30—40° und 40—50° sind sie zwar etwas besser verteilt, doch auch nur auf zwei oder drei Gebiete.

Gruppe 60 — 70°. Hier giebt es zwar nur  $F$ -Werte, indessen haben dieselben teilweise nahezu Küstencharakter bei leidlicher Verteilung.

Gruppe 70 — 80°. Hier ist nach der Anzahl zu mitteln; Verteilung ziemlich gut.

Die zu (2) notwendigen Faktoren  $0,0002636 \cos 2B$  oder  $26,36 \cos 2B$  in Mikrons giebt für die einzelnen Gruppen die letzte Kolumne der Tabelle S. 226. Dieselben sind für die Mittelwerte der  $\mathfrak{L}'$  aus den  $F$ - und  $K$ -Werten in derselben Weise zu vereinigen wie die  $\mathfrak{L}'$  selbst. Damit ergeben sich nachstehende Fehlergleichungen, Mikrons als Längeneinheit genommen:

99 3568	+ $\delta_1$	=	$x + 25,5 \eta$	(4)
3559	+ $\delta_2$	=	$x + 22,9 \eta$	
3528	+ $\delta_3$	=	$x + 17,5 \eta$	
3552	+ $\delta_4$	=	$x + 10,4 \eta$	
3551	+ $\delta_5$	=	$x + 1,5 \eta$	
3555	+ $\delta_6$	=	$x - 8,0 \eta$	
3540	+ $\delta_7$	=	$x - 16,2 \eta$	
3549	+ $\delta_8$	=	$x - 22,5 \eta$	



Sehen wir nun zunächst von der Annahme der Gewichte proportional zu  $\cos B$  ab und nehmen für alle Gleichungen das Gewicht 1 an, so folgt aus (4) durch Bildung der Normalgleichung für  $x$  nach Division mit 8:

$$993550 = x + 3,9 \eta . \quad (5)$$

Zieht man diese Gleichung von den Gleichungen (4) ab, so ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} 18 + \delta_1 &= 21,6 \eta \\ 9 + \delta_2 &= 19,0 \eta \\ -22 + \delta_3 &= 13,6 \eta \\ 2 + \delta_4 &= 6,5 \eta \\ 1 + \delta_5 &= -2,4 \eta \\ 5 + \delta_6 &= -11,9 \eta \\ -10 + \delta_7 &= -20,1 \eta \\ -1 + \delta_8 &= -26,4 \eta , \end{aligned} \quad (6)$$

deren Summe, abgesehen von den  $\delta$ , wie es sein muß, hinreichend gleich null ist.

Als Normalgleichung für  $\eta$  folgt aus (6):

$$439 = 2304 \eta ; \quad (7)$$

es wird daher

$$\eta = +0,19 \quad \text{und} \quad y = 0,002631 ,$$

und ferner mit Rücksicht auf (5):

$$\mathfrak{F} = 0,993549 - 0,002631 \cos 2B ,$$

oder unter Einführung von  $\sin^2 B$ :

$$\mathfrak{F} = 0,990918 + 0,005262 \sin^2 B = 0,990918 \{ 1 + 0,005310 \sin^2 B \} . \quad (8)$$

Die Verbesserungen  $\delta$  werden in Mikrons

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -13,9 & \delta_5 &= -1,5 \\ \delta_2 &= -5,4 & \delta_6 &= -7,3 \\ \delta_3 &= +24,6 & \delta_7 &= +6,2 \\ \delta_4 &= -0,8 & \delta_8 &= -4,0 \end{aligned}$$

Hieraus folgt  $[\delta \delta] = 937$  und der mittlere Fehler  $\mu$  einer Gleichung demnach gleich

$$\mu = \sqrt{\frac{937}{6}} = \pm 12,6 .$$

Mit Rücksicht auf (7) wird darnach der mittlere Fehler in  $\eta$  gleich

$$\frac{12,6}{\sqrt{2304}} \quad \text{d. i.} \quad \pm 0,26 ;$$



es ist somit  $y$  mit seinem mittleren Fehler gleich

$$y = 0,002631 (1 \pm 0,0026) .$$

Endlich folgt hieraus der mittlere Fehler des Koeffizienten 5310 von  $\sin^2 B$  in (8) gleich  $\pm 14$ . Als Resultat der Ausgleichung ergibt sich somit *die Länge des mathematischen Sekundenpendels für Festland und Küsten, nach der Kondensationsmethode aufs Meeresniveau reduziert, gleich*

$$\mathfrak{L} = 0,990918 \left\{ 1 + [0,005310 \pm 14] \sin^2 B \right\} \text{ Meter} . \quad (8^*)$$

Durch Multiplikation mit  $\pi^2$  wird für die entsprechend reduzierte *Schwerkraft* erhalten

$$g = 9,7800 \left\{ 1 + [0,005310 \pm 14] \sin^2 B \right\} \text{ Meter} . \quad (9)$$

Im zweiten Kapitel S. 85 ist hierzu die Abplattung berechnet worden; mit Angabe des mittleren Fehlers wird

$$\alpha = 0,0033416 \pm 140 = \frac{1}{299,26 \pm 1,26} . \quad (10)$$

§ 36. Fortsetzung: Plausible Grenzen der Abplattung. Wir haben zunächst noch nachzuweisen, daß die Vernachlässigung in der Gewichtsannahme bei der Ausgleichung des Systemes (4) keinen wesentlichen Fehler giebt. Die mittleren Werte von  $\cos B$ , also die Gewichte, sind für die Gleichungen (4) der Reihe nach sehr nahe

1,00	0,71
0,97	0,57
0,91	0,42
0,82	0,26 .

Bildet man hiermit die Normalgleichungen, so findet sich  $x$  wie früher, ferner

$$\eta = + 0,25$$

und

$$y = 0,002629 ,$$

mithin kein wesentlich anderes Resultat.

Wir weisen jetzt nach, daß die südliche Halbkugel, wo weniger Beobachtungen als auf der nördlichen vorliegen, keine nennenswerte Abweichung von der nördlichen verrät. Zu diesem Zwecke stellen wir nach der Tabelle des § 29 S. 215 die Verbesserungen zusammen, die sich für die südlichen Stationen ergeben. Da die Werte in der Tabelle mit  $0,002636 \cos^2 B$  reduziert sind, ist noch eine kleine Verbesserung wegen des Überganges auf  $0,002631 \cos^2 B$  anzubringen und sodann mit 0,993549 zu vergleichen.

Südstationen.

Ort	Breite	$\varphi''$	Verb.	Char.	Mittel- werte der Verb.
Rawak.....	0°	0,99 3572	— 23	(I)	} — 4
Para.....	1	3567	— 18	K	
Maranham .....	3	3519	+ 30	(I)	
Fernando .....	4	3567	(— 18)	I	
Ascension .....	8	3578	(— 29)	I	} + 1
Bahia .....	13	3548	+ 1	K	
St. Helena.....	16	3642	(— 93)	I	
Isle de France...	20	3640	(— 91)	I	
Rio Janeiro .....	23	3534	+ 15	K	+ 15
Valparaiso .....	33	3526	+ 23	K	} — 17
Paramatta.....	34	3533	+ 16	K	
Port Jackson ....	34	3588	— 39	K	
Kap d. g. Hoffn..	34	3639	— 90	K	
Montevideo.....	35	3542	+ 7	K	} — 2
Falkland Inseln ..	52	3544	+ 5	(I)	
		3462	+ 87		
Staten Jsland ....	55	3611	— 62	(I)	
Kap Horn .....	56	3586	— 37	K	
Süd Shetland Ins.	63	3615	(— 66)	I	

Schließt man die *I*-Werte aus, so bemerkt man in der That kein Vorherrschen eines Vorzeichens der Verbesserung. Hiermit ist eine wesentliche Grundlage unserer Rechnung ziemlich gesichert: die Gleichheit beider Erdhälften, wenigstens insoweit Festland- und Küstenmessungen dies erkennen lassen.

Was die andere Grundlage anlangt, daß die Differenz der Pendellängen für Meer und Festland in allen Breiten konstant sei, so ist allerdings hierfür das Beobachtungsmaterial sehr dürftig, da in höheren Breiten nur eine Insel, Süd-Shetland, vorkommt. Jedoch bestätigt auch diese die Annahme der Konstanz der Differenz  $M - F$ .

Nehmen wir aber einmal an, daß in höheren nördlichen und südlichen Breiten diese Differenz nur halb so groß sei wie am Äquator und von hier nach den Polen hin allmählich abnahme, so ist leicht zu erkennen, daß nun zwei Drittel des Betrages der halben Differenz für äquatoriale Gegenden auf Verminderung des Koeffizienten 5310 in (9) wirken, weil nach der Tabelle auf S. 238 in geographi-

scher Länge die Verteilung von Festland und Meer rund wie 1 : 2 sich verhält. Setzen wir nach S. 227, indem wir für  $M - F$  schätzungsweise  $I - F$  nehmen,  $M - F$  am Äquator gleich 100, so würde sich also 5310 um  $\frac{2}{3} \cdot 50$  d. i. 33 vermindern und in 5277 übergehen, die Abplattung aber würde von 0,0033416 auf 0,003375 oder  $\frac{1}{296}$  anwachsen.

Eine noch grössere Abplattung erscheint uns nicht wahrscheinlich; jedenfalls ist  $\frac{1}{289}$ , zu dem Koeffizienten 5200 gehörend, zu groß. Denn um diesen Koeffizienten herauszubringen, muß man annehmen, daß die Differenz  $M - F$  am Äquator um 160 Mikrons größer ist als an den Polen. Dieser Betrag ist selbst mit Rücksicht auf vernachlässigte, unbekannte Kondensationseffekte höchst unwahrscheinlich. Auch derjenige Wert, den *Clarke* sowohl aus den Gradmessungen wie aus den Pendelbeobachtungen für die Abplattung  $\alpha$  findet (vergl. Bd. 1 S. 610 und Bd. 2 S. 89), nämlich  $\frac{1}{294}$ , erscheint uns nicht sehr wahrscheinlich.

Wie wir weiterhin im 6. Kapitel § 7 finden, führen die Mondstörungen zu dem Werte  $\alpha = \frac{1}{297,6}$ , und obgleich dieser Wert zufolge seiner Ableitung um mehrere Einheiten unsicher erscheint, giebt er doch eine wertvollere Kontrolle als die Gradmessungen für das Ergebnis der Pendelmessungen und dient zur Bestätigung unserer Rechnung. Im 6. Kapitel werden wir ferner sehen, daß wohl diese Abplattung, aber nicht  $\frac{1}{289}$ , mit den Ergebnissen der Präzession und Nutation zu einer plausiblen Funktion für die Dichtigkeitsänderung im Erdinnern führt.

Die Haupttabelle § 29 S. 215 u. ff. zeigt die Abweichungen der einzelnen Längen  $\mathfrak{L}''$  von den entsprechenden Formelwerten, wobei allerdings nicht der günstigste Koeffizient 2631, sondern 2636 zur Anwendung gelangt ist, was jedoch bei der Größe der Einzelabweichungen bedeutungslos bleibt. Diese Einzelabweichungen machen ganz den Eindruck lokaler Anomalien; nur bei den Inseln ist vielleicht ein Teil kontinental, jedoch gestattet das vorliegende Beobachtungsmaterial nicht dieses zu entscheiden. (Vergl. S. 227 sowie § 38 im 4. Kap.)

### § 37. Die Schwerkraft auf der physischen Erdoberfläche.

Im § 20 des 2. Kap. S. 97 ist angegeben worden, wie man mittelst der Formel, welche die Variation der normalen Schwerkraft im Meeresniveau mit der Breite darstellt, für einen Ort in der Meereshöhe  $H$  den normalen Wert der Schwerkraft ableiten kann. Wenn nun an einem Orte der physischen Erdoberfläche  $g$  nicht beobachtet ist, so kann die Frage von Interesse sein, welche Verbesserungen am Normalwerte von  $g$  anzubringen sind, um dem wirklichen Werte

möglichst nahe zu kommen. Insbesondere fragt es sich, inwieweit die Anziehung des Terrains zwischen physischer und mathematischer Erdoberfläche zu berücksichtigen ist.

Wenn wir aber auf die Ableitung der Formel (9) für die Schwerkraft  $g$  bzw. (8\*) für die Länge des Sekundenpendels  $\mathfrak{L}$  im Meeresniveau auf S. 241 zurückblicken, so kann es nicht zweifelhaft sein, daß der Übergang vom Meeresniveau zu der Meereshöhe  $H$  so zu geschehen hat, als erfolge er in freier Luft. Denn bei dem umgekehrten Übergang eliminiert sich durch die Kondensationsmethode die Terrainanziehung ebenfalls — wenn auch nicht vollständig, so doch größtenteils. Die Vorschriften im § 20 S. 97 reichen daher völlig aus, um für die physische Erdoberfläche  $g$  aus Formel (9) S. 241 (und entsprechend  $\mathfrak{L}$ ) herzuleiten. Eine Berücksichtigung der Terrainanziehung im Sinne des Gliedes (3) S. 164 würde im allgemeinen von der Wahrheit entfernen. Nur für kleine Inseln im offenen Ocean hat man den erhaltenen Wert der Pendellänge um etwa 200 Mikrons zu vergrößern, wie die Angaben auf S. 226 erkennen lassen.

Die Fehler, welche in dieser Weise berechnete Pendellängen gegen die wirklichen haben können, zeigt die Kolumne „Verb.“ der Tabelle des § 29 S. 215 u. ff.; nur ist bei den Inselwerten  $+ 100$  hinzuzufügen. Die mittlere Abweichung, berechnet aus den ersten Potenzen, (*Ausgleichsrechnung* S. 19) wird gleich:

$$\pm 34 \text{ Mikrons}$$

oder

$$\pm \frac{1}{30000} \text{ des Betrages}$$

von  $g$  bzw.  $\mathfrak{L}$ .

**§ 38. Allgemeines über die Ermittlung kontinentaler Undulationen des Geoids.** Nachdem in diesem Kapitel eine solche Reduktion der Schwerebeobachtungen auf den Meeresspiegel angegeben worden ist, daß die Entwicklung der Potentialfunktion  $W$  der Schwerkraft nach negativen Potenzen des Radiusvektors außerhalb bis zur Geoidfläche gültig erscheint und die hierauf aufgebauten Entwicklungen des zweiten Kapitels einwurfsfrei sind, entsteht die Frage, ob es möglich ist, aus den Schwerebeobachtungen die Form des Geoids im Detail zu erkennen. Denn das zweite Kapitel lehrt nur die Bestimmung der Form irgend eines Niveausphäroids, entsprechend einer einfachen Interpolationsformel für die Beschleunigung  $g$  der Schwerkraft im Meeresniveau, eines Niveausphäroids, das mit einem Rotationsellipsoid fast ganz identisch ist: des Normalsphäroids (§ 17 S. 89). Wenn wir uns aber den hierbei eingeschlagenen Gang vergegenwärtigen, so leuchtet ein, daß es nur einer Interpolationsformel mit mehr Gliedern für  $g$  bedarf, um die Formen des Geoids detaillierter zu erkennen.

Allein dieser sich unmittelbar darbietende Weg ist praktisch von geringer Bedeutung, erstens wegen zu geringen Materials an Beobachtungen für  $g$ , zweitens wegen der Schwierigkeit der Ableitung einer gliederreichen Interpolationsformel. Der erste Grund führt zu einer Änderung der Methode, der zweite zu einer Änderung der Rechnungsvorschriften. Unter der Voraussetzung genügenden Beobachtungsmaterials hat *Stokes* eine Formel gegeben, um ohne Ableitung einer Interpolationsformel die Abweichung des Geoids von einem gewissen einfachen Niveausphäroid an irgend einer Stelle zu berechnen. Man kann diese Formel als eine strenge bezeichnen; sie bedarf aber eigentlich zu ihrer Anwendung die Kenntnis von  $g$  auf der ganzen Oberfläche. Kennt man  $g$  nur an einer Stelle und will hieraus, d. h. aus seiner Abweichung von dem entsprechenden Wert der dem Niveausphäroid zu grunde liegenden Formel, die Abweichung des Geoids an der betreffenden Stelle berechnen, so kann das offenbar ohne Hypothesen (welche die mangelnde Kenntnis von  $g$  auf der ganzen Oberfläche ersetzen) nicht geschehen. Diese Methode führt also nur zu Näherungsformeln. Leider wird sich zeigen, daß diese Formeln wertlos sind und selbst bei gehöriger Vervollständigung wohl eine Bedeutung, aber nicht die gewünschte, erlangen.

Alle diese Wege sind analytischer Natur. Ein synthetischer bietet sich dar bei der (sicher nicht korrekten) Annahme, daß die sichtbaren Massenunregelmäßigkeiten der Erdrinde allein Ursache der Abweichungen des Geoids seien. Das Potential  $T$  dieser Unregelmäßigkeiten läßt sich schätzen, und das *Brunssche* Theorem (§ 5 S. 148) gestattet sodann die Berechnung der Abweichungen. Dieser Weg, obwohl nicht geeignet zur Ermittlung der wahren Beträge der Abweichungen des Geoids, bietet doch viel Interesse. Er wird den Gegenstand des vierten Kapitels bilden, während wir hier noch die anderen, oben angedeuteten Fragen erörtern.

§ 39. **Strenge Relationen für die Abweichungen des Geoids vom zugehörigen Normalsphäroid.** Das Potential  $W$  der Schwerkraft setzt sich zusammen aus dem Potential  $V$  der Anziehung und dem Potential der Zentrifugalkraft. Es ist also, vergl. § 5 (7) S. 60:

$$W = V + \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 \cos^2 \varphi' \quad (1)$$

und dabei mit Rücksicht auf S. 66 § 7 (4):

$$V = \frac{K_0'}{r'} + \frac{K_2'}{r'^3} + \frac{K_3'}{r'^4} + \frac{K_4'}{r'^5} + \dots \quad (2)$$

Hierbei sind  $r'$ ,  $\varphi'$  und  $\lambda'$  bzw. Radiusvektor, geozentrische Breite und Länge des angezogenen Punktes, und es bezeichnen  $K_0'$ ,  $K_2'$ ,  $K_3'$ ,  $K_4'$  u. s. f. Kugelfunktionen von  $\varphi'$  und  $\lambda'$  nullten, zweiten, dritten, vierten

Ranges u. s. f. Die besonderen Werte von  $K_0'$  und  $K_2'$  zeigt die erwähnte Gleichung (4) unschwer, speziell  $K_0'$  ist gleich  $Mk^2$ . Im Vergleich zu dort ist jetzt  $Mk^2$  in  $K_3'$  u. s. f. mit inbegriffen.

Multipliziert man Gleichung (1) mit  $r' : W$ , so folgt mit Rücksicht auf (2):

$$r' = \frac{1}{W} \left\{ K_0' + \frac{K_2'}{r'^2} + \frac{K_3'}{r'^3} + \frac{K_4'}{r'^4} + \dots + \frac{1}{2} \omega^2 r'^3 \cos^2 \varphi' \right\}. \quad (3)$$

Andrerseits wird die radiale Komponente der Schwerkraft gleich

$$- \frac{\partial W}{\partial r'} = \frac{1}{r'^2} \left\{ K_0' + \frac{3K_2'}{r'^2} + \frac{4K_3'}{r'^3} + \frac{5K_4'}{r'^4} + \dots - \omega^2 r'^3 \cos^2 \varphi' \right\}. \quad (4)$$

Beide Gleichungen denken wir uns auf die Geoidfläche  $W' = W_0$  bezogen. Wenn wir nun dieselbe Genauigkeit in den weiteren Entwicklungen festhalten wie in § 10 und § 11 des zweiten Kapitels S. 72 u. ff., dabei aber die Glieder mit  $K_3'$ ,  $K_4'$  u. s. f. ebenso berücksichtigen wie dasjenige mit  $K_2'$ , so ist zunächst  $-\frac{\partial W}{\partial r'}$  gleich der Schwerkraft  $g$  selbst, und es ist ferner (unter einer gewissen noch zu besprechenden Voraussetzung) erlaubt, rechter Hand von (3) und (4) in den Parenthesen für  $r'$  den mittleren Radius  $R$  einzuführen. Diese Gleichungen gehen hiermit, und wenn wir (um alles in Kugelfunktionen darzustellen) für  $\cos^2$  schreiben  $\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} - \sin^2\right)$ , über in:

$$r' = \frac{1}{W_0} \left\{ \left( K_0' + \frac{1}{3} \omega^2 R^3 \right) + \frac{1}{2} \omega^2 R^3 \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) + \frac{K_2'}{R^2} + \frac{K_3'}{R^3} + \frac{K_4'}{R^4} + \dots \right\} \quad (5)$$

und

$$g = \frac{1}{r'^2} \left\{ \left( K_0' - \frac{2}{3} \omega^2 R^3 \right) - \omega^2 R^3 \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) + \frac{3K_2'}{R^2} + \frac{4K_3'}{R^3} + \frac{5K_4'}{R^4} + \dots \right\}. \quad (6)$$

Mit Rücksicht auf die Bemerkung zu Gleichung (5) S. 66 ist das Glied nullten Ranges in (5) der Mittelwert  $R$  der Radienvektoren der Geoidfläche (im Sinne von S. 66), und man hat daher

$$R = \frac{1}{W_0} \left( K_0' + \frac{1}{3} \omega^2 R^3 \right) = \frac{K_0'}{W_0} \left( 1 + \frac{1}{3} \tau \right), \quad (7)$$

sowie ferner, immer mit gleicher Genauigkeit der Entwicklungen:

$$r' = R \left\{ 1 + \frac{1}{2} \tau \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) + \frac{K_2'}{K_0' R^2} + \frac{K_3'}{K_0' R^3} + \frac{K_4'}{K_0' R^4} + \dots \right\}, \quad (8)$$

wobei für  $\omega^2 R^3 : K_0'$  das Symbol  $\tau$  gesetzt wurde, welches hier als übereinstimmend mit der in (12) § 11 S. 76 eingeführten Größe  $\tau$  zu betrachten ist.

Hieraus folgt

$$\frac{1}{r'^2} = \frac{1}{R^2} \left\{ 1 - \tau \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) - \frac{2K_2'}{K_0'R^2} - \frac{2K_3'}{K_0'R^3} - \frac{2K_4'}{K_0'R^4} - \dots \right\}$$

und durch Substitution dieses Ausdrucks für  $1 : r'^2$  in (6) mit üblichen Vernachlässigungen:

$$g = \frac{K_0'}{R^2} \left\{ \left( 1 - \frac{2}{3} \tau \right) - 2 \tau \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) + \frac{K_2'}{K_0'R^2} + \frac{2K_3'}{K_0'R^3} + \frac{3K_4'}{K_0'R^4} + \dots \right\}. \quad (9)$$

Der Mittelwert von  $g$  im Sinne von S. 66 ist hiernach

$$G = \frac{K_0'}{R^2} \left( 1 - \frac{2}{3} \tau \right). \quad (10)$$

Wir führen denselben in den Ausdruck (9) für  $g$  ein und setzen zugleich

$$\frac{K_2'}{K_0'R^2} = k_2, \quad \frac{2K_3'}{K_0'R^3} = k_3, \quad \frac{3K_4'}{K_0'R^4} = k_4, \quad \text{u. s. f.}, \quad (11)$$

womit (9) und (8) übergehen in:

$$g = G \left\{ 1 - 2 \tau \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) + k_2 + k_3 + k_4 + \dots \right\}, \quad (12)$$

$$r' = R \left\{ 1 + \frac{1}{2} \tau \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) + k_2 + \frac{1}{2} k_3 + \frac{1}{3} k_4 + \dots \right\}. \quad (13)$$

Diese Näherungsformeln, in denen für  $\varphi'$  und  $\lambda'$  auch geographische Breite  $B$  und Länge  $L$  gesetzt werden dürfen, zeigen zunächst, in welcher Weise für die Geoidfläche die höheren Kugelfunktionen in  $g$  übergehen auf den Radiusvektor: je höher der Index, desto geringer ist der Einfluß auf  $r'$ . Lokale Einflüsse in  $g$ , welchen immer Kugelfunktionen von sehr hohem Index entsprechen, werden daher den Radiusvektor der Meeresfläche wenig beeinflussen — eine Sache, die übrigens synthetisch sehr leicht einzusehen ist (vergl. das 4. Kap.).

Berücksichtigt man ferner die aus dem Eingang dieses Kapitels ersichtliche Thatsache, daß die Anziehung einer ausgedehnten Platte auf Punkte über ihrem mittleren Teile wesentlich nur von der Stärke derselben abhängt, so leuchtet nun andererseits ein, daß kontinentale Massenunregelmäßigkeiten die Schwerkraft  $g$  nur etwa von gleicher Ordnung beeinflussen wie lokale, daß daher in einer Darstellung von  $g$  nach Kugelfunktionen der geographischen Breite und Länge die Koeffizienten in  $k_3, k_4$  u. s. f. bis zu hohen Indices durchschnittlich annähernd gleiche Ordnung besitzen werden, und daß daher, weil in den Kugelfunktionen mit wachsenden Indices auch die Anzahl der Koeffizienten wächst (vergl. S. 65), eine sehr große Anzahl von Koeffizienten notwendig werden würde zu einer einigermaßen vollständigen



digen Darstellung von  $g$ . An eine solche Darstellung ist natürlich wegen mangelnden Beobachtungsmaterials nicht zu denken, aber auch die Rechnung würde kaum zu bewältigen sein; sie würde schon bei Beschränkung auf die wichtigsten kontinentalen Glieder erheblich werden und Hunderte von Koeffizienten betreffen.

Deshalb hat *Stokes* in seiner mehrfach erwähnten Abhandlung eine Formel entwickelt, welche gestattet, die Anomalieen in  $r'$  aus denen in  $g$  ohne Reihenentwicklung zu berechnen. Diese Formel hat freilich gegenwärtig nur theoretischen Wert, aber sie ist insofern von Wichtigkeit, als sie den einzig richtigen Weg zur Berechnung der Anomalieen im Radiusvektor, d. h. der Unterschiede  $N$  zwischen dem Geoid und seinem Niveausphäroid (Normalsphäroid), aus Schwerebeobachtungen zeigt. Auch ist die Möglichkeit einer praktischen Verwendung der Formel in nicht zu ferner Zeit zu hoffen.

Bei der Entwicklung dieser Formel im nächsten Paragraphen behalten wir die Näherungsrelationen (12) und (13) bei, da dies für unsere Zwecke einer allgemeinen Orientierung in der Sache ausreicht. Sollen die erwähnten Relationen strenger entwickelt werden, so ist dies nach Maßgabe (und event. mit Benutzung) der Entwicklungen der §§ 12 bis 15 des vorigen Kapitels S. 77 u. ff. leicht zu bewerkstelligen. Es werden dadurch übrigens in den Gliedern obiger Formeln mit Kugelfunktionen fünften und höheren Ranges keine Änderungen herbeigeführt. Da man ferner die zweiten Potenzen der Kugelfunktionen vom dritten und höheren Range, und ebenso ihre Produkte in Koeffizienten der Kugelfunktionen vom zweiten Range vernachlässigen kann, bleiben die Ausdrücke für  $g$  und  $r'$  frei von Gliedern ersten Ranges.

Zu bemerken ist außerdem, daß die Zulässigkeit der Substitution von  $R$  für  $r'$  ebenso wie eventuell diejenige von  $B$  und  $L$  für  $\varphi'$  und  $\lambda'$  in den Parenthesen der Gleichungen (3) und (4) bei den Gliedern von sehr hohem Range zweifelhaft erscheint. Denn offenbar weicht z. B.  $r'^{100}$  von  $R^{100}$  sehr ab, obgleich  $r'$  und  $R$  wenig verschieden sind. Die weitere Erörterung dieser Frage kann indessen hier unterbleiben, weil aus praktischen Gründen jede Anwendung der Entwicklungen dieses und des folgenden Paragraphen nur kontinentale Anomalieen ins Auge fassen kann.

Die Beziehung zwischen den Kugelfunktionen von höherem als dem zweiten Range in  $W$ ,  $g$  und  $r'$ , sowie dem Krümmungsradius  $\varrho$  (genauer: der Gradeslänge) erörtert schon *Laplace, Méc. cél.* t. II, l. III p. 97. Vergl. auch *Thomson und Tait, Handbuch der theor. Physik* I, 2 S. 344 — 346 und 336. Wir beschränken uns auf das hier Gegebene, da die betreffenden Relationen ihrem Wesen nach synthetisch weit leichter zu erlangen sind (4. Kap.). Vergl. übrigens noch den Schlussparagraphen des dritten Kapitels.

Es mag hier auch erwähnt werden, daß die Anwendung des *Clairautschen* Theorems auf Teile der Erde unstatthaft ist. Wollte man also



für  $g$  eine Formel  $p + q \sin^2 B$  aus Beobachtungen ableiten, die sich nur über einen Kontinent erstrecken, so würde das nach *Clairauts* Theorem berechnete  $\alpha$  wohl allenfalls ein Näherungswert für die Erdabplattung sein, aber nimmermehr für die spezielle Abplattung des Kontinents. Dies tritt aus den Entwicklungen des § 39 deutlich hervor, da diese eben nur gelten, wenn die ganze Erde ins Auge gefasst wird. Hier besteht ein wesentlicher Unterschied mit Gradmessungen, welche ja auch für einen Teil der Erde allein die Krümmungsverhältnisse angeben können.

*Borenius* versucht S. 26 seiner früher (S. 87) erwähnten Abhandlung eine Formel für spezielle Abplattung aufzustellen; allein sie ist zu hypothetisch, um erwähnt zu werden.

#### § 40. Formel von Stokes zur Schätzung kontinentaler Abweichungen des Geoids.

Ist für die Beschleunigung  $g$  der Schwerkraft eine Interpolationsformel  $g_a (1 + b \sin^2 B)$  angenommen, so weichen deren Ergebnisse von den wirklichen Werten  $g$  ab. Für diese haben wir nach (12) des vorigen Paragraphen den Ausdruck

$$g = G \left\{ 1 - 2\tau \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) + k_2 + k_3 + k_4 + \dots \right\}, \quad (1)$$

für jene, welche wir mit  $\gamma$  bezeichnen wollen, dagegen

$$\gamma = G \left\{ 1 - b \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) \right\}. \quad (2)$$

Der letztere Ausdruck folgt aus  $g_a (1 + b \sin^2 B)$ , wenn zunächst für  $\sin^2 B$  geschrieben wird  $(\sin^2 \varphi' - \frac{1}{3}) + \frac{1}{3}$  und sodann für  $g_a (1 + \frac{b}{3})$  das Symbol  $G$  gesetzt wird.

Die  $G$  beider Formeln sind identisch, da sie denselben Mittelwert vorstellen. Wir werden übrigens am Schlusse der Entwicklungen nachweisen, daß eine Differenz der  $G$  nichts ausmacht. Aus (1) und (2) folgt nun durch Subtraktion, wenn

$$g = \gamma + \Delta g \quad (3)$$

gesetzt wird:

$$\Delta g = G \left\{ (b - 2\tau) \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) + k_2 + k_3 + k_4 + \dots \right\}. \quad (4)$$

Für den Radiusvektor  $r'$  hat man nach (13) des vorigen Paragraphen, entsprechend der Gleichung (1) für  $g$ :

$$r' = R \left\{ 1 + \frac{1}{2} \tau \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) + k_2 + \frac{1}{2} k_3 + \frac{1}{3} k_4 + \dots \right\}. \quad (5)$$

Dagegen ist der Radiusvektor, welcher der Gleichung (2) für  $\gamma$  entspricht und dem Normalsphäroid  $U = W_0$  angehört, gegeben durch den Ausdruck

$$R \left\{ 1 + \alpha \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) \right\}, \quad (6)$$

welcher aus dem bekannten Ausdrucke  $a(1 - \mathfrak{a} \sin^2 \varphi')$  hervorgeht, wenn  $\sin^2 \varphi'$  in  $\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi'\right)$  zerlegt und für  $a \left(1 + \frac{\mathfrak{a}}{3}\right)$  der mittlere Radius  $R$  des Normalsphäroids gesetzt wird, der nach (7) S. 246 für Geoid  $W = W_0$  und Sphäroid  $U = W_0$  übereinstimmt. Zu (6) bestimmt sich  $\mathfrak{a}$  aus  $\mathfrak{b}$  nach dem *Clairautschen* Theorem  $\mathfrak{a} = \frac{5}{2} \mathfrak{r} - \mathfrak{b}$ .

Bezeichnen wir nun den Überschufs von  $r'$  über den durch (6) gegebenen Wert mit  $N$ :

$$r' \text{ nach (5)} = r' \text{ nach (6)} + N, \quad (7)$$

so folgt durch Subtraktion von (5) und (6):

$$N = R \left\{ (\mathfrak{b} - 2\mathfrak{r}) \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) + k_2 + \frac{1}{2} k_3 + \frac{1}{3} k_4 + \dots \right\}. \quad (8)$$

Dieses  $N$  kann ohne weiteres bei der hier festgehaltenen Genauigkeit als Erhebung des Geoids über das durch (6) bezeichnete Normalsphäroid (Erdellipsoid) aufgefaßt werden.

Ziehen wir in (4) und (8) die beiden ersten Glieder

$$(\mathfrak{b} - 2\mathfrak{r}) \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) + k_2$$

in ein Glied  $k_2^*$  zusammen, so folgt:

$$\Delta g = G \left\{ k_2^* + k_3 + k_4 + \dots \right\} \quad (9)$$

$$N = R \left\{ k_2^* + \frac{1}{2} k_3 + \frac{1}{3} k_4 + \dots \right\}. \quad (10)$$

Wir können hier sogleich darauf hinweisen, daß ein in  $\mathfrak{b}$  und demgemäß in der Bestimmung des Niveausphäroids (6) begangener Fehler sich bei Benutzung der Gleichungen (9) und (10) dergestalt verbessert, daß die Gestalt des Geoids korrekt erhalten wird. Bei völlig richtiger Bestimmung von  $\mathfrak{b}$  müßte  $k_2^*$  bis auf Glieder mit der geographischen Länge verschwinden. Im allgemeinen denken wir uns in (1) und (5)  $k_2$  in

$$k_2^* + (2\mathfrak{r} - \mathfrak{b}) \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right)$$

zerlegt und erhalten:

$$g = G \left\{ 1 - \mathfrak{b} \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) + k_2^* + k_3 + k_4 + \dots \right\}$$

$$r' = R \left\{ 1 + \left( \frac{5}{2} \mathfrak{r} - \mathfrak{b} \right) \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) + k_2^* + \frac{1}{2} k_3 + \frac{1}{3} k_4 + \dots \right\}.$$

Bringt man aber  $G \left\{ 1 - \mathfrak{b} \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) \right\}$  bzw.  $R \left\{ 1 + \left( \frac{5}{2} \mathfrak{r} - \mathfrak{b} \right) \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) \right\}$  nach links, so gelangt man wieder zu den Gleichungen (9) und (10).

§ 41. **Fortsetzung: Summierung.** Die Entwicklung (9) des vorigen Paragraphen ist eine Entwicklung nach Kugelfunktionen. Wir können aber andererseits mit Rücksicht auf (1\*) § 28 S. 116 für den Wert  $\Delta g$  in einem bestimmten Punkte  $P'$  setzen:

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \int P_n \Delta g d\sigma, \quad (1)$$

wobei die Integration über die ganze Kugelfläche vom Radius 1 auszudehnen ist und die  $P_n$  die S. 57 (1) angegebenen Funktionen des Winkels zwischen den Radienvektoren nach  $P'$  und nach demjenigen Punkte, auf welchen sich  $\Delta g d\sigma$  bezieht, vorstellen. Bei der Annahme der Koordinaten ist man in Formel (1), was zu bemerken wichtig ist, nicht an Breite und Länge gebunden, sondern man kann offenbar u. a. auch denjenigen Punkt der Kugelfläche, welcher dem durch Formel (1) dargestellten  $\Delta g$  entspricht, als Pol annehmen. Dies wollen wir thun und als Koordinaten Poldistanzen  $\psi$  (anstatt Breiten) und Längen  $\chi$  einführen, sodafs

$$d\sigma = \sin \psi d\psi d\chi \quad (2)$$

wird.

Vergleicht man (1) mit (9) des vorigen Paragraphen Glied für Glied, so folgt für irgend einen Index  $n$ , insbesondere also auch für  $n = 2$  bis  $\infty$ :

$$k_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int P_n \frac{\Delta g}{G} d\sigma. \quad (3)$$

Die Einführung dieser Relation in (10) des vorigen Paragraphen giebt endlich

$$N = \frac{R}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \int P_n \frac{\Delta g}{G} d\sigma, \quad (4)$$

welche Reihe nun zu summieren ist\*). Um dieses auszuführen, betrachten wir mit *Stokes* die Reihe

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n \cdot \xi^{n-1}$$

d. i. also

$$S = 5 P_2 \xi + \frac{7}{2} P_3 \xi^2 + \frac{9}{3} P_4 \xi^3 + \dots \quad (5)$$

Ist diese Summe gebildet, so wird

$$N = \frac{R}{4\pi} \int \frac{\Delta g}{G} S_{\xi=1} d\sigma. \quad (6)$$

\*) In einem ähnlichen, jedoch einfacheren Falle summiert bereits *Laplace*, *Méc. cél.* t. II p. 70 etc., eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe.

Aus (5) folgt

$$\frac{dS}{d\xi} = 5P_2 + 7P_3\xi + 9P_4\xi^2 + \dots$$

und weiter hiermit

$$\int_0^\xi \xi^{\frac{3}{2}} \frac{dS}{d\xi} d\xi = P_2 \xi^{\frac{5}{2}} + P_3 \xi^{\frac{7}{2}} + P_4 \xi^{\frac{9}{2}} + \dots$$

Nach den Gleichungen (5) und (8) S. 50 und 51 ist aber bei beliebigem Werte von  $\psi$  für  $\xi^2 < 1$

$$\sqrt{1 - 2\xi \cos \psi + \xi^2} = 1 + P_1 \xi + P_2 \xi^2 + P_3 \xi^3 + P_4 \xi^4 + \dots$$

Diese Entwicklung gilt nach S. 53 § 3 außerdem für  $\xi^2 = 1$ , falls  $\cos^2 \psi < 1$  ist. Man hat nun

$$\int_0^\xi \xi^{\frac{3}{2}} \frac{dS}{d\xi} d\xi = \sqrt{\xi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi \cos \psi + \xi^2}} - 1 - P_1 \xi \right\} = \sqrt{\xi} \cdot Z, \quad (7)$$

wenn die Parenthese für den Augenblick mit  $Z$  bezeichnet wird. Aus (7) folgt durch Differentiation

$$dS = 2\xi^{-\frac{1}{2}} d(Z\sqrt{\xi})$$

und hieraus mittelst teilweiser Integration

$$S = 2 \frac{Z}{\xi} + 3 \int_0^\xi Z \xi^{-2} d\xi, \quad (8)$$

wobei die untere Integrationsgrenze ohne weiteres zu null angenommen werden konnte, weil einerseits zufolge (5) für  $\xi = \text{null}$  auch  $S$  null ist, andererseits wegen  $Z = P_2 \xi^2 + P_3 \xi^3 + \dots$  das erste Glied der rechten Seite und also überhaupt die ganze rechte Seite der vorigen Gleichung für  $\xi = \text{null}$  in null übergeht.

Aus (8) folgt mit Berücksichtigung des Wertes von  $P_1$ , der nach der ersten Gleichung (9) S. 51 gleich  $\cos \psi$  ist:

$$S_{\xi=1} = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - 2(1 + \cos \psi) + 3 \int_0^1 Z \xi^{-2} d\xi \quad (9)$$

mit

$$Z = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi \cos \psi + \xi^2}} - 1 - \xi \cos \psi. \quad (10)$$

Um das in (9) auftretende Integral zu erhalten, beachten wir zunächst, daß

$$d \frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi \cos \psi + \xi^2}} = \left\{ \frac{\cos \psi}{\xi \sqrt{1 - 2\xi \cos \psi + \xi^2}} - \frac{1}{\xi^2 \sqrt{1 - 2\xi \cos \psi + \xi^2}} \right\} d\xi.$$

Es wird daher mit Rücksicht auf die zugehörige Integralformel:

$$\int Z \xi^{-2} d\xi = - \frac{\sqrt{1 - 2\xi \cos \psi + \xi^2}}{\xi} + \int \frac{\cos \psi}{\xi \sqrt{1 - 2\xi \cos \psi + \xi^2}} d\xi - \int \left( \frac{1}{\xi^2} + \frac{\cos \psi}{\xi} \right) d\xi. \quad (11)$$

Den Wert des ersten Integrales rechter Hand findet man leicht, wenn man für  $\xi$  setzt  $1 : z$ ; es geht damit über in

$$- \int \frac{\cos \psi}{\sqrt{1 - 2z \cos \psi + z^2}} dz,$$

und dieses ist gleich

$$- \cos \psi \log \text{nat} \left\{ 2z - 2 \cos \psi + 2 \sqrt{1 - 2z \cos \psi + z^2} \right\} + \text{Konst.}$$

Hiermit, sowie unter Auswertung des zweiten Integrales rechter Hand in (11) geht diese Gleichung über in

$$\int Z \xi^{-2} d\xi = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\xi \cos \psi + \xi^2}}{\xi} - \cos \psi \log \text{nat} \left\{ 2 - 2\xi \cos \psi + 2 \sqrt{1 - 2\xi \cos \psi + \xi^2} \right\} + \text{Konst.} \quad (12)$$

Für  $\xi = 1$  giebt die rechte Seite dieser Gleichung

$$1 - 2 \sin \frac{\psi}{2} - \cos \psi \log \text{nat} \left\{ 2(1 - \cos \psi) + 4 \sin \frac{\psi}{2} \right\} + \text{Konst.}; \quad (13)$$

für  $\xi = \text{null}$  giebt sie mit Rücksicht auf die Reihenentwicklung der  $\sqrt{1 - 2\xi \cos \psi + \xi^2}$  nach Potenzen von  $\xi$ :

$$\cos \psi - \cos \psi \log \text{nat} 4 + \text{Konst.} \quad (14)$$

Man hat daher aus Gleichung (9):

$$S_{\xi=1} = \csc \frac{\psi}{2} - 2 \left( 1 + \cos \psi \right) + 3 \left\{ 1 - 2 \sin \frac{\psi}{2} - \cos \psi - \cos \psi \log \text{nat} \left( \frac{1 - \cos \psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \right) \right\}, \quad (15)$$

und es ist endlich nach (6) und (2):

$$N = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^\pi \frac{dg}{G} \left\{ \begin{array}{l} \csc \frac{\psi}{2} + 1 - 6 \sin \frac{\psi}{2} - 5 \cos \psi \\ - 3 \cos \psi \log \text{nat} \left( \sin \frac{\psi}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right] \right) \end{array} \right\} \sin \psi d\psi. \quad (16)$$

Da in der letzten Gleichung die Integration nach  $\psi$  die Werte  $\psi = \text{null}$  und  $\pi$  einschließt, so ist noch zu untersuchen, ob die Gleichung (15) auch für diese beiden Fälle gilt. (Stokes erwähnt dieses nicht.)

Betrachten wir zunächst den Fall  $\psi = \text{null}$ . Hier geben die Formeln (5) und (15) beide für  $S_{\zeta=1}$  den Wert unendlich; allein unendlich groſse Werte sind nicht ohne weiteres vergleichbar, und es ist also eine Prüfung erforderlich.

Für  $\psi = \pi$  giebt (15)  $S_{\zeta=1} = 1 + 3 \log \text{nat } 2$ . Dagegen giebt (5)

$$S_{\zeta=1} = 5 - \frac{7}{2} + \frac{9}{3} - \dots \pm \frac{2n+1}{n-1} \mp \dots,$$

oder wie man leicht findet:

$$S_{\zeta=1} = 3 \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \pm \frac{1}{n-1} \mp \dots \right) \\ + 2 \left( 1 - 1 + 1 - \dots \pm 1 \mp \dots \right).$$

Von den beiden Reihen rechter Hand hat nur die erste eine bestimmte Summe, nämlich  $\log \text{nat } 2$ ; der Wert der zweiten oscilliert zwischen null und  $+1$ . (15) setzt dafür augenscheinlich  $\frac{1}{2}$ . Übereinstimmung ist hier nicht, aber es handelt sich nur um eine endliche Unsicherheit, welche nichts ausmacht, da sie bei der Integration nur für ein differentiales Oberflächenelement in betracht kommt.

Somit bleibt noch der Einfluß der Anwendung der Formel (15) auf (16) für  $\psi = \text{null}$  zu prüfen. In Bezug hierauf ist es aber gleichgültig, ob  $\Delta g$  konstant oder veränderlich ist, weil die Prüfung sich nur auf die unendlich nahe Umgebung des Punktes  $\psi = \text{null}$  zu erstrecken hat. Nehmen wir  $\Delta g$  konstant, so zeigt die direkte Ausrechnung von (16), welche wir im nächsten Paragraphen geben, daß  $N$  den richtigen Wert null erlangt. Mithin ist Formel (16) überhaupt richtig.

§ 42. Fortsetzung: Probe und Übersicht. Wir haben bisher angenommen, daß in den Formeln (1) und (2) des § 40 S. 249  $G$  denselben Wert habe; ist er verschieden, so erhält die rechte Seite von (9) S. 250 noch ein konstantes Glied  $k_0$ . Man sieht aber sofort, daß dieses die folgenden Entwicklungen nicht ändert. Deshalb muß die Gleichung (16) für  $N$  null ergeben, wenn  $\Delta g$  konstant gesetzt wird. Überdies folgt dieses auch unmittelbar aus Gleichung (4) S. 251, wenn man die Relation (5) S. 66 beachtet. Es muß also

$$\int_0^\pi \left\{ \begin{aligned} &\csc \frac{\psi}{2} + 1 - 6 \sin \frac{\psi}{2} - 5 \cos \psi \\ &- 3 \cos \psi \log \text{nat} \left( \sin \frac{\psi}{2} [1 + \sin \frac{\psi}{2}] \right) \end{aligned} \right\} \sin \psi \, d\psi \quad (1)$$

gleich null sein. Hierin liegt eine Prüfung der Entwicklungen der letzten beiden Paragraphen.

Beachtet man, daß  $\sin \psi \, d\psi = 4 \sin \frac{\psi}{2} \, d \sin \frac{\psi}{2}$ , so ist behufs Ermittlung von (1), wenn für  $\sin \frac{\psi}{2}$  geschrieben wird  $u$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \csc \frac{\psi}{2} \cdot \sin \psi \, d\psi &= 4 \int_0^1 du = +4; \\
\int_0^\pi 1 \cdot \sin \psi \, d\psi &= +2; \\
-6 \int_0^\pi \sin \frac{\psi}{2} \cdot \sin \psi \, d\psi &= -24 \int_0^1 u^2 \, du = -8; \\
-5 \int_0^\pi \cos \psi \sin \psi \, d\psi &= 0; \\
-3 \int_0^\pi \cos \psi \log \text{nat} \left( \sin \frac{\psi}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right] \right) \sin \psi \, d\psi \\
&= -12 \int_0^1 \log \text{nat} (u [1 + u]) \cdot (u - 2u^3) \, du.
\end{aligned}$$

Letzteres Integral giebt durch teilweise Integration:

$$-12 \left\{ \left[ \log \text{nat} (u [1 + u]) \cdot \frac{u^2 - u^4}{2} \right]_{u=0}^{u=1} - \int_0^1 \frac{u^2 - u^4}{2u} \, du - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u^2 - u^4}{1 + u} \, du \right\},$$

und hieraus folgt, wenn man unter den Integralzeichen ausdividiert und dann integriert, da die eckige Parenthese an beiden Grenzen verschwindet, als Wert des Ausdruckes  $+2$ .

Mithin ist (1) in der That gleich null. Um einen Überblick darüber zu gewinnen, wie in Formel (16) die verschiedenen Werte  $\Delta g$  der ganzen Oberfläche eingehen, denken wir uns in diese Formel die Mittelwerte der  $\Delta g$  für konstantes  $\psi$ , also für konstanten sphärischen Abstand eingeführt. Wir bezeichnen diese mit  $\Delta g_\psi$  und erhalten

$$N = R \int_0^\pi \frac{\Delta g_\psi}{G} F \, d\psi, \quad (2)$$

wobei

$$F = \left\{ \begin{array}{l} \csc \frac{\psi}{2} + 1 - 6 \sin \frac{\psi}{2} - 5 \cos \psi \\ -3 \cos \psi \log \text{nat} \left( \sin \frac{\psi}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right] \right) \end{array} \right\} \frac{\sin \psi}{2}. \quad (3)$$

Nachstehende Tabelle giebt eine Übersicht des Faktors  $F$ , welchem für die numerische Rechnung die folgende, bequemere Form zu geben ist:

$$F = \cos \frac{\psi}{2} - \frac{\sin \psi}{2} \left\{ 6 \sin \frac{\psi}{2} - 1 + \cos \psi \left( 5 + 3 \log \text{nat} \left[ \frac{1 - \cos \psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \right] \right) \right\}. \quad (3^*)$$



$\psi$	$F$	$\psi$	$F$
0°	+ 1,00	180°	0,00
10	+ 1,22	170	+ 0,26
20	+ 0,94	160	+ 0,46
30	+ 0,47	150	+ 0,56
40	— 0,06	140	+ 0,53
50	— 0,54	130	+ 0,36
60	— 0,90	120	+ 0,08
70	— 1,08	110	— 0,27
80	— 1,08	100	— 0,62
90	— 0,91	90	— 0,91

(4)

Hieraus erkennt man vor allem sehr deutlich, daß die  $\Delta g$  in der Umgebung eines Ortes allein ganz und gar nicht zu einer sicheren Bestimmung von  $N$  ausreichen. Immerhin haben die  $\Delta g$  der nächsten Umgebung den meisten Einfluß, denn obgleich  $F$  den Wert 1 auch in größeren Abständen erreicht, so gehören doch in solchen Distanzen zur Bildung eines  $\Delta g_\psi$  vergleichsweise mehr einzelne Werte  $\Delta g$  als in der Nähe, und es hat also dann das einzelne  $\Delta g$  weniger Einfluß. Jedoch müssen Schlüsse auf  $N$ , die  $\Delta g$  nur in der Umgebung eines Punktes beachten, trügerisch ausfallen.

Was die Anwendbarkeit der Formel (2) anlangt, so glaubt Verfasser, daß in nicht zu ferner Zeit für einzelne günstig gelegene Orte eine solche möglich werden wird.\*) Ein Ort ist günstig, wenn  $\Delta g$  in seiner Umgebung bis  $\psi = 30^\circ$  bestimmbar ist und wenn in die Gebiete um  $\psi = 60^\circ$  bis  $100^\circ$  und  $140^\circ$  bis  $170^\circ$  nicht zu viele Gegenden der Erdoberfläche fallen, welche nicht wenigstens eine Schätzung von  $\Delta g$  zulassen.

\*) Im 4. Kapitel § 37 machen wir eine Anwendung von Formel (2) auf ein synthetisches Beispiel.

Im übrigen hängt die Anwendung dieser Formel davon ab, daß es gelingt, mit Elasticitätsapparaten Beobachtungsreihen für die Schwerkraft auf dem offenen Meere zu erhalten. Inwieweit das hierher gehörige *Bathometer* von *William Siemens* als *Schweremesser* brauchbar ist, blieb uns zweifelhaft, da wir außer den verschiedenen, wesentlich beschreibenden Mitteilungen (vergl. u. a.

*A. W. Hofmann, Bericht über die wissenschaftlichen Apparate auf der Londoner internationalen Ausstellung im Jahre 1876. Braunschweig 1878 und 1881 S. 203 und 565.)*

nur eine Beobachtungsreihe auffinden konnten, die mit demselben angestellt worden ist, auf grund deren sich indessen nichts entscheiden läßt. Im vierten Kapitel werden wir am Schlusse des § 38 auf diese Beobachtungen näher einzugehen Veranlassung haben.

Selbstredend kann nur eine Bestimmung des kontinentalen Teiles von  $N$  versucht werden; für den geringfügigen lokalen ist das Verfahren nicht beabsichtigt und nicht geeignet. Die  $\Delta g$  müssen thunlichst von lokalen Einflüssen befreit werden: es müssen also die  $g$  nicht nur aufs Meeresniveau, sondern nach unseren Angaben auch wegen Kondensation reduziert werden. Andernfalls ist ja überhaupt die Zulässigkeit der Reihenentwicklung für  $W$  und somit der ganzen Entwicklung nicht vorhanden.

Die Auswertung des Integrales für  $N$  würde mit der (meist interpolatorischen) Bildung der Werte  $\Delta g_\psi$ , am bequemsten an der Hand eines Globus, beginnen und (ohne Anwendung numerischer mechanischer Quadratur) am besten und ganz ausreichend graphisch bewirkt werden, wobei die Werte  $F \Delta g_\psi : G$  als Ordinaten zu Abscissen  $\psi$  (als Arcus gen.) und das Integral als Fläche auftreten. Eine Genauigkeitsschätzung für  $N$  ist dabei leicht zu erhalten, indem der Einfluß der Unsicherheit in den  $\Delta g_\psi$  auf diese Fläche ermittelt wird.

### § 43. Allgemeine Sätze für die Verteilung der kontinentalen Wellen des Geoids.

I. Wenn man berücksichtigt, daß in dem Ausdrucke (8) S. 250 für  $N$ , d. h. für die Differenz der Radienvektoren des Geoids und des Normalsphäroids gleichen Potentialwertes, ein konstantes Glied fehlt, so erkennt man zunächst leicht, daß *beide Flächen wesentlich gleiche Volumina* einschließen, weil jedes Integral der Form  $\int K' d\sigma'$ , worin  $K'$  eine Kugelfunktion von mehr als nulltem Range bezeichnet, über die ganze Kugeloberfläche ausgedehnt, nach S. 66 (5) verschwindet. Allerdings sind bei dieser Nachweise gleicher Volumina Bruchteile des Radius  $R$  von der Ordnung des Quadrats der Abplattung in  $N$  vernachlässigt; aber eine genauere Untersuchung, die wir übergehen dürfen, bestätigt den gefundenen Satz. Ganz streng allerdings existiert Gleichheit der Volumina nicht, und zwar schon deshalb nicht, weil die zur Gültigkeit der Entwicklung vorausgesetzte Kondensation gewisser Massen die Geoidfläche etwas verschiebt.

II. Im Anschluß an § 39 S. 246 (8) haben wir für den Radiusvektor des Geoids die Näherungsrelation:

$$r' = R \{ 1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots \}, \quad (1)$$

wenn die in erwähnter Gleichung (8) auftretenden Kugelfunktionen 2., 3., 4. Ranges u. s. f. mit  $u_2, u_3, u_4 \dots$  bezeichnet werden. Koordinatenanfang ist der Schwerpunkt der Erde. Die Gleichung (1) bedeutet aber, da  $u_1$  fehlt, daß *mit diesem Schwerpunkt der Volumenschwerpunkt des Geoids zusammenfällt*.

Hierauf macht *Stokes* in seiner wiederholt genannten Abhandlung

aufmerksam. Um den Satz zu beweisen, denken wir uns drei rechtwinkelige Koordinatenachsen durch den Erdschwerpunkt, dergestalt daß

$$\begin{aligned}x' &= r' \cos \varphi' \cos \lambda' \\y' &= r' \cos \varphi' \sin \lambda' \\z' &= r' \sin \varphi'\end{aligned}\tag{2}$$

wird, vergl. § 4 S. 5. Wir denken uns ferner das Volumen des Geoids vom Erdschwerpunkt aus in Elementarpyramiden mit dem körperlichen Winkel  $d\sigma'$  zerlegt und haben dann, da der Schwerpunkt jeder Elementarpyramide im Abstand  $\frac{3}{4} r'$  von der Spitze liegt, als statische Momente des Volumens des Geoids beziehungsweise für die  $yz$ -,  $xz$ - und  $xy$ -Ebene die über die Oberfläche der Kugel vom Radius 1 auszudehnenden Integrale:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} \int r'^3 x' d\sigma' \text{ d. i. } \frac{1}{4} \int r'^4 \cos \varphi' \cos \lambda' d\sigma' \\ \frac{1}{4} \int r'^3 y' d\sigma' \text{ d. i. } \frac{1}{4} \int r'^4 \cos \varphi' \sin \lambda' d\sigma' \\ \frac{1}{4} \int r'^3 z' d\sigma' \text{ d. i. } \frac{1}{4} \int r'^4 \sin \varphi' d\sigma' .\end{aligned}\tag{3}$$

Hierzu giebt Gleichung (1), wenn die bei der Entwicklung dieser Gleichung angenommene Genauigkeit festgehalten wird:

$$r'^4 = R^4 \left\{ 1 + 4u_2 + 4u_3 + 4u_4 + \dots \right\} .\tag{4}$$

Beachtet man nun, daß  $\cos \varphi' \cos \lambda'$ ,  $\cos \varphi' \sin \lambda'$  und  $\sin \varphi'$  Kugelfunktionen 1. Ranges sind (vergl. S. 65 § 7), in  $r'^4$  aber gerade diese fehlen, so müssen nach Satz (4) § 28 S. 116 die drei Integrale (3) verschwinden, womit das Zusammenfallen von Erdschwerpunkt und Volumenschwerpunkt des Geoids erwiesen ist.

Allerdings ist dieses Zusammenfallen kein ganz vollständiges. Wenn man in § 39 S. 246 etwas strenger entwickelt und beim Übergang von (1) zu (4) im laufenden Paragraphen auch die Quadrate und Produkte der  $u$  mitnimmt, so entsteht in (4) nach Zerlegung in Kugelfunktionen auch ein Glied mit einer Kugelfunktion 1. Ranges. Die Integrale (3) sind dann nicht null; aber da die Koeffizienten dieses Gliedes erheblich kleiner als von der Ordnung  $\alpha^2$  sein werden, so sind auch jene voraussichtlich weit kleiner als Bruchteile des Produktes aus dem Volumen in den mittleren Radius  $R$  von der Ordnung  $\alpha^2$ . Aus diesem Grunde kann also der Abstand von Massen- und Volumenschwerpunkt nur wenige Meter betragen.

Eine ebenso geringfügige Differenz ergibt sich aus dem Umstande, daß die Entwicklungen des § 39 und also auch diejenigen des laufenden Paragraphen nicht für das wirkliche Potential der Erde

gelten, sondern nur für dasjenige, welches nach der Kondensation gewisser Massen übrig bleibt. Indessen ist, wie früher gezeigt, die entsprechende Verschiebung der Geoidfläche sehr klein.

Zufolge des nahen Zusammenfallens des Volumenschwerpunktes des Geoids mit dem Schwerpunkt der Erde hat nun dieser letztere eine mittlere Lage zur Oberfläche des Meeres. Denkt man sich dazu das Normalsphäroid, gegen welches die Meeresfläche Ein- und Ausbiegungen zeigt, so erkennt man sofort, daß keinesfalls auf einer Hälfte der Meeresfläche nur Ein- und auf der anderen nur Ausbiegungen vorkommen können, wie man auch den die beiden Hälften trennenden Zentralschnitt durch die Erde legen möge.

Bestünde die Erdoberfläche zur einen Hälfte aus einem Kontinent, zur anderen aus einem Ocean und wären unsichtbare Massenunregelmäßigkeiten nicht vorhanden, so würde zwar jedenfalls in der Nähe der Küste das Geoid gegen sein Normalsphäroid im Kontinent gehoben, im Ocean gesenkt erscheinen, aber jene Hebung und diese Senkung könnten nach dem oben entwickelten Satze keinesfalls überall im Kontinent bzw. im Ocean vorhanden sein. Die wirkliche Erdoberfläche kann man aber, wie ein Globus zeigt, in 2 Hälften teilen, deren eine hauptsächlich vom stillen Ocean nebst Australien und der Südpolarregion erfüllt wird, während die andere die größeren Teile der Kontinente und die kleineren Oceane enthält. Hierdurch wird es plausibel, daß die größten Depressionen des stillen Oceans nicht im Zentrum desselben, sondern vielmehr in einiger Nähe der Küsten von Asien und Amerika stattfinden. (Vergl. dazu das 4. Kap. § 38, wo noch gezeigt wird, daß jedenfalls auch unsichtbare Massenstörungen existieren müssen.)

#### § 44. Relation zwischen Schwerestörung, Störung im Radiusvektor und Dichtigkeit der störenden Schicht für einen Punkt des Geoids.

Wir knüpfen an S. 147 § 5 an und verstehen in Fig. 14 unter der Niveaufäche  $W = W_0$  die Geoidfläche, unter der Fläche  $U = W_0$  ein Normalsphäroid. Für irgend einen Punkt setzen wir wie dort

$$W = U + T, \quad (1)$$

wobei  $U$  den normalen Teil von  $W$  bezeichnet, für welchen die Schwerkraft durch das Symbol  $\gamma$  ausgedrückt wurde.

Im Punkte  $Q$  des Geoids ist nun zufolge (1):

$$\left(\frac{\partial W}{\partial h}\right)_Q = \left(\frac{\partial U}{\partial h}\right)_Q + \left(\frac{\partial T}{\partial h}\right)_Q, \quad (2)$$

wobei es wegen der geringen Lotabweichung gleichgültig ist, ob man sich  $h$  in Richtung der Normale des Geoids oder in Richtung der Normale der durch  $Q$  führenden Fläche  $U = \text{Konst.}$  denkt. Es ist daher

$$\left(\frac{\partial W}{\partial h}\right)_q = -g, \quad (3)$$

wenn  $g$  die Schwerkraft im Meeresniveau bezeichnet, und es ist ferner

$$\left(\frac{\partial U}{\partial h}\right)_q = -\left\{\gamma + \left(\frac{d\gamma}{dh}\right)_0 N + \dots\right\}, \quad (4)$$

wobei in ausreichender Annäherung

$$\left(\frac{d\gamma}{dh}\right)_0 = -\frac{2\gamma}{R} \quad (4^*)$$

gesetzt werden darf.

Auf den Differentialquotienten von  $T$  nach  $h$  wenden wir die Formel (8) § 4 S. 147 an, indem wir vorläufig annehmen, daß die störenden Massen lediglich in der Erdrinde ihren Sitz haben, und indem wir ferner die zulässige Voraussetzung der Kugelgestalt der Erdoberfläche machen. Dann ist nach der erwähnten Gleichung:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial h}\right)_q = -2\pi k^2 \vartheta - \frac{T}{2R} + \dots \quad (5)$$

$\vartheta$  bezeichnet hierin die störende Masse für die Flächeneinheit derjenigen Fläche, auf welcher wir uns die störenden Massen ausgebreitet denken. Zufolge der Bedingungen, welche (5) zu grunde liegen, muß man die Meeresfläche selbst als diese Fläche nehmen.

Indem wir beachten, daß nach S. 148 (2) in der hier innegehaltenen Genauigkeit

$$T = N\gamma,$$

aufserdem aber ebenso genau

$$\gamma = \frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R$$

gesetzt werden kann, folgt aus (5):

$$\left(\frac{\partial T}{\partial h}\right)_q = -\gamma \left\{ \frac{3\vartheta}{2\Theta_m R} + \frac{N}{2R} \right\} + \dots \quad (6)$$

Führen wir (3), (4\*) und (6) in (2) ein, so ergibt sich:

$$g = \gamma + \frac{3\gamma}{2R} \left( \frac{\vartheta}{\Theta_m} - N \right) + \dots \quad (7)$$

Bezeichnen wir  $g - \gamma$  mit  $\Delta g$  und denken uns  $\vartheta$  aus der Kondensation einer Schicht von der Dicke  $D$  und der Dichtigkeit  $\frac{1}{2} \Theta_m$  entstehen, setzen wir also

$$g - \gamma = \Delta g \quad \text{und} \quad \vartheta = \frac{1}{2} \Theta_m D, \quad (8)$$

so folgt

$$\Delta g = \frac{3\gamma}{2R} \left( \frac{D}{2} - N \right) + \dots \quad (9)$$

oder 
$$D = 2 \left\{ \frac{2R}{3\gamma} \Delta g + N \right\} + \dots \quad (10)$$

Für  $\gamma$  kann man hierin den Mittelwert  $G$  setzen.

Diese Näherungsformel giebt also die Dicke  $D$  der störenden Schicht, wenn  $\Delta g$  und  $N$  bekannt sind. Sie erlangt aber erst Bedeutung, wenn mittelst der *Stokesschen* Formel  $N$  aus den  $\Delta g$  für einzelne Erdorte berechnet werden kann. Da diese letztere Formel nach unserer Darstellung  $g$  und  $\Delta g$  mit Kondensationsreduktion verlangt, muß auch in (10)  $\Delta g$  so gedacht werden.

Bei der jetzt gegebenen Darstellung ist angenommen, daß nur in der Nähe der Meeresfläche störende Massen vorhanden seien. Die Potentialtheorie lehrt aber, daß man immer unbeschadet der Wirkung außerhalb alle Massen innerhalb einer geschlossenen Fläche in einer bestimmten Weise auf derselben verteilen kann. Wir können uns also auch etwa vorhandene störende Massen im Erdinnern auf die Meeresfläche verschoben denken, wobei aber Größe und Richtung der Verschiebung unbekannt bleiben. Ein aus Formel (10) ermitteltes  $D$  bezieht sich auf diese ideelle störende Massenschicht. Wenn man also dereinst von Formel (10) wird Gebrauch machen, so erhält man nur die ideelle störende Massenschicht, nicht die wirklichen störenden Massen nach Größe und Lage. Trotzdem wird man aus dem Verlauf von  $D$  in der ideellen Schicht immerhin Vermutungen über die wirklichen störenden Massen aufstellen können, da die Dichtigkeiten im Erdkörper an gewisse Grenzwerte gebunden sind.

Vorläufig ist eine strenge Anwendung von (10) noch nicht möglich. Wir werden aber im § 38 des nächsten Kapitels sehen, daß die jetzt bekannten Beobachtungen über die Schwerkraft bereits Anhaltspunkte über die kontinentale Verteilung der Störungsmassen gewähren. Auch über mehr oder weniger lokale Störungen sind Untersuchungen mit Erfolg möglich, vergl. in diesem Kapitel § 31 S. 228 und im nächsten Kapitel § 41.

Über den Beweis des angezogenen Satzes der Potentialtheorie, der von *Gauß* aufgestellt wurde, ist zu vergleichen:

*Gauß*, *Allgemeine Lehrsätze* u. s. f. Art. 36 (vollständiger Titel auf S. 29) oder

*Dirichlet*, *Vorlesungen* u. s. f. S. 151 (voller Titel S. 14).

Wenn die einschließende Fläche als Kugelfläche angenommen wird, so kann man mit Hilfe der Theorie der Kugelfunktionen aus den gegebenen störenden Massen auf die äquivalenten, auf der Kugel ausgebreiteten Massen wie folgt schließen.

Wir nehmen den Mittelpunkt der umhüllenden Kugel als Koordinatenanfang. Dann ist nach S. 64 (1) das Potential der eingeschlossenen Massen auf einen Punkt außerhalb im Zentrumsabstand  $r'$  gleich

$$v = \frac{k^2}{r'} \left\{ M + \frac{1}{r'} \int P_1 r dm + \frac{1}{r'^2} \int P_2 r^2 dm + \frac{1}{r'^3} \int P_3 r^3 dm + \dots \right\}, \quad (a)$$

wenn  $M$  die betreffenden Massen bezeichnet.

Denken wir uns nun andererseits auf der Kugeloberfläche einen Massenbelag, so ist dessen Dichtigkeit  $\vartheta$  nach Kugelfunktionen entwickelt

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \dots,$$

wobei rechter Hand der Index den Rang der Kugelfunktionen anzeigt. Wir können aber die Formel (a) für  $v$  auch auf diesen Belag anwenden, wobei nun für  $r = a$  als Kugelradius  $dm = a^2 \vartheta d\sigma$  wird und die Integration über die Kugelfläche auszudehnen ist.

Dieselbe ergibt:

$$v = \frac{4\pi a^2 k^2}{r'} \left\{ \vartheta_0 + \frac{a \vartheta_1'}{3r'} + \frac{a^2 \vartheta_2'}{5r'^2} + \frac{a^3 \vartheta_3'}{7r'^3} + \dots \right\}, \quad (b)$$

wenn man die Sätze berücksichtigt, welche im § 28 S. 116 unter (2) und (3) gegeben sind.  $\vartheta_i'$  bedeutet, daß in  $\vartheta_i$  für  $\varphi$  und  $\lambda$  die zu dem angezogenen Punkte gehörigen Werte  $\varphi'$  und  $\lambda'$  zu setzen sind.

Die Vergleichung der Ausdrücke (a) und (b) führt, falls nur (a) wirklich explicite vorliegt, zu dem Werte  $\vartheta_0 = M$  und zu den Werten der in den  $\vartheta_i$  auftretenden Koeffizienten.

Der umgekehrte Schluss: von den Massen  $\vartheta$  auf diejenigen im Erdinnern, ist im allgemeinen unmöglich. Man wird nur, wenn  $\vartheta$  von 2,8 so sehr abweicht, daß aus physikalischen Gründen die Massenstörung nicht lediglich in der Erdkruste stattfinden kann, auf Massenstörungen im Erdinnern schließen müssen.

**§ 45. Die sogenannten Näherungsformeln zur Berechnung des Abstandes von Geoid und Normalsphäroid aus der Schwere-  
störung.** Die Entwicklung im vorhergehenden Paragraphen benutzt z. T. eine Entwicklung von *Bruns*, Figur der Erde, S. 26. Dasselbst wird aber der Punkt  $P$  der Meeresfläche nicht wie bei uns ein wenig überhalb der störenden Schicht vorausgesetzt, sondern in derselben. Mithin verschwindet in der Endformel (10) die Größe  $D$  und es wird in der Gleichung:

$$N = - \frac{2R}{3\gamma} \Delta g \quad (1)$$

ein Mittel zur Schätzung von  $N$  aus  $\Delta g$  erhalten.

*Bruns* bemerkt indessen, daß lokale Störungen die Brauchbarkeit dieser Formel beeinträchtigen können, und er verwirft in einer Besprechung in den *Fortschritten der Mathematik von 1877* (herausgegeben 1879), welche die Abhandlung von *Listing*, *Neue geometrische und dynamische Konstanten des Erdkörpers*, betrifft, dessen Vorgehen S. 37 u. ff., aus einer derartigen Formel spezielle Werte von  $N$  abzuleiten, wobei es ganz gleichgültig ist, daß *Listing* infolge anderer Herleitung einen etwas anderen Koeffizienten benutzt.

In der That ist Formel (1) für die wirkliche Ausrechnung eines  $N$  ganz wertlos. Man kann dieses im 4. Kapitel an synthetischen, den irdischen Verhältnissen entsprechenden Beispielen bestätigt sehen; denn bei diesen Beispielen kennt man  $N$ ,  $D$  und  $\Delta g$ . Die Formel



(1) giebt vielfach sogar das Vorzeichen falsch. Ebenso führt sie zu ganz falschen Resultaten, wenn man als Normalform des Geoids die Kugelfläche nimmt. Wir wollen aber dieses nicht weiter ausführen. Ursache der Wertlosigkeit der Formel (1) ist, daß  $N$ ,  $D$  und  $\Delta g \frac{R}{\gamma}$  im allgemeinen Größen von gleicher Ordnung sind. Man darf daher in einer Formel, worin sie alle drei auftreten, nicht eine derselben vernachlässigen. Formel (1) vernachlässigt aber thatsächlich die störende Schicht  $D$ , welche unterhalb des betreffenden Punktes der Meeresfläche liegt (ob die etwa noch darüberliegende Schicht in betracht kommt, hängt von der Art der Reduktion von  $g$  ab).

In seiner Abhandlung *On Gravity* etc. beschäftigt sich *Stokes* 1849 u. a. auch mit dem Einfluß der sichtbaren Massenunregelmäßigkeiten der Erdoberfläche auf die Gestalt der Meeresfläche und auf die Schwerkraft. Dabei denkt er sich dieselben auf das Meeresniveau kondensiert und zeigt nun, daß einerseits die Hebung der Meeresfläche infolge der Existenz des Potentials  $T'$  jener Massen  $T':g$  beträgt, andererseits mit dieser Hebung wegen des vermehrten Abstandes vom Erdzentrum eine Verminderung von  $g$  gleich  $2T':R$  verbunden ist. Der Verminderung steht eine Vermehrung durch die Anziehung der störenden Massen entgegen, für welche *Stokes*  $T':2R$  ableitet, indem er das Mittel der Vertikalanziehungen für einen außerhalb der Meeresfläche und einen innerhalb derselben ihr nahe liegenden Punkt nimmt, also die Anziehung der Nachbarmassen ignoriert. Hier haben wir wieder das Resultat der *Brunsschen* Entwicklung; der Gang ist bei letzterer durch Vermeidung der entbehrlichen Kugelfunktionen vereinfacht. Schließlich berücksichtigt aber *Stokes* für die Kontinente noch die Vermehrung der Schwerkraft durch die Anziehung der zwischen ungestörter und gestörter Niveauläche liegenden Schicht Festland, womit bei einer Dichtigkeit gleich der halben mittleren Erddichte eine Verminderung um  $\frac{3}{4} T':R$  in der Schwerkraft für die Erhebung  $T':g$  übrig bleibt. (*Stokes* hat anstatt  $\frac{3}{4}$  die Zahl 0,82 weil er eine etwas andere Dichtigkeit voraussetzt).

Hiernach würde also auf den Kontinenten der Abnahme der, augenscheinlich nach *Youngs* Regel reduziert vorausgesetzten Schwerkraft um  $\Delta g$  eine Erhebung der Meeresfläche von  $\frac{4}{3} \frac{\Delta g}{g} R$  entsprechen. Auf dem Ocean wäre dieselbe Formel anzuwenden, indem man sich denkt, daß hier eine darüber gelegene Schicht von der halben mittleren Dichtigkeit der Erde in Wegfall gekommen ist. Das auf den Inseln beobachtete  $g$  würde ebenfalls einfach aufs Meeresniveau nach der genannten Regel zu reduzieren sein (strenggenommen müßte man noch die Anziehung der im Meere an der halben mittleren Erddichte fehlenden Massen berücksichtigen). *Stokes* wendet übrigens für diese Fälle anstatt  $\frac{4}{3}$  den Koeffizienten  $\frac{2}{3}$  an. Denn er benutzt seine Formeln keineswegs zur Schätzung der Abstände von Geoid und Sphäroid, sondern nur zur Ermittlung des Anteiles der sichtbaren Massenunregelmäßigkeiten (Erhebung der Kontinente übers Meer, geringere Dichtigkeit des Wassers im Ocean als des



Festlandes) an den Störungen in der Lage des Meeresniveaus und in der Schwerkraft.

Diese letztere Aufgabe behandelt 1868 auch *Ph. Fischer* in seinen *Untersuchungen über die Gestalt der Erde* S. 289–292, allerdings mathematisch insofern weniger vollkommen, als er sich nicht der Potentialtheorie bedient und die Anziehung der nicht benachbarten störenden Massen deshalb nicht durch  $T:2R$  ausdrücken kann, sodaß er sie nur bis zu einem gewissen Umkreis berücksichtigt. Er bemüht sich aber, den Einfluß der speziellen Gestaltsverhältnisse der Kontinentalküsten darzustellen.

Wenn nun *Hann* u. a. in der *Gaea* 1876 Bd. 12 S. 81 unter Beziehung auf *Stokes* und *Ph. Fischer* das Pendel als Instrument zur Bestimmung der Abstände von Geoid und Erdellipsoid hinstellt, so ist das insofern nicht zutreffend, als die letztgenannten Autoren bei den entsprechenden Entwicklungen nur rein synthetisch die Störungen der Lage der Meeresfläche und der Größe der Schwerkraft für bekannte Massenstörungen ableiten wollten, allerdings mit Seitenblicken auf die vorhandenen Schwerestörungen. Ebenso wenig kann die von *Listing* a. a. O. S. 37 und die von *Hann* a. a. O. S. 139 gegebene Ableitung der Formel zur Berechnung der Erhebung  $N$  aus der Schwerestörung  $\Delta g = g - \gamma$  befriedigen. Denn diese Formeln bringen die Erhebung  $N$  und die Differenz  $\Delta g$  einfach durch *Youngs* Regel in Beziehung. Mit unseren Zahlen (S. 166) wird also gesetzt:

$$N = - \frac{4R}{5g} \Delta g. \quad (2)$$

Durch die nahe Übereinstimmung dieser Formel mit (1) darf man sich aber über ihren Wert nicht täuschen lassen!

**§ 46. Zusammenhang zwischen dem Mittelwert der reziproken Krümmungsradien in einem Punkte einer Niveaufläche und dem Differentialquotienten der Schwere nach der Höhe.**

Im 1. Kapitel S. 37 (11) war die Relation gefunden worden:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right) = \left[ \frac{1}{\varrho} \right] = \frac{W_{1.1} + W_{2.2}}{2W_3}, \quad (1)$$

worin  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  die bei nach außen convexer Krümmung positiv gerechneten Hauptkrümmungsradien in einem Punkte  $P_0$  einer Niveaufläche,  $\left[ \frac{1}{\varrho} \right]$  den Durchschnittswert aller  $1:\varrho$  daselbst,  $W_{1.1}$  den 2. Differentialquotienten von  $W$  nach  $\xi$ ,  $W_{2.2}$  denselben nach  $\eta$  und  $W_3$  den ersten nach  $\xi$  bezeichnen; wobei ferner die Normale in  $P_0$  nach außen als positive  $\xi$ -Axe dient, während die  $\xi$ - und  $\eta$ -Axe in die Tangentialebene der Niveaufläche von  $P_0$  gelegt sind. Man hat also noch

$$g = -W_3. \quad (2)$$

Nun ist nach S. 34 (8) allgemein in irgend einem Punkte bei beliebiger Lage des rechtwinkligen Axensystemes (wie sich leicht durch Transformation zeigen läßt):

$$W_{1.1} + W_{2.2} + W_{3.3} = -4\pi k^2 \Theta + 2\omega^2, \quad (3)$$

wenn  $\Theta$  die Dichtigkeit in diesem Punkte und  $\omega$  die Winkel-

geschwindigkeit der Erdrotation bezeichnet. Beachtet man nun noch, daß

$$W_{3,3} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = \frac{\partial W_3}{\partial \xi} = \frac{\partial W_3}{\partial h} \quad (4)$$

ist, so erhält man aus (1) durch Elimination von  $W_{1,1} + W_{2,2}$  mittelst (3) und Benutzung der (2) und (4):

$$\left[ \frac{1}{\varrho} \right] = - \frac{1}{2g} \frac{dg}{dh} + \frac{2\pi k^2 \Theta - \omega^2}{g}. \quad (5)$$

Um hieraus  $k^2$  zu eliminieren, führen wir im Nenner rechter Hand die Näherungsrelation

$$g = \frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R$$

ein und erhalten so:

$$\left[ \frac{1}{\varrho} \right] = - \frac{1}{2g} \frac{dg}{dh} + \frac{1}{R} \left\{ \frac{3}{2} \frac{\Theta}{\Theta_m} - \frac{\omega^2 R}{g} \right\}. \quad (6)$$

Hierin beziehen sich  $g$ ,  $dg : dh$  und  $\Theta$  auf denjenigen Punkt, für welchen  $[1 : \varrho]$  gilt.

Auf diese Relation macht *H. Bruns* in seiner *Figur der Erde* S. 14 aufmerksam.

Mit Rücksicht auf die starken Schwankungen, welchen  $1 : \varrho$  bekanntlich in der Nähe der Erdoberfläche ausgesetzt ist, kann man das Glied  $\omega^2 R : g$ , welches nach S. 84 § 16 gleich rund  $1/280$  ist, vernachlässigen; für Niveauflächen in der Luft außerdem noch das Glied mit  $\Theta : \Theta_m$ , d. i. rund  $1/4500$ . Man erhält also für Niveauflächen in der Luft angenähert:

$$\left[ \frac{1}{\varrho} \right] = - \frac{1}{2g} \frac{dg}{dh}. \quad (7)$$

Bei der geringen Genauigkeit, mit welcher man gegenwärtig im Stande ist,  $dg : dh$  zu messen, reicht diese Relation zur Bestimmung von  $[1 : \varrho]$  sicher aus. Man vergl. weiterhin im 4. Kapitel § 3.

Wir entwickeln hier noch im Anschluß an § 39 S. 245 mittelst (7) eine Gleichung, welche zeigt, wie die höheren Kugelfunktionen in der Entwicklung von  $W$  auf den Mittelwert  $[1 : \varrho]$  übergehen. Aus (4) S. 246 folgt mit Beibehaltung der daselbst erörterten Genauigkeit successive:

$$g = \frac{1}{r'^2} \left\{ K_0' + \frac{3K_2'}{r'^2} + \frac{4K_3'}{r'^3} + \frac{5K_4'}{r'^4} + \dots - \omega^2 r'^3 \cos^2 \varphi' \right\}$$

und

$$- \frac{dg}{dh} = \frac{2}{r'^3} \left\{ K_0' + \frac{3.4}{2} \frac{K_2'}{r'^2} + \frac{4.5}{2} \frac{K_3'}{r'^3} + \frac{5.6}{2} \frac{K_4'}{r'^4} + \dots + \frac{1}{2} \omega^2 r'^3 \cos^2 \varphi' \right\};$$

mit Rücksicht auf (7) ist demnach

$$\left[\frac{1}{\varrho}\right] = \frac{1}{r'} \left\{ 1 + \frac{2.3 K_2'}{2 r'^2 K_0'} + \frac{3.4 K_3'}{2 r'^3 K_0'} + \frac{4.5 K_4'}{2 r'^4 K_0'} + \dots + \frac{3 \omega^2 r'^3 \cos^2 \varphi'}{2 K_0'} \right\},$$

oder mit Einführung der S. 247 schon benutzten Abkürzungen und Vereinfachungen:

$$\left[\frac{1}{\varrho}\right] = \frac{1}{r'} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \tau \cos^2 \varphi' + \frac{2.3}{2.1} k_2 + \frac{3.4}{2.2} k_3 + \frac{4.5}{2.3} k_4 + \dots \right\}.$$

Nun ist nach S. 247 (13):

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{R} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \tau \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) - k_2 - \frac{1}{2} k_3 - \frac{1}{3} k_4 - \dots \right\},$$

und es wird daher

$$\left[\frac{1}{\varrho}\right] = \frac{1}{R} \left\{ 1 + \tau \left( \frac{1}{3} - \sin^2 \varphi' \right) + \frac{2.3-2}{2.1} k_2 + \frac{3.4-2}{2.2} k_3 + \frac{4.5-2}{2.3} k_4 + \dots \right\}. \quad (8)$$

Diese Gleichung zeigt im Vergleich mit (12) S. 247, daß die Kugelfunktionen höheren Ranges in  $g$  in dem Durchschnittswerte der reziproken Krümmung sehr großen Einfluß erlangen.

#### Viertes Kapitel.

### Synthetische Untersuchungen über die Einflüsse gegebener Massen auf die Niveaulächen in der Nähe der Erdoberfläche.

§ 1. Deformation der Niveaulächen außerhalb durch einen kugeligen Massenzuwachs oder einen kugeligen Massendefekt unterhalb des Terrains. Die Erde ersetzen wir durch eine Kugel vom Radius  $R$ , deren Anziehung so beschaffen ist, als wäre ihre Masse

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \varpi_m \quad (1)$$

im Mittelpunkt  $C$ , dem Schwerpunkt, vereinigt. Wir setzen also ihr Anziehungspotential außerhalb der Oberfläche für einen Punkt im Abstand  $H$  von derselben gleich

$$W = k^2 \frac{M}{R+H} = \frac{4}{3} \pi k^2 \varpi_m \frac{R^3}{R+H}. \quad (2)$$

Das Symbol  $W$ , welches bisher bei den strengen Betrachtungen das Potential der Zentrifugalkraft mit einschloß, behalten wir bei, obwohl wir von der Zentrifugalkraft als unwesentlich ganz absehen, und zwar um daran zu erinnern, daß es sich für uns in  $W$  um den Repräsentanten des Schwerkraftspotentials der Erde handelt.

Tritt nun zur Masse  $M$  innerhalb deren Oberfläche noch eine störende, positive oder negative Masse  $m$ , deren Anziehung außerhalb jener Oberfläche als von ihrem Schwerpunkt  $m$  ausgehend angesehen werden darf, dann ist das Potential in einem Punkte  $P$ , der nach aussen um  $H + h$  von der erwähnten Oberfläche absteht, Fig. 32, gleich

$$W = k^2 \left( \frac{M}{R+H+h} + \frac{m}{c} \right) = \frac{4}{3} \pi k^2 \rho_m \frac{R^3}{R+H+h} + k^2 \frac{m}{c}, \quad (3)$$

worin  $c$  den Abstand  $mP$  bezeichnet. Verstehen wir unter  $W$  in (2) und (3) denselben konstanten Wert  $W_0$ , so stellen sie die Gleichung einer Niveaufläche außerhalb für denselben Potentialwert im ursprünglichen und im gestörten Zustande dar\*). Aus der Subtraktion von (2) und (3) folgt dann mit Rücksicht auf den jedenfalls kleinen Betrag von  $h$  und  $H$  gegen  $R$  in hinreichender Annäherung:

$$h = \frac{m}{M} \frac{R^2}{c} = \frac{3}{4} \frac{m}{\pi \Theta_{\infty} R} \cdot \frac{1}{c}. \quad (4)$$

Hiernach ist das Produkt  $hc$  für die gestörte Niveaufläche konstant. Dem kleinsten  $c$  entspricht das größte  $h$ .

Um zu erkennen, wie groß  $h$  werden kann, setzen wir für  $m$  die Masse einer Kugel vom Radius  $a$  und der Dichtigkeit  $\Theta$ :

$$m = \frac{1}{3} \pi a^3 \Theta.$$

Dann gibt (4) für  $k$  die Formel:

$$h = a \frac{a^2 \Theta}{ek \Theta_m} \quad (1^*)$$

Der Faktor von  $a$  rechter Hand ist ein kleiner Bruch, da nach der Voraussetzung  $c > a$  sein muß und  $\Theta : \Theta_m$  höchstens einige Einheiten beträgt. (Für eine Platinugel wird  $\Theta : \Theta_m$  nach Abzug von 2,8 für die normale Dichtigkeit der Erdrinde etwa 3, für eine Bleiugel 1,5, für einen Hohlraum  $-0,5$ .) Es wird somit  $h$  nur ein Bruchteil des Halbmessers der Massenstörung im Betrage von kaum  $1''$ , sobald wir festsetzen, daß die Ausdehnung der Massenstörung den Betrag einiger Meilen nicht überschreitet. Alsdann dürfen wir  $c$  anstatt auf  $P$  auf den in Richtung  $PC$  liegenden Punkt  $Q$  der un-

\*) Bei negativen Werten  $h$  muß  $H + h$  doch positiv genommen werden, sonst gilt (3) nicht streng.

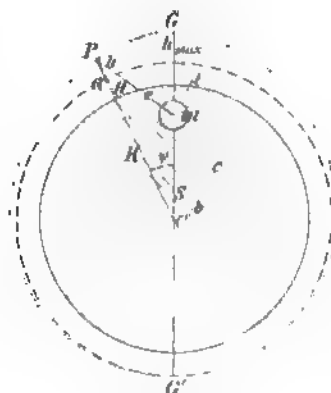


Fig. 3a

gestörten Niveaufläche beziehen und können also in ausreichender Annäherung setzen:

$$e^2 = (R + H)^2 + c^2 - 2(R + H)c \cos \psi. \quad (5)$$

Nach dieser Gleichung ist  $e$  für  $\psi = \text{null}$  ein Minimum im Betrage von

$$t = R + H - c; \quad (6)$$

das Maximum von  $h$  tritt also in der Geraden  $Cm$  in  $G$  ein und ist gleich

$$h_{\max} = \frac{3}{4} \frac{m}{\pi \Theta_m R t} = \frac{a^3}{R t} \frac{\Theta}{\Theta_m}. \quad (7)$$

Nehmen wir  $a = 5000^m$ , womit der Kubikinhalt der störenden Masse rund  $1\frac{1}{4}$  Kubikmeile wird, so folgt für eine Bleikugel  $h_{\max} \leq 6^m$ . Für einen Hohlraum ist  $\Theta : \Theta_m$  wie bemerkt etwa gleich  $-0,5$ ; der absolute Wert von  $h_{\max}$  ist hierbei  $< 2^m$ .

Von dem Maximalwert an nimmt  $h$  absolut genommen stetig ab bis zum Punkte  $G'$  diametral gegenüber  $G$ . Alle  $h$  haben also einerlei Zeichen.

Dies wird anders, wenn wir die gestörte Niveaufläche auf eine Fläche beziehen, die den Niveausphäroiden des 2. Kapitels entspricht.

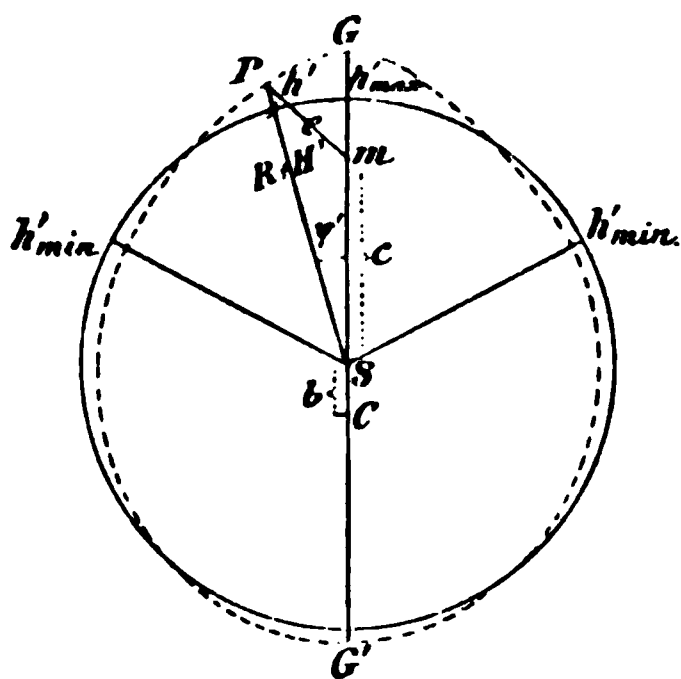


Fig. 33.

Eine Entwicklung von  $W$ , welches durch (3) gegeben ist, nach Kugelfunktionen würde aber beginnen mit  $(M + m) : r$ , wenn  $r$  den Radiusvektor vom Massenschwerpunkt  $S$  aus bezeichnet. Als Normalform der Niveauflächen nehmen wir nun diejenige, deren Potential gleich  $(M + m) : r$  ist, wobei wir für  $r$  setzen  $R + H'$ , Fig. 33.

Wir haben also einerseits für die Normalform, eine Kugelfläche konzentrisch um  $S$  mit dem Radius  $R + H'$ ,

das konstante Potential gleich

$$W_0 = k^2 \frac{M + m}{R + H'}; \quad (8)$$

andererseits für die Niveaufläche selbst, bezogen auf  $S$ , indem in (3), solange  $m : M$  ein kleiner Bruch ist,  $R + H + h$  in ausreichender Annäherung gleich  $R + H' + h' + b \cos \psi'$  gesetzt wird, wenn  $b$  die Distanz  $CS$  und  $h'$  die Erhebung der Niveaufläche über ihre Normalform bedeutet:

$$W_0 = k^2 \left\{ \frac{M}{R + H' + h' + b \cos \psi'} + \frac{m}{e} \right\}. \quad (9)$$

Die Subtraktion der Gleichung (8) von (9) führt mit zulässigen Vernachlässigungen zu der Gleichung für  $h'$ :

$$h' = \frac{mR^2}{M} \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{R} \right) - b \cos \psi'.$$

Nimmt man für den Schwerpunktsabstand  $CS$  den leicht zu verifizierenden Annäherungswert

$$CS = b = \frac{m}{M} R, \quad (10)$$

welcher genügt, solange  $m$  in der Erdrinde vorausgesetzt wird, so folgt endlich

$$h' = R \frac{m}{M} \left\{ \frac{R}{e} - [1 + \cos \psi'] \right\}, \quad (11)$$

wobei es nach Analogie von (5) ausreicht zu setzen (vergl. Fig. 33, in welcher  $c'$  für  $c$  zu lesen ist):

$$e^2 = (R + H')^2 + c'^2 - 2(R + H') c' \cos \psi'. \quad (12)$$

Für groÙe Werte von  $\psi'$  kann man hierin auch  $H'$  vernachlässigen.

Man bemerkt nun leicht, daß die Niveaufläche und ihre Normalform gleiches Volumen haben, wie auch aus dem 3. Kapitel § 43 S. 257 bekannt ist. Es wird nämlich, was hiermit gleichbedeutend, das über die Kugelfläche vom Radius 1 ausgedehnte Integral

$$\int h' (R + H')^2 d\sigma' \quad (13)$$

gleich null, wobei  $d\sigma'$  das Oberflächenelement der Kugel vom Radius 1 ist. Mit Rücksicht auf den Rotationscharakter der Niveauflächen in Bezug auf die Linie  $CSmG$  kann man für dieses Integral schreiben

$$2\pi \int_0^\pi h' (R + H')^2 \sin \psi' d\psi'$$

und wird nun leicht mit Rücksicht auf (11) und (12) bestätigt finden, daß der Wert des Integrales innerhalb zulässiger Vernachlässigungen (die überdies durch genauere Aufstellung des Ausdruckes für  $h'$  vermieden werden können) null ist.

In Bezug auf die Verteilung der  $h'$  nach ihrer Größe ist wesentlich, daß der Massenschwerpunkt  $S$  auch den Volumenschwerpunkt der gestörten Niveaufläche bezeichnet, wie auch aus § 43 des 3. Kapitels hervorgeht. Zum Zwecke eines direkten Nachweises bilden wir in Bezug auf eine durch  $S$  gelegte zu  $SG$  normale Ebene die statischen Momente der Volumenelemente; hierbei kann das Volumen der Kugel  $R + H'$  wegbleiben. In hinreichender Annäherung wird die Summe der statischen Momente gleich dem über die ganze Kugelfläche vom Radius 1 ausgedehnten Integral

$$\int h' \cdot (R + H')^3 \cos \psi' d\sigma', \quad (14)$$

wofür man mit Rücksicht auf den Rotationscharakter der Niveaulfläche schreiben kann

$$2\pi \int_0^\pi h' (R + H')^3 \cos \psi' \sin \psi' d\psi'.$$

Die Integration bereitet keine Schwierigkeit, wenn man die durch teilweise Integration leicht herzustellende Formel

$$\int \frac{-u du}{\sqrt{1-u}} = 2u\sqrt{1-u} + \frac{4}{3}\sqrt{1-u^3} + \text{Konst.}$$

beachtet. Man erhält in der That null innerhalb zulässiger Vernachlässigungen.

Wir bringen  $h'$  nach (11) unter Substitution der Werte von  $M$  und  $m$  noch auf die Form:

$$h' = a \frac{a^2}{R^2} \frac{\Theta}{\Theta_m} \left\{ \frac{R}{e} - [1 + \cos \psi'] \right\}. \quad (15)$$

Die Differentiation nach  $\psi'$  zeigt, daß  $h'$  seinen größten Wert im Punkte  $G$  hat, von da abnimmt bis zu einem größten negativen Wert, der ungefähr für  $e = \frac{1}{2} R^2 c$  d. i. nahezu für  $e = R$  und  $\psi' = 60^\circ$  eintritt, und dann wieder zunimmt bis  $G'$ .  $h'$  ist null für  $R = 2e \cos^2 \frac{\psi'}{2}$ ; dies findet statt bei  $\psi'$  gleich rund  $30^\circ$  und  $115^\circ$ , wenn die störende Masse in der Erdrinde liegt.

Für eine daselbst befindliche Bleikugel von  $5000^m$  Radius wird die Schwerpunktsverschiebung  $4,6^m$ ,  $h'$  in  $G'$  gleich  $2,3^m$  und  $h'$  in  $G < 6^m$ .

## § 2. Fortsetzung: Lotablenkung, Krümmungsradius. Da

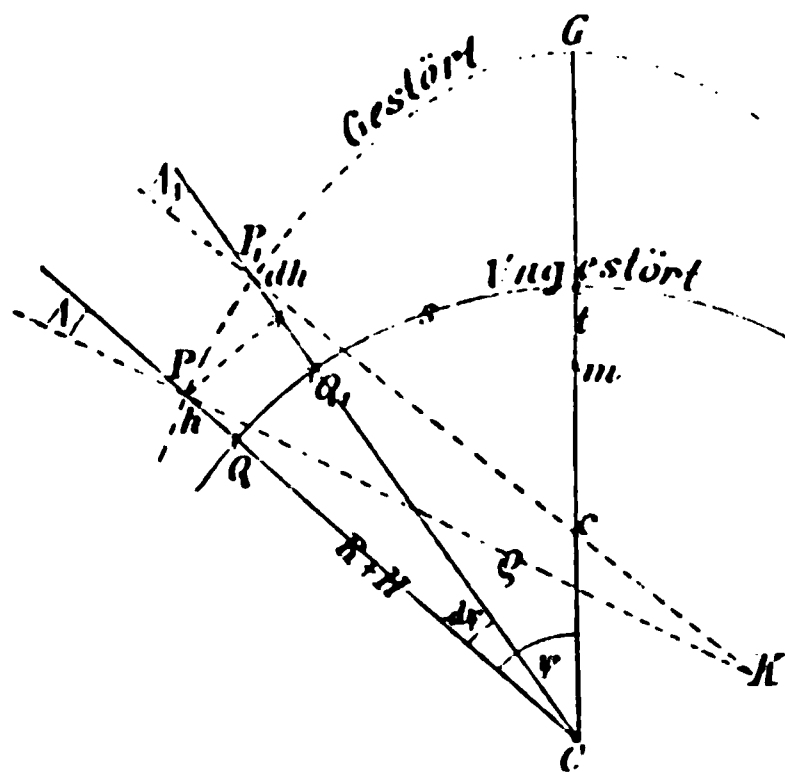


Fig. 34.

$h$  und  $h'$  sich in der Nähe der störenden Masse verhältnismäßig nur wenig unterscheiden, behalten wir für die weitere Untersuchung  $h$  bei. Die Figur 34 zeigt die ungestörte Niveaulfläche, d. i. die Kugelfläche  $R + H$  konzentrisch um  $C$ , und die gestörte Niveaulfläche. Betrachten wir einen Punkt  $P$  der letzteren und einen unendlich nahen Punkt  $P_1$  derselben, nach  $G$  hin gelegen, so wächst  $h$  um  $dh$  von  $P$  bis  $P_1$ , und diesem Wachstum entspricht eine Lotab-

lenkung im Sinne der Figur gleich

$$A = - \frac{dh}{(R + H + h) d\psi} ,$$

wofür man mit Vernachlässigung von  $H + h$  völlig genügend setzen darf:

$$A = - \frac{dh}{R d\psi} . \quad (1)$$

Für den unendlich benachbarten Punkt  $P_1$  wird die Lotablenkung gleich

$$A_1 = A + \frac{dA}{d\psi} d\psi . \quad (2)$$

Die Normalen der gestörten Niveaufläche in  $P$  und  $P_1$  schneiden sich im Krümmungsmittelpunkt  $K$  unter einem Winkel, dessen Betrag aus der Betrachtung des Vierecks  $PP_1KC$  sich zu  $-d\psi + A - A_1$  ergibt; führt man hierin (2) ein und beachtet die Figur, so wird zur Bestimmung des Krümmungsradius  $\varrho$  bei  $P$  leicht erhalten:

$$- \varrho \left( 1 + \frac{dA}{d\psi} \right) d\psi = PP_1 .$$

Da nun  $A$  jedenfalls einen sehr geringen Betrag hat, so weicht  $PP_1$  von  $-(R + H + h) d\psi$  nicht erheblich ab; wir setzen daher in ausreichender Annäherung für den Krümmungsradius  $\varrho$ :

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R + H + h} \left\{ 1 + \frac{dA}{d\psi} \right\} , \quad (3)$$

bei kleinen  $h$  also ebenso genau:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R + H} \left\{ 1 + \frac{dA}{d\psi} \right\} . \quad (3^*)$$

Die Anwendung der Formeln (1) und (3) hat auszugehen von den Gleichungen (4\*) und (5) des vorigen Paragraphen:

$$h = a \frac{a^2 \Theta}{c R \Theta_m} , \quad (4)$$

$$c = \sqrt{(R + H)^2 + c^2 - 2(R + H)c \cos \psi} .$$

Hiernach wird mit einigen zulässigen Vernachlässigungen:

$$A = \frac{a^3 c \Theta}{c^3 R \Theta_m} \sin \psi \quad (5)$$

und

$$\frac{dA}{d\psi} = \frac{a^3 c \Theta}{c^3 R \Theta_m} \left\{ \cos \psi - \frac{3Rc}{c^2} \sin^2 \psi \right\} . \quad (6)$$

Setzen wir nun wieder voraus, daß die störende Masse in der Erdrinde liegt, so können nach vorstehenden Formeln nur in der Nähe dieser Masse erhebliche Störungen im Krümmungsradius entstehen, weil schon in einigem Abstände  $a^3 : c^3$  ein sehr kleiner Bruch wird.

Für die Nähe der störenden Masse genügt es aber in der Parenthese von (6) zu setzen:



$$\cos \psi = 1, \quad Rc \sin^2 \psi = s^2,$$

wenn  $s$  die horizontale Entfernung von  $G$ , lotrecht über der störenden Masse  $m$ , bezeichnet. Außerdem wird entsprechend, wie die 2. Gleichung (4) zeigt:

$$c^2 = s^2 + t^2. \quad (7)$$

Damit wird aus (6):

$$\frac{dA}{d\psi} = \frac{\alpha^3 \Theta}{c^3 \Theta_m} \left(1 - \frac{3s^2}{c^2}\right) = - \frac{2\alpha^3 \Theta}{c^3 \Theta_m} \left(1 - \frac{3t^2}{2c^2}\right). \quad (8)$$

Zugleich folgt aus (3\*):

$$\frac{1}{\varrho} = R + H \left\{1 - \frac{2\alpha^3 \Theta}{c^3 \Theta_m} \left(1 - \frac{3t^2}{2c^2}\right)\right\}. \quad (9)$$

Die Lotablenkung wird entsprechend nach (5), in Sekunden ausgedrückt:

$$A_{\text{in Sek.}} = \varrho'' \frac{\alpha^3 s \Theta}{c^3 R \Theta_m}. \quad (10)$$

Sie ist in  $G$  lotrecht über der störenden Masse gleich null; mit wachsendem Abstände  $s$  wächst sie zunächst bis zu einem Maximum und nimmt weiterhin ab. Das Maximum tritt ein für  $\frac{dA}{d\psi} = \text{null}$ , d. h. nach (6) für

$$c^2 \cos \psi = 3 Rc \sin^2 \psi,$$

oder mit Rücksicht auf die oben eingeführten, in der Nähe von  $G$  zulässigen Vernachlässigungen, für

$$c^2 = 3s^2, \text{ wobei nach (7) } t = s\sqrt{2} \quad (11)$$

ist. Es hat den Wert

$$A_{\text{max in Sek.}} = \frac{2\varrho''}{3\sqrt{3}} \frac{\alpha^3 \Theta}{t^3 R \Theta_m}. \quad (12)$$

Wenn durch Beobachtungen der Ort und die GröÙe des Maximums sowie  $G$  ermittelt sind, so giebt (11) die Tiefe an, in welcher die störende Masse liegt, (12) den Betrag  $m = \frac{4}{3} \pi \alpha^3 \Theta$  derselben.

Der Krümmungsradius  $\varrho$  hat in  $G$ , wie die Differentiation von (9) nach  $s$  zeigt, bei positivem  $\Theta$  ein Minimum, wächst von da zunächst mit  $s$  bis zu einem Maximum und nimmt dann wieder ab. In größerer Entfernung unterscheidet er sich zufolge (3) und (6) wenig von  $R + H$ . Es ist für:

$$\begin{aligned} s = 0 \quad \varrho_{\min} &= \frac{R + H}{1 + \frac{\alpha^3 \Theta}{t^3 \Theta_m}}, \\ s = \frac{t}{\sqrt{2}} \quad \varrho &= R + H, \end{aligned} \quad (13)$$

$$s = t\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \varrho_{\max} = \frac{R + H}{1 - \frac{8\sqrt{10}}{125} \frac{a^3 \Theta}{t^3 \Theta_m}}, \quad (14)$$

$s$  groß  $\varrho$  sehr nahe gleich  $R + H$ .

Im Falle eines Massendefektes, d. h. eines negativen Wertes von  $\Theta$ , ist  $\varrho$  im Punkte  $G$  ein Maximum, im Abstände  $t\sqrt{\frac{3}{2}}$  ein Minimum.

Für eine Bleikugel von 5000<sup>m</sup> Radius wird:

$$\varrho_{\min} \geq 0,4 (R + H),$$

$$\Delta_{\max} \leq 94'',$$

$$\varrho_{\max} \leq \frac{10}{7} (R + H);$$

für einen Hohlraum:

$$\varrho_{\max} \leq 2(R + H),$$

$$\Delta_{\max} \leq -31'',$$

$$\varrho_{\min} \geq \frac{10}{11} (R + H).$$

Es mag hier zum Schlusse noch bemerkt werden, daß die wichtigsten Resultate dieses und des vorhergehenden Paragraphen sich auch leicht an der Hand einer Betrachtung finden, welche von der Krümmung der ungestörten Niveaufläche absieht. Ist nämlich  $Q$  ein Punkt der letzteren, so ist hier das Potential der Masse  $m$  gleich  $k^2 \frac{m}{e}$ ,

Fig. 35; man muß daher um

$$h = k^2 \frac{m}{e} : G \quad (15)$$

vertikal in die Höhe bis  $P$  gehen, damit in  $P$  der ursprüngliche Potentialwert wieder vorhanden ist.

$G$  bezeichnet hierin die ungestörte Schwerebeschleunigung, für welche angenähert  $\frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R$  zu setzen ist; daher wird wie in § 1 (4):

$$h = \frac{3}{4} \frac{m}{\pi \Theta_m R} \cdot \frac{1}{e} = a \frac{a^3 \Theta}{e R \Theta_m}, \quad (16)$$

wobei  $e^2 = s^2 + t^2$  ist. Hieraus folgt die Lotablenkung

$$\Delta = -\frac{dh}{ds} = \frac{a^3 s \Theta}{e^3 R \Theta_m}, \quad (17)$$

ganz wie in § 2 (10). Endlich ist  $-\varrho \cdot d\Delta = PP_1$  oder hinreichend genau  $= -ds$ ; daher wird

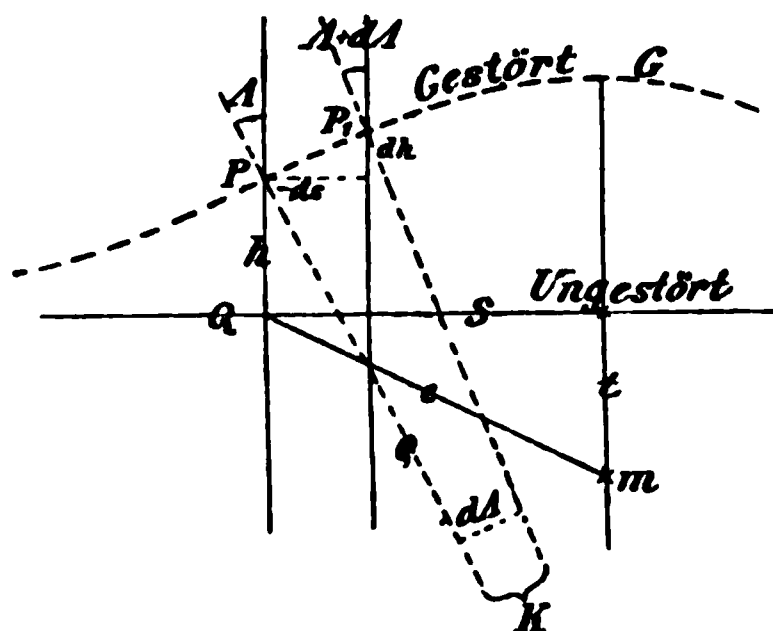


Fig. 35.

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{dA}{ds} = - \frac{2a^3 \Theta}{e^3 R \Theta_m} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{t^2}{e^2} \right). \quad (18)$$

Von dieser Formel gelangt man bis auf eine unwesentliche Abweichung zu der richtigen Formel (9), indem man noch die Biegung der ungestörten Niveaufläche berücksichtigt und demgemäß rechter Hand  $1 : (R + H)$  addiert\*).

Mit Rücksicht auf (3) hat man allgemein:

$$\frac{1}{\varrho} \left\{ \begin{aligned} &= \frac{1}{R + H + h} + \frac{dA}{ds} \\ &= \frac{1}{R + H + h} - \frac{d^2 h}{ds^2} \end{aligned} \right. \quad (19)$$

§ 3. Fortsetzung: Die gestörte Schwerkraft. Nach § 1 (3) S. 267 ist das Potential der Schwerkraft im Punkte  $P$ , wenn der Radiusvektor  $CP$  mit  $r$  bezeichnet wird, gleich

$$W = k^2 \left\{ \frac{M}{r} + \frac{m}{e} \right\} \quad (1)$$

mit

$$e = \sqrt{r^2 + c^2 - 2rc \cos \psi};$$

vergl. Fig. 32 S. 267. Wegen der Geringfügigkeit der Lotablenkung können wir die radiale Komponente der Schwerkraft für die ganze Schwerkraft nehmen, also setzen

$$g = - \frac{\partial W}{\partial r}. \quad (2)$$

Hieraus folgt sofort

$$g = k^2 \left\{ \frac{M}{r^2} + \frac{m}{e^3} (r - c \cos \psi) \right\}. \quad (3)$$

Für eine bestimmte Niveaufläche genügt es mit Vernachlässigung von  $h$  zu setzen  $r = R + H^{**}$ ). Beschränken wir uns außerdem auf die Nähe der störenden Masse, so wird

$$e^2 = s^2 + t^2 \text{ und } r - c \cos \psi = t,$$

also

$$g = k^2 \left\{ \frac{M}{(R + H)^2} + \frac{mt}{e^3} \right\}. \quad (4)$$

Bezeichnen wir den ungestörten Wert von  $g$ , nämlich  $k^2 M : (R + H)^2$  mit  $G$  und beachten die Relationen

\*) Von diesem Verfahren, bei Bestimmung von  $\varrho$  erst zuletzt die Biegung der ungestörten Niveaufläche zu berücksichtigen, kann man auch in anderen Fällen Gebrauch machen, vorausgesetzt nur, daß gestörte und ungestörte Niveaufläche nahezu parallel laufen.

\*\*) Es wird somit hier kein Unterschied gemacht zwischen der *gestörten* Schwerkraft in der gestörten und der ungestörten Niveaufläche, was solange zulässig ist, als  $h$  nur einige Meter beträgt.

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \Theta_m \quad m = \frac{4}{3} \pi a^3 \Theta,$$

so wird

$$g = G \left( 1 + \frac{a^3 t \Theta}{e^3 R \Theta_m} \right). \quad (4^*)$$

Die größte Störung im Verlaufe einer Niveaufläche erleidet darnach die Schwerkraft im Scheitel  $G$  derselben, vertikal über der störenden Masse. Man hat nämlich daselbst,  $\Theta$  positiv gedacht:

$$g_{\max} = G \left\{ 1 + \frac{a^3 \Theta}{t^2 R \Theta_m} \right\}. \quad (5)$$

Für eine Bleikugel von  $5000^m$  Radius ist daher die maximale Störung in  $g$  gleich

$$\delta g \leq G : 850;$$

für einen Hohlraum gleicher Ausdehnung ist, absolut genommen:

$$\delta g \leq G : 2550.$$

Aus (3) folgt noch durch Differentiation nach  $r$

$$\frac{\partial g}{\partial r} = -k^2 \left\{ \frac{2M}{r^3} + \frac{3m}{e^3} (r - c \cos \psi)^2 - \frac{m}{e^3} \right\}. \quad (6)$$

Diese Formel giebt zugleich sehr nahe die Änderung von  $g$  mit der Höhe  $h$ . Wir können demnach mit Beschränkung auf Punkte einer bestimmten Niveaufläche in der Nähe der störenden Masse setzen:

$$\frac{dg}{dh} = -k^2 \left\{ \frac{2M}{(R+H)^3} + \frac{3mt^2}{e^3} - \frac{m}{e^3} \right\} \quad (7)$$

oder auch sehr nahe

$$\frac{dg}{dh} = -\frac{2G}{R+H} \left\{ 1 + \frac{a^3 \Theta}{2e^3 \Theta_m} \left( \frac{3t^2}{e^2} - 1 \right) \right\}. \quad (8)$$

Differenziert man diesen Differentialquotienten nach  $e$ , so bemerkt man, daß sein absoluter Wert ein Maximum ist im Punkte  $G$ ,  $\Theta$  positiv gedacht. Von da an nimmt derselbe ab, geht bei  $e^2 = 3t^2$  durch den ungestörten Wert hindurch, nimmt weiter ab bis  $e^2 = 5t^2$ , wo ein Minimum eintritt, und nimmt von da an wieder zu bis zum ungestörten Wert. Für den Punkt  $G$  ist

$$\left( \frac{dg}{dh} \right)_{\max} = -\frac{2G}{R+H} \left\{ 1 + \frac{a^3 \Theta}{t^3 \Theta_m} \right\}, \quad (9)$$

aus welcher Formel man ersieht, daß der ungestörte Wert des Differentialquotienten von  $g$  nach der Höhe sich beträchtlich ändern kann. Eine Vergleichung mit S. 272 (13) zeigt, daß der Betrag der Störung verhältnismäßig derselbe ist, wie im Krümmungsradius für Punkt  $G$ .

In neuerer Zeit haben einige Physiker versucht, die Abnahme von  $g$  mit der Höhe aus feinen Wägungen abzuleiten. Vorstehendes zeigt,

dafs man auf diesem Wege dem ungünstigen Einfluss lokaler Anziehungen viel zu sehr ausgesetzt ist, um erwarten zu können, dafs die Resultate den normalen Wert  $2G:(R+H)$  geben. Eher könnte man diese Messungen dazu benutzen,  $1:\rho$  zu bestimmen, oder, abgesehen von dem hier betrachteten, speziellen Falle, allgemeiner nach S. 264 § 46 des 3. Kapitels, um einen Mittelwert von  $1:\rho$  aller Vertikalschnitte der Niveaufläche an dem betreffenden Punkte der Beobachtung herzuleiten\*).

§ 4. Fortsetzung: Vergleichung der Einwirkung auf  $r$ ,  $g$ ,  $\rho$  u. s. w. Nicht uninteressant ist es, die Maximalwirkungen der Masse  $m$  auf die verschiedenen in betracht kommenden Gröfsen zusammenzustellen. Wir nehmen dabei die störende Masse  $m = \frac{4}{3} \pi a^3 \Theta$  und bilden immer den nachstehenden Quotienten:

$$\frac{\text{Gestörter Wert} - \text{ungestörter Wert}}{\text{ungestörter Wert}}.$$

Wir erhalten dann aus (7) S. 268 für die Störung im Radiusvektor:

$$\frac{h_{\max}}{R} = \frac{\Theta}{\Theta_m} \cdot \frac{a^3}{R^3 t}; \quad (1)$$

ferner aus (5) S. 275 für die Störung in der Schwerkraft:

$$\frac{g_{\max} - G}{G} = \frac{\Theta}{\Theta_m} \cdot \frac{a^3}{R t^2}, \quad (2)$$

welcher Quotient auch in der Lotablenkung auftritt; denn es ist nach (12) S. 272:

$$\Delta_{\max} = \frac{2\varrho''}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\Theta}{\Theta_m} \cdot \frac{a^3}{R t^2}. \quad (2^*)$$

Aus (13) S. 272 folgt weiter für die Störung im reziproken Krümmungsradius:

$$\frac{\frac{1}{\varrho_{\min}} - \frac{1}{R+H}}{\frac{1}{R+H}} = \frac{\Theta}{\Theta_m} \cdot \frac{a^3}{t^3} \quad (3)$$

\*) In den *Verhandlungen der 6. allgem. Konferenz der europäischen Gradmessung zu München 1880* S. 36 berichtet von Jolly über seine bezüglichen Beobachtungen. Er fand in einem gewissen Falle anstatt 33,1 Milligramm den Wert 32,8 Milligramm als Einfluss der Höhenlage auf die Anziehung, d. h. also, er fand  $dg:dh$  absolut genommen um ca. 1% zu klein. In den *Abh. der kön. bayer. Ak. d. Wiss. II. Cl., Bd. 14, 2. Abt. 1881* sind die Zahlen genauer zu 33,059 und 31,686 angegeben, d. h. die Änderung von  $g$  mit  $h$  ist um ca. 4% zu klein. Vergl. weiterhin den Schlussparagraphen dieses Kapitels.

und aus (9) S. 275 für die Störung im Differentialquotienten der Schwerkraft nach der Höhe:

$$\frac{\left(\frac{dg}{dh}\right)_{\max} - \left(-\frac{2G}{R+H}\right)}{\left(-\frac{2G}{R+H}\right)} = \frac{\Theta}{\Theta_{\text{III}}} \cdot \frac{a^3}{t^3}. \quad (3^*)$$

Die stärksten Wirkungen sind also diejenigen auf  $\varrho$  und  $\frac{dg}{dh}$  nach (3) und (3\*), die schwächste ist diejenige auf den Radiusvektor und dazwischen stehen diejenigen auf  $g$  und die Richtung des Lotes. Dieses sind zugleich die störenden Wirkungen, welche in der Regel bei Beobachtungen von Einfluß sind, da man weder den Radiusvektor, noch den Krümmungsradius direkt messen kann und auch die Messung der Schwereabnahme mit der Höhe nur unter außergewöhnlichen Umständen erreichbar ist.

Zeigt sich bei den Beobachtungen, daß die Anomalieen in  $g$  und in der Lotrichtung lokaler Natur sind, dann entsprechen denselben jedenfalls nur sehr kleine Änderungen im Radiusvektor, während  $\varrho$  stark variieren kann.

Die Wirkungen einer unterirdischen Massenuuregelmäßigkeit untersucht bereits *Young* in den *Philosophical Transactions* 1819 p. 89–92; spätere Untersuchungen finden sich in dem Hauptwerk der englischen Vermessung *Ordnance Survey, Principal Triangulation* (1858) p. 585; von *Dahlander* in *Poggendorff's Ann.* (1862) Bd. 117 S. 148; in *Thomson und Tait, Handbuch der theor. Physik* Bd. I. 2 (1874), S. 341–343; von *Winterberg* in *Astronom. Nachr.* Bd. 91 (1878) S. 97–108, und in *Clarke, Geodesy* (1880) p. 88–93.

Durchaus unklar sind die Angaben *Winterbergs*, aus Nivellements die Gestalt der Niveauflächen zu bestimmen. Im 7. Kap. werden wir zeigen, daß die Resultate der Präzisionsnivellements von der Gestalt der Niveauflächen so unabhängig sind, daß ein Rückschluß auf die letztere unmöglich ist. Selbst mit der Anordnung, welche *Bauernfeind* den Nivellements gegeben, um die Krümmung der Niveauflächen zu studieren (vergl. *Bruns, Figur der Erde*, S. 41), ist praktisch noch kein Erfolg erzielt worden. Auch scheint *Winterberg* an diese Anordnung nicht zu denken. Daß man die Höhenstörungen der Niveauflächen direkt nicht aus Nivellements bestimmen kann, dürfte wohl diesem Autor bekannt gewesen sein.

*Clarke, Geodesy* p. 98–101, untersucht auch den Effekt, den eine *radiale Verschiebung einer Masse* giebt. Man kann dies aus dem hier gegebenen leicht abstrahieren; sollte die Masse als Halbkugel hervortreten, so vergl. weiterhin § 16.

In der *Ordnance Survey* p. 591 sind auch die Störungen durch einen unendlich langen, liegenden, *unterirdischen Kreiscylinder* behandelt.

§ 5. Fundamentalformeln für die mittleren Teile langer, horizontaler Prismen. In Fig. 36 stelle das Dreieck  $O.1.2$  den Querschnitt eines geraden Prismas normal zu den horizontalen Kanten vor. Wir zerlegen das Prisma der Länge nach in Elemente vom

Querschnitt  $dq$ . Hat ein solches Element vom Punkt  $O$  den kürzesten Abstand  $r$ , welcher im Querprofil gemessen wird, so ist

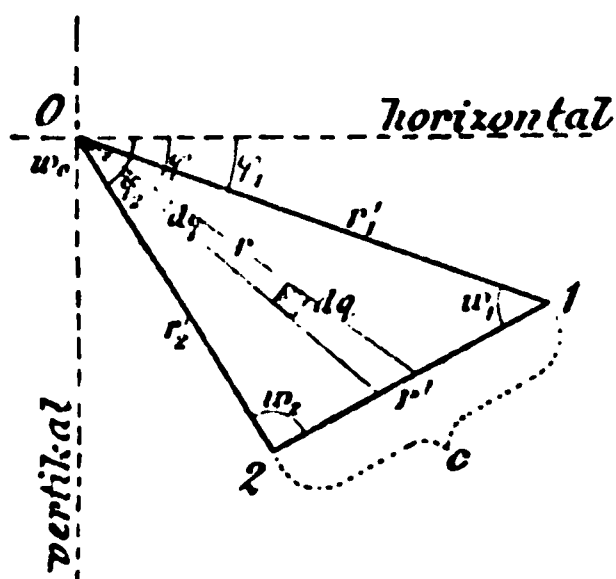


Fig. 36.

$$k^2 \Theta \int_{-L_1}^{+L_2} \frac{dq dx}{\sqrt{r^2 + x^2}} \quad (1)$$

das Potential der Anziehung des Elements auf Punkt  $O$ , wenn  $\Theta$  die konstante Dichtigkeit des Prismas ist und  $x$  einen Abstand vom Querprofil in der Längsrichtung bezeichnet, der von  $-L_1$  bis  $+L_2$  variiert. Nach einer bekannten Grundformel der Integralrechnung wird das Potential (1) gleich

$$k^2 \Theta \left\{ \log \text{nat} \left( \frac{L_2}{r} + \sqrt{\frac{L_2^2}{r^2} + 1} \right) + \log \text{nat} \left( \frac{L_1}{r} + \sqrt{\frac{L_1^2}{r^2} + 1} \right) \right\} dq. \quad (2)$$

Nehmen wir  $L_1$  und  $L_2$  gegen  $r$  sehr groß an, so geht (2) mit für unsere Zwecke genügender Genauigkeit über in

$$k^2 \Theta \left\{ \log \text{nat} \frac{2L_2}{r} + \log \text{nat} \frac{2L_1}{r} \right\} dq,$$

und hieraus folgt, indem wir

$$\sqrt{L_1 L_2} = L \quad (3)$$

setzen, als Potential des Elementes vom Querschnitt  $dq$ :

$$2k^2 \Theta \log \text{nat} \frac{2L}{r} \cdot dq. \quad (4)$$

Der Fehler dieses Ausdruckes ist, wie die Reihentwicklung von (2) zeigt, angenähert gleich

$$+ 2k^2 \Theta dq \cdot \left( \frac{r}{2L} \right)^2, \quad (4^*)$$

mithin für  $2L = 10r$  bereits weniger wie  $1/2$  % des Ausdruckes (4).

Differenziert man (4) nach  $r$ , so ergibt sich die Anziehung des Elementes auf Punkt  $O$  in Richtung des durch eine Verschiebung von  $O$  wachsenden Radiusvektors  $r$ . Damit erhält man mit Rücksicht auf die Figur leicht als horizontale Komponente der Anziehung des Elementes normal zu dessen Längsrichtung:

$$2k^2 \Theta \frac{dq}{r} \cos \varphi, \quad (5)$$

und als vertikale Komponente derselben:

$$2k^2 \Theta \frac{dq}{r} \sin \varphi. \quad (6)$$

Der Fehler der Gesamtanziehung ist gleich

$$- 2k^2 \Theta \frac{dq}{r} \cdot 2 \left( \frac{r}{2L} \right)^2, \quad (6^*)$$

mithin für  $2L = 10r$  gleich  $2\%$  der sich aus (5) und (6) zusammensetzenden Gesamtanziehung.

Wir führen nunmehr Polarkoordinaten ein, wie Fig. 36 zeigt, sodafs  $dq = r dr d\varphi$  wird, und integrieren den Ausdruck (4) zunächst nach  $r$  von null bis an die Peripherie des Querschnitts, woselbst  $r$  in  $r'$  übergeht. Nun ist durch teilweise Integration leicht zu finden, dafs

$$\int_0^{r'} r \log \text{nat} \frac{2L}{r} dr = \frac{1}{2} r'^2 \left\{ \log \text{nat} \frac{2L}{r'} + \frac{1}{2} \right\},$$

wobei nur zu beachten ist, dafs  $r \log \text{nat} r$  für  $r$  gleich null in null übergeht. Hiermit findet sich aus (4) als Potential der Anziehung des ganzen Prismas auf Punkt  $O$ :

$$v = k^2 \Theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\{ \log \text{nat} \frac{2L}{r'} + \frac{1}{2} \right\} r'^2 d\varphi. \quad (7)$$

Integriert man auch (4\*) nach  $r$ , so findet man, dafs (7) auf etwa  $1/6\%$  genau ist für ein Prisma, dessen Länge zehnmal so groß ist als  $r_1'$  und  $r_2'$  im Mittel.

Um nach  $\varphi$  zu integrieren, setzen wir mit Rücksicht auf Fig. 36 für  $r'$  den Ausdruck

$$r' = r_1' \frac{\sin w_1}{\sin(w_1 + \varphi - \varphi_1)},$$

in welchem Ausdruck nur  $\varphi$  variabel ist. Für die Ausmittelung von (7) kommt es aber auf das Integral

$$\int \frac{\log \text{nat} \frac{2L \sin(w_1 + \varphi - \varphi_1)}{r_1' \sin w_1} + \frac{1}{2}}{\sin^2(w_1 + \varphi - \varphi_1)} d\varphi$$

an, das durch teilweise Integration übergeht in

$$\begin{aligned} & - \left\{ \log \text{nat} \frac{2L \sin(w_1 + \varphi - \varphi_1)}{r_1' \sin w_1} + \frac{1}{2} \right\} \cot(w_1 + \varphi - \varphi_1) \\ & + \int \cot^2(w_1 + \varphi - \varphi_1) d\varphi; \end{aligned}$$

da nun

$$\int \cot^2(w_1 + \varphi - \varphi_1) d\varphi = -\cot(w_1 + \varphi - \varphi_1) - \varphi + \text{Konst.},$$

so findet man endlich ohne Schwierigkeit aus (7):

$$v = k^2 \Theta r_1'^2 \sin^2 w_1 \left\{ \begin{aligned} & \cot w_1 \left[ \log \text{nat} \frac{2L}{r_1'} + \frac{3}{2} \right] \\ & + \cot w_2 \left[ \log \text{nat} \frac{2L}{r_2'} + \frac{3}{2} \right] - w_0 \end{aligned} \right\},$$



wobei  $w_0 = \varphi_2 - \varphi_1$  und  $w_2 = \pi - w_0 - w_1$  sowie  $r_2' = r_1' \sin w_1 : \sin w_2$  eingeführt sind.

Anstatt des vorstehenden Ausdruckes erhält man, wenn vor der grossen Parenthese ein Mal  $r_1' \sin w_1$  durch  $r_2' \sin w_2$  ersetzt wird und alsdann noch einige naheliegende Umformungen mit Rücksicht auf Fig. 36 vorgenommen werden:

$$v = 2k^2 \Theta \Delta \left\{ \frac{3}{2} + \frac{r_1' \cos w_1}{c} \log \text{nat} \frac{2L}{r_1'} + \frac{r_2' \cos w_2}{c} \log \text{nat} \frac{2L}{r_2'} - \frac{w_0}{\sin w_0} \sin w_1 \sin w_2 \right\}. \quad (8)$$

Hierin bezeichnet  $\Delta$  den Flächeninhalt des Dreiecks  $O.1.2$ , d. i. des Prismen-Querschnitts.

Eine andere bemerkenswerte Gestalt erlangt der Ausdruck für  $v$ , indem man im 1. Logarithmus für  $r_1'$  den identischen Wert  $r_2' r_1' : r_2'$  substituiert und sodann die beiden Glieder, welche den Logarithmus von  $2L : r_2'$  enthalten, zusammenzieht. Es folgt

$$v = 2k^2 \Theta \Delta \left\{ \frac{3}{2} + \log \text{nat} \frac{2L}{r_2'} + \frac{r_1' \cos w_1}{c} \log \text{nat} \frac{r_2'}{r_1'} - \frac{r_1' \sin w_1}{c} w_0 \right\}. \quad (9)$$

Ähnlich findet sich

$$v = 2k^2 \Theta \Delta \left\{ \frac{3}{2} + \log \text{nat} \frac{2L}{r_1'} + \frac{r_2' \cos w_2}{c} \log \text{nat} \frac{r_1'}{r_2'} - \frac{r_2' \sin w_2}{c} w_0 \right\}. \quad (10)$$

§ 6. Fortsetzung. Führen wir in (5) und (6) des vorigen Paragraphen für  $dq$  seinen Wert  $r dr d\varphi$  ein, so folgt unmittelbar durch Integration nach  $r$  von null bis  $r'$  als horizontale Komponente der Prismen-Anziehung normal zur Längsrichtung des Prismas:

$$2k^2 \Theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r' \cos \varphi d\varphi \quad (1)$$

und als vertikale Komponente:

$$2k^2 \Theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r' \sin \varphi d\varphi. \quad (2)$$

Führen wir wieder  $r' = r_1' \sin w_1 : \sin (w_1 + \varphi - \varphi_1)$  ein und nehmen als Variable  $\alpha = w_1 + \varphi - \varphi_1$ , so gehen (1) und (2) bzw. über in

$$2k^2 \Theta r_1' \sin w_1 \int_{w_1}^{w_0 + w_1} \frac{\cos (\alpha - w_1 + \varphi_1)}{\sin \alpha} d\alpha \quad (3)$$

und

$$2k^2 \Theta r_1' \sin w_1 \int_{w_1}^{w_0 + w_1} \frac{\sin (\alpha - w_1 + \varphi_1)}{\sin \alpha} d\alpha. \quad (4)$$

Löst man  $\sin$  und  $\cos$  im Zähler auf und integriert, was keine Schwierigkeiten bietet, beachtet auch, daß  $w_0 + w_1 = \pi - w_2$  und  $\sin w_2 : \sin w_1 = r_1' : r_2'$  ist, so folgt aus (3) für die horizontale, zur Längsrichtung normale Komponente der Anziehung:

$$2k^2 \odot r_1' \sin w_1 \left\{ w_0 \sin (w_1 - \varphi_1) + \cos (w_1 - \varphi_1) \log \text{nat} \frac{r_1'}{r_2'} \right\} \quad (5)$$

und für die vertikale Komponente:

$$2k^2 \odot r_1' \sin w_1 \left\{ w_0 \cos (w_1 - \varphi_1) - \sin (w_1 - \varphi_1) \log \text{nat} \frac{r_1'}{r_2'} \right\}. \quad (6)$$

Diese Ausdrücke besitzen scheinbar betreffs der Stücke des Dreiecks mit den Indices 1 und 2 nicht diejenige Symmetrie, die man erwarten könnte. Beachtet man aber, daß  $r_1' \sin w_1 = r_2' \sin w_2$  und daß  $w_1 - \varphi_1$  der Neigungswinkel von  $c$  gegen die Horizontale ist, so verschwindet dieser Mangel.

Wenn  $L_1$  und  $L_2$ , die Längen des Prismas beiderseits des durch den Punkt  $O$  geführten Querschnitts, nicht genau einander gleich sind, so existiert noch eine 3. Komponente der Anziehung auf  $O$  in Richtung der durch diesen Punkt hindurchführenden Prismenkante. Nehmen wir  $L_2 > L_1$  und beide wie oben im Verhältnis zu den Querdimensionen des Prismas groß an, so ist jene 3. Komponente offenbar sehr nahe gleich der Anziehung eines Prismas von der Länge  $L_2 - L_1$ , welches auf der Seite  $L_2$  zwischen 2 Querschnitten in den Abständen  $L_1$  und  $L_2$  von  $O$  liegt. Diese Anziehung kann angenähert gleich [Masse: Quadrat der Entfernung] gesetzt werden. Wir erhalten hiermit als 3. Komponente der Anziehung in der Längsrichtung der Kante angenähert den Wert

$$2k^2 \odot \cdot \frac{(L_2 - L_1) \Delta}{2L^2}, \quad (7)$$

worin  $\Delta$  die Querschnittsfläche und  $L$  die  $\sqrt{L_1 L_2}$  bezeichnet.

Die Genauigkeit der Formeln (5) und (6) wird in dem Falle, daß  $r_1'$  und  $r_2'$  nur etwa den 10. Teil der Gesamtlänge  $2L$  des Prismas betragen, mit Rücksicht auf (6\*) des vorigen Paragraphen gleich  $2/3$  ‰.

**§ 7. Allgemeine Formeln für die mittleren Teile eines langen Gebirgsrückens in Form eines liegenden, dreiseitigen Prismas.** Für die mittlere Gegend eines Gebirgsrückens, der wesentlich länger als breit ist, können die in den vorhergehenden beiden Paragraphen entwickelten Formeln Anwendung finden. Von der Krümmung der Erde sehen wir nach den Erfahrungen im 1. Beispiel dieses Kapitels, vergl. S. 273, vorläufig ab.

In Fig. 37 bezeichne  $ABC$  den Querschnitt des Gebirgsrückens und  $AB$  die ungestörte Niveaufläche in der Meereshöhe  $H$ . Für einen

Punkt  $P'$  derselben hat man die Wirkung aus den Wirkungen der Prismen  $AP'C$  und  $BP'C$  zusammenzusetzen und kann dabei im Vergleich mit Fig. 36 S. 278 setzen für

$$r_1' \quad r_2' \quad c \quad w_1 \quad w_2 \quad w_0 \quad \varphi_1$$

bei  $BP'C$  bzw. die Werte:

$$ph_0 \quad (c - \sigma)h_0 \quad ah_0 \quad \pi - B - \psi' \quad B \quad \psi' \quad -\psi';$$

ferner bei  $AP'C$ :

$$ph_0 \quad \sigma h_0 \quad bh_0 \quad \psi' - A \quad A \quad \pi - \psi' \quad -\pi + \psi'$$

solange  $P'$  zwischen  $A$  und  $B$  liegt, dagegen:

$$ph_0 \quad -\sigma h_0 \quad bh_0 \quad A - \psi' \quad \pi - A \quad \psi' \quad -\psi',$$

wenn  $P'$  in Fig. 37 linker Hand von  $A$  liegt und mithin  $\sigma h_0$  negativ ist. Für letzteren Fall sind selbstverständlich die Wirkungen

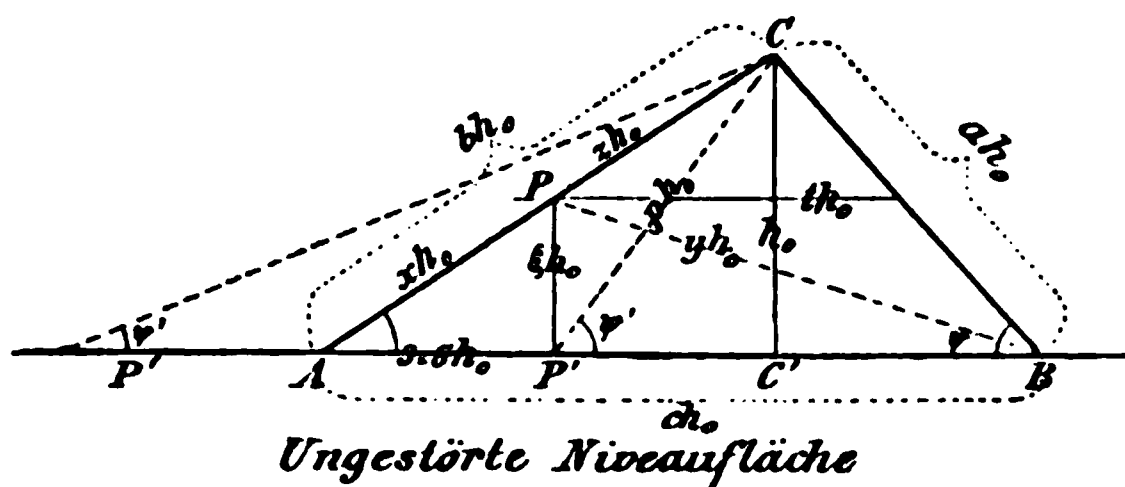


Fig. 37.

des Prismas  $AP'C$  von denen des Prismas  $BP'C$  zu subtrahieren. Zufolge der gewählten Substitutionen ist aber auch im ersten Fall die Horizontalanziehung von  $AP'C$  zu subtrahieren.

Man erhält mittelst der Formel (10) § 5 S. 280 als Potential  $v'$  der Anziehung für  $P'$  innerhalb:

$$v' = k^2 \Theta h_0^2 \left\{ \left( \frac{3}{2} + \log \text{nat} \frac{2L}{ph_0} \right) c + \frac{(c-\sigma)^2 \cos B}{a} \log \text{nat} \frac{p}{c-\sigma} + \frac{\sigma^2 \cos A}{b} \log \text{nat} \frac{p}{\sigma} - \frac{\psi' (c-\sigma) \sin B \sin (B+\psi') + (\pi-\psi') \sigma \sin A \sin (\psi'-A)}{\sin \psi'} \right\}$$

und für  $P'$  außerhalb:

$$v' = k^2 \Theta h_0^2 \left\{ \left( \frac{3}{2} + \log \text{nat} \frac{2L}{ph_0} \right) c + \frac{(c-\sigma)^2 \cos B}{a} \log \text{nat} \frac{p}{c-\sigma} + \frac{\sigma^2 \cos A}{b} \log \text{nat} \frac{p}{-\sigma} - \frac{\psi'}{\sin \psi'} [(c-\sigma) \sin B \sin (B+\psi') + \sigma \sin A \sin (A-\psi')] \right\}.$$

Einige leicht ersichtliche Umformungen geben hieraus für  $P'$  innerhalb:

$$v' = k^2 \Theta h_0^2 \left\{ \left( \frac{3}{2} + \log \text{nat} \frac{2L}{ph_0} \right) c - (c-\sigma)^2 \left[ \psi' \sin^2 B - \frac{1}{2} \sin 2B \log \text{nat} \frac{p}{c-\sigma} \right] - \sigma^2 \left[ (\pi-\psi') \sin^2 A - \frac{1}{2} \sin 2A \log \text{nat} \frac{p}{\sigma} \right] \right\} \quad (1)$$

und für  $P'$  auferhalb:

$$v' = k^2 \Theta h_0^2 \left\{ \left( \frac{3}{2} + \log \text{nat} \frac{2L}{ph_0} \right) c - (c - \sigma)^2 \left[ \psi' \sin^2 B - \frac{1}{2} \sin 2B \log \text{nat} \frac{p}{c - \sigma} \right] \right. \\ \left. + \sigma^2 \left[ \psi' \sin^2 A + \frac{1}{2} \sin 2A \log \text{nat} \frac{p}{-\sigma} \right] \right\}. \quad (1^*)$$

Ferner findet sich aus (5) des vorigen Paragraphen, wobei aber  $r_1' \sin w_1$  mit  $r_2' \sin w_2$  zu vertauschen ist, für die zur Längsrichtung normale Horizontalanziehung für  $P'$  innerhalb:

$$2k^2 \Theta h_0 \left\{ (c - \sigma) \left[ \psi' \sin^2 B - \frac{1}{2} \sin 2B \log \text{nat} \frac{p}{c - \sigma} \right] \right. \\ \left. - \sigma \left[ (\pi - \psi') \sin^2 A - \frac{1}{2} \sin 2A \log \text{nat} \frac{p}{\sigma} \right] \right\} \quad (2)$$

und für  $P'$  auferhalb:

$$2k^2 \Theta h_0 \left\{ (c - \sigma) \left[ \psi' \sin^2 B - \frac{1}{2} \sin 2B \log \text{nat} \frac{p}{c - \sigma} \right] \right. \\ \left. + \sigma \left[ \psi' \sin^2 A + \frac{1}{2} \sin 2A \log \text{nat} \frac{p}{-\sigma} \right] \right\}. \quad (2^*)$$

Ebenso giebt (6) des vorigen Paragraphen für die Vertikalanziehung für  $P'$  innerhalb:

$$-2k^2 \Theta h_0 \left\{ (c - \sigma) \left[ \frac{1}{2} \psi' \sin 2B + \sin^2 B \log \text{nat} \frac{p}{c - \sigma} \right] \right. \\ \left. + \sigma \left[ \frac{1}{2} (\pi - \psi') \sin 2A + \sin^2 A \log \text{nat} \frac{p}{\sigma} \right] \right\} \quad (3)$$

und für  $P'$  auferhalb:

$$-2k^2 \Theta h_0 \left\{ (c - \sigma) \left[ \frac{1}{2} \psi' \sin 2B + \sin^2 B \log \text{nat} \frac{p}{c - \sigma} \right] \right. \\ \left. + \sigma \left[ -\frac{1}{2} \psi' \sin 2A + \sin^2 A \log \text{nat} \frac{p}{-\sigma} \right] \right\}. \quad (3^*)$$

Für den Punkt  $P$  auf  $AC$  setzen sich die Wirkungen der Prismen  $APB$  und  $BPC$  zusammen. Im Vergleich zu Fig. 36 S. 278 kann man setzen bezw.

für	$r_1'$	$r_2'$	$c$	$w_1$	$w_2$	$w_0$	$\varphi_1$
bei $BPC$ :	$zh_0$	$yh_0$	$ah_0$	$\pi - A - B$	$B - \psi$	$A + \psi$	$-A$
bei $APB$ :	$xh_0$	$yh_0$	$ch_0$	$A$	$\psi$	$\pi - A - \psi$	$+A$

zufolge dieser Substitutionen ist die Horizontalanziehung für  $APB$  von derjenigen für  $BPC$  zu subtrahieren.

Für das Potential der Anziehung in  $P$  erhält man nun den Wert nach (9) § 5 S. 280 gleich

$$v = k^2 \odot h_0^2 y \sin(A + \psi) \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{3}{2} + \log \text{nat} \frac{2L}{yh_0} \right) (x + z) \\ & - \frac{z^2}{a} \cos(A + B) \log \text{nat} \frac{y}{z} + \frac{x^2}{c} \cos A \log \text{nat} \frac{y}{x} \\ & - \frac{A + \psi}{\sin(A + \psi)} z \sin(A + B) \sin(B - \psi) - \frac{\pi - A - \psi}{\sin(A + \psi)} x \sin A \sin \psi \end{aligned} \right\}.$$

Nach einigen leicht zu erkennenden Umformungen folgt hieraus:

$$v = k^2 \odot h_0^2 \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{3}{2} + \log \text{nat} \frac{2L}{yh_0} \right) c - \frac{1}{2} z^2 \sin 2(A + B) \log \text{nat} \frac{y}{z} \\ & + \frac{1}{2} x^2 \sin 2A \log \text{nat} \frac{y}{x} \\ & - (A + \psi) l^2 \sin^2 B - (\pi - A - \psi) \xi^2 \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Man erhält ferner aus (5) § 6 S. 281 für die zur Längsrichtung normale Horizontalanziehung in  $P$ :

$$2k^2 \odot h_0 y \left\{ \begin{aligned} & (A + \psi) \sin B \sin(B - \psi) + \cos B \sin(B - \psi) \log \text{nat} \frac{y}{z} \\ & + \sin \psi \log \text{nat} \frac{y}{x} \end{aligned} \right\},$$

wofür man auch setzen kann:

$$2k^2 \odot h_0 \left\{ (A + \psi) l \sin^2 B + \frac{1}{2} l \sin 2B \log \text{nat} \frac{y}{z} + \xi \log \text{nat} \frac{y}{x} \right\}. \quad (5)$$

Aus (6) § 6 S. 281 folgt endlich für die Vertikalanziehung in  $P$ :

$$2k^2 \odot h_0 y \left\{ \begin{aligned} & (\pi - A - \psi) \sin \psi - (A + \psi) \cos B \sin(B - \psi) \\ & + \sin B \sin(B - \psi) \log \text{nat} \frac{y}{z} \end{aligned} \right\},$$

wofür man auch setzen kann:

$$2k^2 \odot h_0 \left\{ (\pi - A - \psi) \xi - \frac{1}{2} (A + \psi) l \sin 2B + l \sin^2 B \log \text{nat} \frac{y}{z} \right\}. \quad (6)$$

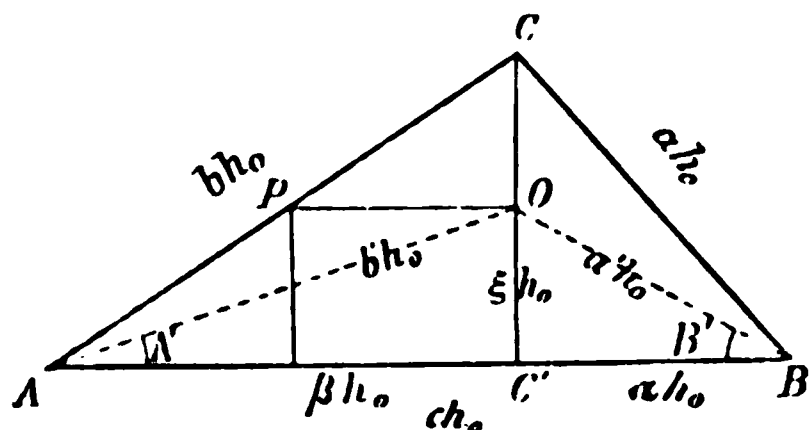


Fig. 38.

Um nunmehr zu den Angaben für einen Punkt  $O$  in  $CC'$ , gleichhoch mit  $P$  gelegen, vergl. Fig. 38, zu gelangen, gehen wir von (4) aus und setzen darin, um zunächst das Potential des Prismas  $CBC'$  zu erhalten,

für:	$c$	$x$	$y$	$z$	$i$	$A$	$\psi$
bezw.:	$\alpha$	$\xi$	$\alpha'$	$1 - \xi$	$\alpha(1 - \xi)$	$\frac{\pi}{2}$	$B'$

während die übrigen Symbole bleiben. Damit folgt als Potential von  $CB C'$  auf  $O$ :

$$k^2 \odot h_0^2 \left\{ \left( \frac{3}{2} + \log \operatorname{nat} \frac{2L}{a'h_0} \right) \alpha + \frac{(1-\xi)^2}{2} \sin 2B \log \operatorname{nat} \frac{a'}{1-\xi} \right. \\ \left. - \left( \frac{\pi}{2} + B' \right) \alpha^2 (1-\xi)^2 \sin^2 B - \left( \frac{\pi}{2} - B' \right) \xi^2 \right\}.$$

Im vorletzten Gliede schreibt man besser für  $\alpha \sin B$  einfach  $\cos B$ .

Vertauscht man jetzt  $A$  mit  $B$ ,  $a'$  mit  $b'$ ,  $\alpha$  mit  $\beta$  und  $A'$  mit  $B'$ , so ergibt sich das Potential von  $ACC'$ . Dieses ist gleich

$$k^2 \odot h_0^2 \left\{ \left( \frac{3}{2} + \log \operatorname{nat} \frac{2L}{b'h_0} \right) \beta + \frac{(1-\xi)^2}{2} \sin 2A \log \operatorname{nat} \frac{b'}{1-\xi} \right. \\ \left. - \left( \frac{\pi}{2} + A' \right) (1-\xi)^2 \cos^2 A - \left( \frac{\pi}{2} - A' \right) \xi^2 \right\}.$$

Die Addition beider Ausdrücke ergibt als Potential  $v_0$  für  $O$ :

$$v_0 = k^2 \odot h_0^2 \left\{ \left( \frac{3}{2} + \log \operatorname{nat} \frac{2L}{h_0} \right) c - \alpha \log \operatorname{nat} a' - \beta \log \operatorname{nat} b' \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1-\xi)^2 \left[ \sin 2B \log \operatorname{nat} \frac{a'}{1-\xi} + \sin 2A \log \operatorname{nat} \frac{b'}{1-\xi} \right] \right. \\ \left. - (1-\xi)^2 \left[ \left( \frac{\pi}{2} + B' \right) \cos^2 B + \left( \frac{\pi}{2} + A' \right) \cos^2 A \right] \right. \\ \left. - (\pi - A' - B') \xi^2 \right\}. \quad (7)$$

Mit Übergang der Horizontalanziehung erhalten wir in gleicher Weise durch zweimalige Anwendung von (6) für die Vertikalanziehung in  $O$ :

$$2k^2 \odot h_0 \left\{ (\pi - A' - B') \xi - (1-\xi) \left[ \left( \frac{\pi}{2} + A' \right) \cos^2 A + \left( \frac{\pi}{2} + B' \right) \cos^2 B \right] \right. \\ \left. + (1-\xi) \left[ \frac{1}{2} \sin 2B \log \operatorname{nat} \frac{a'}{1-\xi} + \frac{1}{2} \sin 2A \log \operatorname{nat} \frac{b'}{1-\xi} \right] \right\}. \quad (8)$$

Wir führen nun wieder als normale Schwerkraft an der Erdoberfläche, sei es im Meeresspiegel oder in der Meereshöhe  $H$ , den Wert

$$G = \frac{4}{3} \pi k^2 \odot_m R$$

ein. Dividieren wir mit demselben in das Potential, so erhalten wir die Erhebung  $\delta h$  der gestörten Niveaufläche über die ungestörte gleichen Potentialwertes an der betreffenden Stelle; dividieren wir in die Horizontalanziehung, so erhalten wir die Lotablenkung  $A$ ; dividieren wir endlich in die Vertikalanziehung, so erhalten wir die Schwerestörung  $\delta g$  in Bruchteilen der normalen Schwerkraft\*).

\*) Die Werte von  $v$  für die Punkte  $A$  und  $B$  und die zugehörigen Erhebungen berechnete auch 1880 *Clarke, Geodesy* p. 93–94.

Bei diesen Divisionen geht der Faktor  $k^2 \Theta$  der oben aufgestellten Formeln über in  $k^2 \Theta : G$  oder in

$$K = \frac{3 \Theta}{4 \pi \Theta_m R}. \quad (9)$$

Man hat nun in diesen Formeln nur  $k^2 \Theta$  mit  $K$  zu vertauschen um bezw. Erhebung der gestörten Niveaufläche über die ungestörte, Lotablenkung oder Störung in der Schwerkraft zu erhalten. Für die Lotablenkung in Sekunden ist zu setzen

$$K'' = \varrho'' \frac{3 \Theta}{4 \pi \Theta_m R}. \quad (10)$$

Sie entspricht mit Rücksicht auf die Figuren einer Anziehung des aufgehängten Lotes nach rechts.

Es muß noch bemerkt werden, daß die nach den gegebenen Formeln berechnete Schwerestörung nur dann die ganze Störung ist, wenn man für einen bestimmten Punkt die Schwerkräfte vergleicht, welche *ohne* und *mit* Berücksichtigung der Prismenanziehung vorhanden sind. Wenn man jedoch vergleicht die ungestörte Schwerkraft in einem Punkte einer ungestörten Niveaufläche mit der gestörten Schwerkraft in dem darüberliegenden Punkte der gestörten Niveaufläche gleichen Potentialwertes, so kommt außer der Prismenanziehung noch die Veränderung der normalen Schwerkraft in betracht, welche zu der Höhenverschiebung gehört. Diese Veränderung kann sehr beträchtlich ausfallen, da Prismen von der Masse der Hochgebirge bedeutende Höhenverschiebungen bewirken. Da indessen einerseits für unsere Zwecke die Betrachtung der Schwerestörung für bestimmte Punkte genügt, andererseits die Berechnung des Einflusses der Höhenlage einfach mit dem Quotienten  $2 \delta h : R$  erfolgen kann, so sehen wir hier von der Betrachtung der Schwerestörung entlang gestörter Niveauflächen ab.

§ 8. Deformationen durch einen gleichschenkeligen Gebirgsrücken. Wir nehmen jetzt als Querschnitt ein gleichschenkeliges Dreieck und setzen demnach

$$a = b, \quad A = B. \quad (1)$$

Um einen Überblick von der Gesamtwirkung zu bekommen, be-

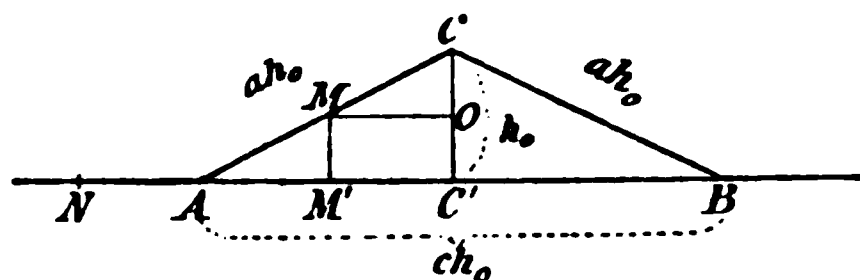


Fig. 39.

rechnen wir zunächst die Erhebung des gestörten Niveaus für die Punkte  $C'$ ,  $M'$ ,  $A$  und  $N$  der Grundfläche im mittleren Querprofil, Fig. 39.

Nach Formel (1) S. 282 wird erhalten als Erhebung der gestörten Niveaufläche über die un-

gestörte für  $C'$ , wobei  $\sigma = \frac{c}{2}$ ,  $p = 1$ ,  $\psi' = \frac{\pi}{2}$  zu setzen ist, wenn man die Relationen

$$\begin{aligned} a \sin A &= 1 & c \sin A &= 2 \cos A & c \sin 2A &= 4 \cos^2 A \\ 2a \cos A &= c & c \tan A &= 2 & c \sin^2 A &= \sin 2A \end{aligned} \quad (2)$$

beachtet und

$$\frac{3}{2} + \log \text{nat} \frac{2L}{h_0} = Q \quad (3)$$

setzt:

$$\delta h_{C'} = K h_0^2 c \left\{ Q - \cos^2 A \log \text{nat} \frac{c}{2} - \frac{\pi}{4} \sin 2A \right\}; \quad (4)$$

ferner für  $M'$  inmitten  $AC'$ , wobei  $\sigma = \frac{c}{4}$ ,  $p^2 = 1 + \frac{c^2}{16}$ ,  $\tan \psi' = \frac{4}{c}$  zu setzen ist:

$$\delta h_M = K h_0^2 c \left\{ Q - \frac{1}{2} \log \text{nat} \frac{c^2+16}{16} - \frac{(9 \log \text{nat} 9 - 10 \log \text{nat} \frac{c^2+16}{c^2}) \cos^2 A}{16} - \left( \pi + 8 \arctan \frac{4}{c} \right) \frac{\sin 2A}{16} \right\}; \quad (5)$$

ferner für  $A$ , wobei  $\sigma = 0$ ,  $p = a$ ,  $\psi' = A$  zu setzen ist:

$$\delta h_A = K h_0^2 c \left\{ Q - \log \text{nat} c - \frac{1}{2} \cos 2A \log \text{nat} \frac{4c^2}{c^2+4} - A \sin 2A \right\}. \quad (6)$$

Es folgt weiter für  $N$  nach Formel (1\*) S. 283, für welchen Punkt  $\sigma = -\frac{c}{4}$ ,  $p^2 = 1 + \frac{9c^2}{16}$ ,  $\tan \psi' = \frac{4}{3c}$  zu setzen ist:

$$\delta h_N = K h_0^2 c \left\{ Q - \frac{1}{2} \log \text{nat} \frac{9c^2+16}{16} - \frac{(25 \log \text{nat} 25 - 26 \log \text{nat} \frac{9c^2+16}{c^2}) \cos^2 A}{16} - \frac{3}{2} \sin 2A \arctan \frac{4}{3c} \right\}. \quad (7)$$

Wir bemerken hierbei, daß der angewandte Ausdruck (1\*) zwar noch für  $N$  immer eine gute Annäherung bietet, falls nur  $2L$  erheblich größer ist als  $ch_0$ , daß derselbe aber bei wachsendem Abstände vom Gebirgsrücken rasch an Genauigkeit einbüßt, wie aus der Entwicklung der Grundformeln hervorgeht, vergl. insbesondere S. 279, Bem. zu (7).

Setzen wir  $\Theta = \frac{1}{2} \Theta_m$ , so wird sehr nahe

$$K = 3 : 160\,000\,000. \quad (8)$$

Wir nehmen ferner  $h_0 = 2500^m$ ,  $K h_0^2 = 10 : 85$  rund, sowie  $2L = 750\,000^m$  und  $c = 10$ ; damit ergeben sich die folgenden Werte der Höhenstörungen:



$\delta h_C = \frac{100}{85} (7,20 - 1,85) = 6,29^m$	Differenz 0,45 <sup>m</sup> 0,90 <sup>m</sup> 0,56 <sup>m</sup>	Hor. Distanz je 6250 <sup>m</sup> .	(9)
$\delta h_M = \frac{100}{85} (7,20 - 2,24) = 5,84^m$			
$\delta h_A = \frac{100}{85} (7,20 - 3,00) = 4,94^m$			
$\delta h_N = \frac{100}{85} (7,20 - 3,48) = 4,38^m$			

Setzen wir dagegen  $c = 100$ , so folgen die Höhenstörungen:

$\delta h_C = \frac{1000}{85} \{ 7,204 - 3,942 \} = 38,38^m$	Differenz 6,13 <sup>m</sup> 9,83 <sup>m</sup> 5,63 <sup>m</sup>	Hor. Distanz je 62500 <sup>m</sup> .	(10)
$\delta h_M = \frac{1000}{85} \{ 7,204 - 4,463 \} = 32,25^m$			
$\delta h_A = \frac{1000}{85} \{ 7,204 - 5,298 \} = 22,42^m$			
$\delta h_N = \frac{1000}{85} \{ 7,204 - 5,777 \} = 16,79^m$			

In dem letzteren Falle ist übrigens die Genauigkeit der Zahlen erheblich geringer als im vorhergehenden, weil die Länge des Gebirgsrückens nur das Dreifache seiner Breite beträgt. Insbesondere ist  $\delta h_N$  infolge dieses Umstandes mit Rücksicht auf die Formeln (4) und (4\*) S. 278 beinahe 1<sup>m</sup> ungenau. Immerhin reichen unsere Zahlen noch dazu aus, eine Vorstellung von der Grösse der Deformation zu erhalten.

Aus den Zahlen (9) und (10) kann man auch eine annähernde Vorstellung von der Wirkung der *Alpen* gewinnen. Wenn man das rohe Profil derselben, Fig. 84 im 7. Kapitel, betrachtet, welches allerdings die höchsten Spitzen, deren Wirkung aber gering ist, abschneidet, so erkennt man, daß die Wirkung der eigentlichen Alpenmasse durch (10) überschätzt wird. Mit Rücksicht auf das Ansteigen des Terrains in Deutschland aber dürfte die Maximalerhebung im zentralen Teile der Alpen immerhin auf 30<sup>m</sup> zu schätzen sein, wobei nun freilich die Gegenwirkung etwa vorhandener unterirdischer Massendefekte unbeachtet gelassen ist.

Um eine Vorstellung von der Störung des Parallelismus der Niveauflächen zu erlangen, berechnen wir die Höhenstörungen  $\delta h$  der Niveauflächen noch für die Punkte  $C$ ,  $M$  und  $O$ , Fig. 39.

Die Formel (4) des vorigen Paragraphen S. 284 giebt für  $C$ , wobei  $x = a$ ,  $y = a$ ,  $z = 0$ ,  $t = 0$ ,  $\xi = 1$ ,  $\psi = A$  zu setzen ist:

$$\delta h_C = K h_0^2 c \left\{ Q - \frac{1}{2} \log \text{nat} \frac{c^2 + 4}{4} - \frac{\pi - 2A}{c} \right\}; \quad (11)$$

ferner für  $M$ , woselbst  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y^2 = \frac{1}{4} + \frac{9c^2}{16}$ ,  $z = \frac{a}{2}$ ,  $t = \frac{c}{2}$ ,  $\xi = \frac{1}{2}$ ,  $\tan \psi = \frac{2}{3c}$  zu setzen ist:

$$\delta h_M = K h_0^2 c \left\{ \begin{aligned} & Q - \frac{1}{2} \log \text{nat} \frac{9c^2+4}{16} - \frac{1}{16} (1 - 4 \sin^2 A) \log \text{nat} \frac{9c^2+4}{c^2+4} \\ & - \frac{1}{4c} \left[ \pi + \left( A + \arctan \frac{2}{3c} \right) (4 \cos^2 A - 1) \right] \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Für die oben angenommenen numerischen Ausgangswerte folgt bei  $c = 10$ :

$$\delta h_C = \frac{100}{85} (7,20 - 1,90) = 6,24^m \quad (13)$$

$$\delta h_M = \frac{100}{85} (7,20 - 2,23) = 5,85^m,$$

dagegen bei  $c = 100$ :

$$\delta h_C = \frac{1000}{85} (7,204 - 3,943) = 38,36^m \quad (14)$$

$$\delta h_M = \frac{1000}{85} (7,204 - 4,463) = 32,25^m.$$

Nun ist für die ursprünglich durch  $C$  und  $C'$  gehenden Niveauflächen der ungestörte Abstand gleich  $h_0$ , der gestörte aber  $h_0 + \delta h_C - \delta h_{C'}$ . Die Störung  $\delta h_C - \delta h_{C'}$  ist

$$\begin{aligned} \text{für } c = 10 & \quad - 0,05^m \\ \text{,, } c = 100 & \quad - 0,02^m. \end{aligned} \quad (15)$$

Dagegen ist für die Niveauflächen durch  $M$  und  $M'$  die Störung  $\delta h_M - \delta h_{M'}$  gleich

$$\begin{aligned} \text{für } c = 10 & \quad + 0,01^m \\ \text{,, } c = 100 & \quad + 0,00^m. \end{aligned} \quad (16)$$

Zur Berechnung von  $\delta h$  für  $O$  giebt die Formel (7) S. 285, wobei  $A = B$ ,  $\alpha = \beta = \frac{c}{2}$ ,  $a'^2 = b'^2 = \frac{1}{4} + \frac{c^2}{4}$ ,  $\xi = \frac{1}{2}$  und  $A' = B' = \arctan \frac{1}{c}$  zu setzen ist:

$$\delta h_O = K h_0^2 c \left\{ \begin{aligned} & Q - \frac{1}{2} \log \text{nat} \frac{c^2+1}{4} + \frac{\sin^2 A}{8} \log \text{nat} (c^2+1) \\ & - \frac{1}{8} \sin 2A \left( \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{1}{c} \right) - \frac{1}{2c} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{c} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (17)$$

Für flache Profile ist  $\delta h_O$  sehr nahe die *Maximaldeformation*; denn im Punkte  $O$  muß das Potential der Anziehung des flachen, symmetrischen Gebirgsrückens nahezu ein Maximum sein, wie man sofort erkennt.

Mit  $c = 10$  wird bei den angenommenen Verhältnissen

$$\delta h_O = \frac{100}{85} (7,20 - 1,75) = 6,42^m; \quad (18)$$

mit  $c = 100$  dagegen:

$$\delta h_O = \frac{1000}{85} (7,204 - 3,928) = 38,54^m. \quad (19)$$

Hiernach ist für die ursprünglich durch  $C'$  und  $O$  führenden Niveauflächen die Abstandsstörung  $\delta h_0 - \delta h_{C'}$

$$\begin{aligned} &\text{für } c = 10 \text{ gleich } + 0,13^m \\ &,, \quad c = 100 \quad ,, \quad + 0,16^m; \end{aligned} \quad (20)$$

für diese beiden Niveauflächen findet daher von  $M'M$  bis  $C'O$  eine Störung im Parallelismus im Sinne einer Divergenz statt, welche beträgt

$$\begin{aligned} &\text{für } c = 10 \quad 0,12^m \\ &,, \quad c = 100 \quad 0,16^m. \end{aligned} \quad (21)$$

Eine eingehendere Untersuchung der Störungen im Abstand und Parallelismus der Niveauflächen wird einfacher als mittelst Potentialwerten mittelst der Schwerestörungen geführt.

§ 9. Fortsetzung: Störungen der Schwerkraft. Die Anwendung des Ausdruckes (3) S. 283 giebt unter Substitution von  $A=B$ ,  $c \sin 2A = 4 \cos^2 A$  und  $c \sin^2 A = \sin 2A$  die Störung der normalen Schwerkraft in  $C'$ , woselbst  $\sigma = \frac{c}{2}$ ,  $p = 1$ ,  $\psi' = \frac{\pi}{2}$  zu setzen ist:

$$\delta g_{C'} = - G \cdot K h_0 \left\{ 2\pi \cos^2 A - 2 \sin 2A \log \text{nat } \frac{c}{2} \right\}; \quad (1)$$

ferner für  $M'$ , woselbst  $\sigma = \frac{c}{4}$ ,  $p^2 = 1 + \frac{c^2}{16}$ ,  $\tan \psi' = \frac{4}{c}$  zu setzen ist:

$$\delta g_{M'} = - G \cdot K h_0 \left\{ \begin{aligned} &(\pi + 2 \arctan \frac{4}{c}) \cos^2 A \\ & - \left( \frac{1}{2} \log \text{nat } 27 - \log \text{nat } \frac{c^2 + 16}{c^2} \right) \sin 2A \end{aligned} \right\}; \quad (2)$$

ferner für  $A$ , woselbst  $\sigma = 0$ ,  $p = a$ ,  $\psi' = A$  zu setzen ist:

$$\delta g_A = - G \cdot K h_0 \left\{ 4A \cos^2 A - \sin 2A \log \text{nat } \frac{4c^2}{c^2 + 4} \right\}. \quad (3)$$

Es folgt weiter mittelst des Ausdrucks (3\*) S. 283 für  $N$ , woselbst  $\sigma = -\frac{c}{4}$ ,  $p^2 = 1 + \frac{9c^2}{16}$ ,  $\tan \psi' = \frac{4}{3c}$  zu setzen ist:

$$\delta g_N = - G \cdot K h_0 \left\{ \begin{aligned} &6 \cos^2 A \arctan \frac{4}{3c} \\ & - \left( \frac{5}{2} \log \text{nat } 5 - \log \text{nat } \frac{9c^2 + 16}{c^2} \right) \sin 2A \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

Die Anwendung von Ausdruck (6) S. 284 giebt sodann für  $C$ , woselbst  $y = a$ ,  $z = 0$ ,  $t = 0$ ,  $\xi = 1$ ,  $\psi = A$  zu setzen ist:

$$\delta g_C = + G \cdot K h_0 \{ 2\pi - 4A \}, \quad (5)$$

und für  $M$ , wo  $y^2 = \frac{1}{4} + \frac{9c^2}{16}$ ,  $z = \frac{a}{2}$ ,  $t = \frac{c}{2}$ ,  $\xi = \frac{1}{2}$ ,  $\tan \psi = \frac{2}{3c}$  zu setzen ist:

$$\delta g_M = + G \cdot K h_0 \left\{ \begin{aligned} &\pi - \left( A + \arctan \frac{2}{3c} \right) (1 + 2 \cos^2 A) \\ &+ \frac{1}{2} \sin 2A \log \text{nat} \frac{9c^2 + 4}{c^2 + 4} \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Für  $O$  erhält man schließlich aus (8) S. 285 unter Substitution von  $A' = B' = \arctan \frac{1}{c}$ ,  $a'^2 = b'^2 = \frac{c^2 + 1}{4}$  und  $\xi = \frac{1}{2}$ :

$$\delta g_O = + G \cdot K h_0 \left\{ \begin{aligned} &\pi \sin^2 A - 2 (1 + \cos^2 A) \arctan \frac{1}{c} \\ &+ \frac{1}{2} \sin 2A \log \text{nat} (c^2 + 1) \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

Wenn die numerischen Ausgangswerte des vorigen Paragraphen zu grunde gelegt werden, ergeben sich folgende Störungen der Schwerkraft in Millionteilen von  $G$  d. h. also sehr nahe Mikrons der Länge des mathematischen Sekundenpendels:

$$c = 10 \quad \begin{array}{c|c|c|c} & & \text{in } C' & \\ & & + 259 & \\ \hline & & \text{in } M & \text{in } O \\ & & + 131 & + 31 \\ \hline \text{in } N & \text{in } A & \text{in } M' & \text{in } C' \\ - 4 & - 11 & - 149 & - 226 \end{array} \quad (8)$$

$$c = 100 \quad \begin{array}{c|c|c|c} & & \text{in } C & \\ & & + 292 & \\ \hline & & \text{in } M & \text{in } O \\ & & + 147 & + 7 \\ \hline \text{in } N & \text{in } A & \text{in } M' & \text{in } C' \\ 0 & - 1 & - 148 & - 281 \end{array} \quad (9)$$

Wir stellen diesen Werten diejenigen der Erhebung der gestörten Niveaullächen über die ungestörten nach dem vorigen Paragraphen gegenüber und erhalten:

$$c = 10 \quad \begin{array}{c|c|c|c} & & \text{in } C & \\ & & 6,24 & \\ \hline & & \text{in } M & \text{in } O \\ & & 5,85 & 6,42 \\ \hline \text{in } N & \text{in } A & \text{in } M' & \text{in } C' \\ 4,38 & 4,94 & 5,84 & 6,29 \end{array} \quad \begin{array}{l} - 0,18 \\ + 0,13 \end{array} \quad (8^*)$$

$c = 100$				in $C$ 38,36	— 0,18	(9*)
				in $O$ 38,54		
			in $M$ 32,25		+ 0,16	
	in $N$ 16,79	in $A$ 22,42	in $M'$ 32,25	in $C'$ 38,38		

Zwischen den Schwerestörungen und den Abstandstörungen der Niveauflächen besteht ein Zusammenhang, der eine angenäherte Kontrolle der Zahlwerte erlaubt. Bekanntlich ist für zwei unendlich nahe Niveauflächen das Produkt aus Abstand in Schwere konstant. Bezeichnen wir nun in sehr großer Entfernung vom Gebirgsrücken, wo die Störungen verschwinden, den Abstand mit  $h$ , die Schwere mit  $G$ , dagegen die gestörten Werte mit  $h + \delta h$  und  $G + \delta g$ , so muß sein

$$G \cdot h = (G + \delta g) (h + \delta h)$$

oder, mit zulässiger Vernachlässigung:

$$\delta h = - \frac{\delta g}{G} h. \quad (10)$$

Ist in dieser Formel  $h$  nicht unendlich klein, sondern endlich, so ist für  $\delta g$  ein mittlerer Wert für das Intervall  $h$  zu setzen, wie die Integration beiderseits in (10) sofort erkennen läßt.

Nehmen wir nun an, daß in der Vertikalen  $COC$  von unten nach oben  $\delta g$  algebraisch nahezu gleichförmig zunimmt, was die Tabellen (8) und (9) zu bestätigen scheinen und was für flache Profile eine gute Annäherung sein muß, so wird z. B. die Abstandstörung der durch  $C$  und  $O$  gehenden ungestörten Niveauflächen bei  $c = 10$  sehr nahe sein gleich

$$= \frac{-0,000226 + 0,000031}{2} \cdot \frac{2500}{2} \text{ d.i. } + 0,12^m.$$

Auf diese Weise lassen sich auch die anderen aus (8\*) und (9\*) folgenden Abstandstörungen mittelst (8) und (9) kontrollieren. Man wird sie bestätigt finden.

Untersucht man die Störungen der Schwerkraft eingehender, so findet sich, daß von der Basis  $ACB$  aus nach  $C$  hin, Fig. 39, diese Störung ihrem algebraischen Betrage nach im allgemeinen bei einigermaßen flacher Form des Profils  $ABC$  nahezu gleichförmig zunimmt, daß aber ganz in der Nähe von  $C$  diese Zunahme stetig in eine Abnahme übergeht. Davon kann man sich leicht überzeugen, indem man den Differentialquotienten der Schwerestörung entlang  $AC$ , sowie entlang  $CC'$  bildet. Die größte Störung findet somit nicht in  $C$ , sondern unterhalb dieses Punktes statt. Diese Anomalie ist aber bei einigermaßen flachen Profilen ganz und gar unerheblich und ohne

alle praktische Bedeutung, weshalb wir auch nicht weiter auf dieselbe eingehen.

§ 10. Fortsetzung: Störungen im Parallelismus der Niveaulflächen. Mittelst der bisherigen Untersuchungen und einiger einfachen Überlegung kann man leicht eine allgemeine Vorstellung vom Gange der Niveaulflächen innerhalb des mittleren Teiles des Gebirgsrückens gewinnen. Aus (8\*) und (9\*) erkennt man, daß für übereinander liegende Punkte  $P$  und  $P'$  des Hanges  $AC$  und der Grundfläche  $AC'$  die Höhenstörung sehr nahe dieselbe ist. Es hat dies seinen Grund darin, daß das Potential  $v$  der Anziehung des Gebirgsrückens für solche Punkte nahezu gleich groß ist, wie es auch dem Augenschein nach für flache Profile der Fall sein muß. Wenn nun in Fig. 40 irgend eine Niveaulfläche, z. B. diejenige durch  $P_1$  ins Auge gefaßt wird, so ist klar, daß dieselbe bei  $P_1$  gegen die Grundfläche  $AB$  keine wesentliche Abstandsstörung erleidet, indem für  $P_1$  und  $P'_1$  die Potentialdifferenz im gestörten Zustande nahezu denselben Betrag hat, wie im ungestörten — um so mehr, je flacher

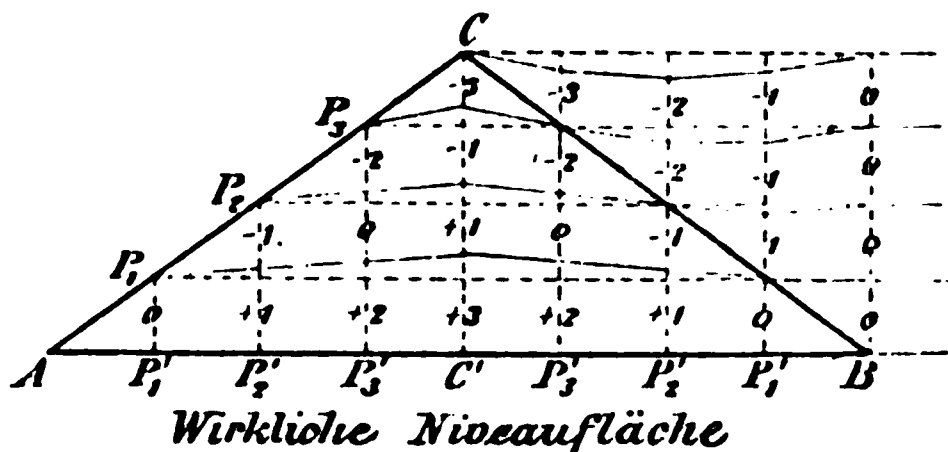


Fig. 40.

das Profil ist. Von der Eintrittsstelle  $P_1$  an divergiert aber die durch  $P_1$  führende gestörte Niveaulfläche gegen die durch den Fuß  $A$  führende gestörte Niveaulfläche (Grundfläche). Die stattfindenden Verhältnisse werden angenähert durch Fig. 40 vorgestellt, wobei den vier gestörten Niveaulflächen durch  $A$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  dieselbe successive Potentialdifferenz  $\Delta W$  entspricht. Die kleinen Zahlen bezeichnen die Abstandsstörungen in einer gewissen Einheit; die Summe dieser Zahlen in jeder Vertikalen ist null, wie es nach dem Gesagten sein muß. Um die Richtigkeit der Zahlen im einzelnen zu erkennen, diene Folgendes:

Geht man in irgend einer Vertikalen z. B.  $P'_3P_3$  in die Höhe, so nimmt die Schwerestörung im algebraischen Sinne zu, die Gesamtschwerkraft, abgesehen von der Änderung der normalen Schwere mit der Höhe, nimmt somit zu, und die zu  $\Delta W$  gehörenden Niveauabstände werden kleiner. Angenähert entspricht bei flachen Profilen die Schwerestörung in  $P'_3$  einer anziehenden Schicht von der Dicke  $P'_3P_3$ ; ebenso in  $P_3$ , nur mit entgegengesetzter Wirkung, und ähnlich zwischen  $P'_2$  und  $P_2$ . Man findet, daß annähernd die Schwerestörungen und Abstandsstörungen in arithmetischer Progression von unten nach oben sich ändern, indem insbesondere die Abstandsstörung zwischen zwei benachbarten Niveaulflächen, Fig. 40, der Summe aus der Anzahl

der darüber liegenden, positiv wirkenden und der Anzahl der darunter liegenden, negativ wirkenden Schichten entspricht.

Die Figur zeigt, daß die gestörten Niveaulächen von ihrem Eintritt aus nach innen divergieren; es gilt dies ganz allgemein für irgend ein Paar Niveaulächen, da vom Rande nach der Mitte des Profils hin die Summe der Dicken der störenden Schichten, welche auf Vermehrung und Verminderung der mittleren Schwerkraft zwischen den betreffenden Niveaulächen wirken, im algebraischen Sinne abnimmt, der Abstand somit zunimmt.

Die Figur deutet auch die Abstandsstörungen für die Niveaulächen außerhalb in der Nähe des Gebirgsrückens an, die sich näherungsweise ebenfalls an jeder Stelle nach der Dicke der darunter liegenden Schicht bemessen.

Um die größten Abstandsstörungen innerhalb des Profils zu erhalten, muß man in den einzelnen Vertikalen die Orte der größten und kleinsten Potentialwerte  $v$  der Anziehung mit einander kombinieren. In jeder Vertikalen wird aber bei einigermaßen flachen Profilen ein Mal die Schwerestörung  $dv : dh$  gleich null. An dieser Stelle, welche nahe mitten zwischen  $I'$  und  $P'$  liegt, ist  $v$  ein Maximum. Da nun die Schwerestörung unterhalb negativ, oberhalb positiv ist, sind die ins Auge zu fassenden Orte einerseits  $I'$  und  $P'$ , andererseits jene Maximalstelle.

Die größten Potentialdifferenzen treten in der Linie  $CC'$  auf, und die größten Abstandsstörungen müssen somit zwischen den Niveaulächen durch  $C$  und  $C'$  einerseits und einer Niveauläche in mittlerer Höhe andererseits stattfinden. Wie (8\*) und (9\*) zeigen, ist die Störung für den Abstand der mittleren Niveauläche von dem oberen Punkte  $C$  die größere. Einen Näherungswert für diesen Abstand gewinnt man mittelst der Formel (11) S. 288 und (17) S. 289, deren Subtraktion zunächst ergibt:

$$K h_0^2 c \left\{ \frac{1}{2} \log \text{nat} \frac{c^2 + 4}{c^2 + 1} + \frac{1}{8} \sin^2 A \log \text{nat} (c^2 + 1) + \frac{\pi - 2A}{c} \right. \\ \left. - \frac{1}{8} \sin 2A \left( \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{1}{c} \right) - \frac{1}{2c} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{c} \right) \right\}.$$

Der Voraussetzung flacher Profile entsprechend vereinfachen wir diesen Ausdruck und setzen in hinreichender Annäherung

$$\log \text{nat} \frac{c^2 + 4}{c^2 + 1} = \frac{3}{c^2} \quad \sin A = A = \frac{2}{c} \quad \arctan \frac{1}{c} = \frac{1}{c}.$$

Damit geht der Ausdruck über in:

$$K h_0^2 \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{\log \text{nat} c^2 - 5}{2c} \right\}. \quad (1)$$

*Dieser Näherungsausdruck giebt für flache, symmetrische Profile die maximale Störung des Abstandes der Niveaulächen innerhalb des Profils. Er stimmt in obigen Beispielfällen mit den Zahlenangaben in*

(8\*) und (9\*) und ist, wie man leicht bemerkt, von  $c$  wenig abhängig, was dadurch erklärlich wird, daß bei flachen Profilen die Anziehung auf einen Punkt in  $CC'$  wesentlich nur noch von der Höhenlage dieses Punktes und nur wenig von der Form des Profiles abhängt.

§ 11. Fortsetzung: Die Lotstörungen auf dem Hange  $AC$ . Wir betrachten vorerst die Lotablenkung des gleichschenkeligen Gebirgsrückens in einem Punkt des Hanges  $AC$  des mittleren Querprofils und bezeichnen sie mit  $A$ . Dann ist nach Formel (5) S. 284 für  $A$  in Sekunden:

$$A = +2K''h_0 \left\{ \frac{1}{2} t \sin 2A \log \text{nat} \frac{y}{z} + \xi \log \text{nat} \frac{y}{x} + (A + \psi) t \sin^2 A \right\}. \quad (1)$$

Um den Verlauf von  $A$  entlang  $AC$  kennen zu lernen, differenzieren wir nach  $\sigma$ , wobei wir für  $\xi$ ,  $t$ ,  $z$ ,  $y$  und  $\psi$ , sowie deren Differentialquotienten die folgenden Relationen zu beachten haben, welche sich mittelst der auf die gleichschenkelige Dreiecksform anzuwendenden Fig. 37 S. 282 ergeben:

$$\xi = \sigma \tan A \quad t = c(1 - \xi) \quad z = \frac{1}{2} t \sec A$$

$$y^2 = \xi^2 + (c - \sigma)^2 \quad \psi = \arctan \frac{\xi}{c - \sigma};$$

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \tan A = \frac{2}{c} \quad \frac{dt}{d\sigma} = -2 \quad \frac{dz}{d\sigma} = -\sec A$$

$$\frac{dy}{y d\sigma} = \frac{\sigma \sec^2 A - c}{y^2} \quad \frac{d\psi}{d\sigma} = \frac{2}{y^2}.$$

Außerdem ist zu berücksichtigen, daß  $x = a - z$  ist. Wenn man einige naheliegenden Transformationen ausführt und die Umformungen

$$\frac{\sigma \sec^2 A - c}{y^2} = \frac{-(c - \sigma) + \xi \tan A}{(c - \sigma)^2} \cos^2 \psi,$$

sowie

$$\frac{1}{2} t \sin 2A + \xi = [(c - \sigma) + \xi \tan A] \sin A \cos A$$

beachtet, wird erhalten:

$$\frac{dA}{d\sigma} = 2K''h_0 \left\{ \begin{aligned} & \tan A \left( \log \text{nat} \frac{y}{x} - 1 \right) - \sin 2A \left( \log \text{nat} \frac{y}{z} - 1 \right) \\ & - \frac{1}{2} \sin 2A \cos^2 \psi - 2(A + \psi) \sin^2 A \\ & + \frac{2t + \xi^2 \tan A}{y^2} \sin^2 A \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Für  $x = \text{null}$ , d. i. in  $A$ , wird dieser Differentialquotient  $+\infty$ , für  $z = \text{null}$ , d. i. in  $C$ , aber  $-\infty$ ; er geht also zwischen  $A$  und  $C$  mindestens einmal durch null hindurch. Vernachlässigen wir aber in der geschlungenen Parenthese von (2) in der Voraussetzung flacher



Profile bereits Größen der Ordnung  $A^3$ , so reduziert sie sich auf den Ausdruck

$$\tan A \log \text{nat} \frac{y}{x} - \sin 2A \log \text{nat} \frac{y}{s}. \quad (2^*)$$

Derselbe läßt sich für den folgenden Zweck mit ausreichender Genauigkeit durch Substitution von  $\tan A = 2 : c$ ,  $\sin 2A = 4 : c$  vereinfachen, und hiermit erhält man als Bedingung des Verschwindens von  $dA : d\sigma$  die Gleichung

$$\log \text{nat} \frac{y}{x} = 2 \log \text{nat} \frac{y}{s}$$

oder

$$\frac{y}{x} = \frac{y^2}{s^2}, \text{ also } yx = z^2. \quad (3)$$

Nun ist bei flachen Profilen sehr nahe  $y = \frac{c}{2} + z$ ,  $x = \frac{c}{2} - z$ . Aus (3) folgt damit angenähert

$$z = \frac{c}{4} \sqrt{2},$$

$$\text{somit } x = \frac{c}{4} (2 - \sqrt{2}) = 0,146 c \quad (3^*)$$

$$\text{und } \xi h_0 = 0,292 h_0.$$

Der hierzu gehörige Maximalwert von  $A$  ergibt sich aus (1) mit Beibehaltung der bisherigen Genauigkeit angenähert gleich

$$A_{\max} = K'' h_0 \cdot \frac{4}{c} \left\{ (c - 2\sigma) \log \text{nat} \frac{y}{s} + \sigma \log \text{nat} \frac{y}{x} \right\}.$$

Nun ist zufolge (3) und (3\*):

$$\frac{y}{s} = \frac{s}{x} = \sqrt{\frac{y}{x}} = 1 + \sqrt{2};$$

damit wird

$$A_{\max} = 2 K'' h_0 \cdot 2 \log \text{nat} (1 + \sqrt{2}) = 0,0138 h_0 \text{ Sekunden}, \quad (4)$$

wobei mit Rücksicht auf den Wert von  $K$  nach (8) S. 287

$$K'' = 0,0039$$

gesetzt ist und  $h_0$  in Metern genommen werden muß.

Bei  $h_0 = 2500^m$  wird  $A_{\max} = 34,5''^*$ .

\*) Bereits 1780 wurde von *Hutton* in den *Philosophical Transactions* (S. 603 des 14. Bandes der Ausgabe von 1809) die Lotablenkung durch ein dreiseitiges, gleichschenkeliges, liegendes,  $\infty$  langes Prisma untersucht und die Stelle des Maximums ermittelt. Obwohl die Methode ungenügend ist, gelangt *Hutton* doch wenigstens für flache Profile zu dem richtigen Resultat (3\*). *Todhunter* deutet 1873 in Bd. 1 der *History of Attraction* p. 472 den Vorgang einer richtigen Lösung für ein  $\infty$  langes, ungleichseitiges Prisma an.

Auch im Hauptwerke der englischen Vermessung *Ordnance Survey, Principal Triangulation*, 1858, p. 580 wird die Lotablenkung durch ein Prisma untersucht, wobei der Querschnitt als Trapez angenommen ist. Das Maximum ist nicht ermittelt.

Für den Punkt  $A$  ist  $A$  jedenfalls positiv, wie auch (1) zeigt; von hier aus nimmt  $A$  anfangs sehr rasch zu, dann allmählich langsamer bis zu dem, bei flachen Profilen von dem Werte  $c$  nahezu unabhängigen Maximum, von wo aus  $A$  rascher und rascher abnimmt bis zu dem Werte null in  $C$ . Die Zunahme bei  $A$  und die Abnahme bei  $C$  erfolgen unendlich rasch, immerhin aber nur logarithmisch unendlich und daher nicht besonders auffällig.

Um für Punkte nahe bei  $A$ , also für sehr kleine  $\sigma$ ,  $A$  darzustellen, kann man von dem Ausdruck (1) das Glied  $\xi \log \text{nat } x$  abtrennen; für den Rest gilt dann der Differentialquotient (2) nach Hinzufügung von  $\tan A (\log \text{nat } x + 1)$  innerhalb der Parenthese. Für den Punkt  $A$  wird der so abgeänderte Differentialquotient:

$$2K''h_0 \left\{ \tan A \log \text{nat } c - \sin 2A \left( \log \text{nat } \frac{c}{a} - \frac{1}{2} \right) - (2A - \tan A) \sin^2 A \right\}.$$

Für sehr kleine  $\sigma$  kann man nun unter Beschränkung auf flache Profile  $A$  dadurch bilden, daß zu dem Werte  $A$  im Punkte  $A$  der vorstehende, mit  $\sigma$  multiplizierte Differentialquotient nebst  $-2K''h_0 \cdot \xi \log \text{nat } x$  hinzugefügt wird. Mit einigen für flache Profile zulässigen Näherungen ergibt sich so die für sehr kleine  $x$  gültige Formel:

$$A = 2K''h_0 \left\{ \cos^2 A \log \text{nat } \frac{4c^2}{c^2 + 4} + A \sin 2A \right\} + 2K''h_0 \left\{ \log \text{nat } \left( \frac{c}{x} \right)^2 - 0,77 \right\} \frac{x}{c}. \quad (5)$$

In ganz ähnlicher Weise kann man  $A$  für die Nähe von  $C$  darstellen, wobei in der Parenthese von (1) zunächst  $-\frac{1}{2} t \sin 2A \log \text{nat } z$  abzutrennen ist. Damit geht (2) für  $C$  über in

$$-2K''h_0 \left\{ \tan A + \frac{1}{2} \sin 2A (\log \text{nat } a^2 + \cos^2 A) + \sin^2 A \left( 4A - \frac{\tan A}{a^2} \right) \right\},$$

und man findet unter Beschränkung auf flache Profile hieraus die für sehr kleine  $z$  gültige Formel:

$$A = 2K''h_0 \left\{ \log \text{nat } \left( \frac{a}{z} \right)^2 + 2 \right\} \frac{2z}{c}. \quad (6)$$

Mit Hülfe der Formeln (1), (5) und (6) erhält man folgende Übersicht der *Lotablenkungen auf dem Hange* des mittleren Teiles des Gebirgsrückens, wobei unter Annahme von  $\Theta = \frac{1}{2} \Theta_m$  wie früher  $K'' = 0,0039$  gesetzt und  $h_0$  mit  $2500^m$  eingeführt ist.

$$c = 10 \quad c h_0 = 25000^m$$

$$c = 100 \quad c h_0 = 250000^m$$

$\sigma$	$\sigma h_0$	$A$	$\sigma$	$\sigma h_0$	$A$
0 <small>am Fuß</small>	0 <sup>m</sup>	26,7''	0 <small>am Fuß</small>	0 <sup>m</sup>	27,0''
0,01	25	27,0	0,1	250	27,3
0,1	250	28,4	1	2500	28,7
0,5	1250	31,8	5	12500	32,0
.	.	.	10	25000	33,9
1,5	3750	34,1	15	37500	34,4
.	.	.	20	50000	33,8
3,0	7500	29,1	30	75000	29,5
4,0	10000	20,0	40	100000	20,3
4,5	11250	12,7	45	112500	12,9
.	.	.	48	120000	6,6
4,9	12250	3,8	49	122500	3,8
4,99	12475	0,6	49,9	124750	0,6
5 <small>auf dem Kamm</small>	12500	0,0	50 <small>auf dem Kamm</small>	125000	0,0

Hiernach ist auch eine übersichtliche graphische Darstellung der  $A$  möglich, wie solche auf Tafel II mit anderen Darstellungen gegeben ist und im 7. Kapitel erläutert werden wird.

Die Tabellen zeigen, daß  $A$  wesentlich mit  $\sigma : c$  variiert, was auch aus dem Ausdruck (1) zu erkennen ist, wenn er flachen Profilen entsprechend modifiziert wird.

§ 12. Fortsetzung: Die Lotstörungen auf der Grundfläche  $AB$ . Die Lotablenkung des gleichschenkeligen Gebirgsrückens in einem Punkte der Grundlinie  $AB$  des mittleren Querprofils bezeichnen wir mit  $A'$ . Wir erhalten dafür in Sekunden nach S. 283 (2\*) für außerhalb gelegene Punkte, wenn wir beachten, daß  $c \sin^2 A = \sin 2A$  ist:

$$A' = + 2K'' h_0 \cdot \frac{\sin 2A}{2} \left\{ \sigma \log \text{nat} \frac{p}{-\sigma} - (c - \sigma) \log \text{nat} \frac{p}{c - \sigma} \right\} + 2\psi', \quad (1)$$

dagegen für innerhalb gelegene Punkte nach (2) S. 283:

$$A' = + 2K'' h_0 \cdot \frac{\sin 2A}{2} \left\{ \sigma \log \text{nat} \frac{p}{\sigma} - (c - \sigma) \log \text{nat} \frac{p}{c - \sigma} \right\} + 2\psi' - \frac{2\pi}{c} \sigma \quad (2)$$

Im ersteren Falle hat  $\sigma$  negative, im zweiten positive Werte. Außer-

dem sind für  $p$  und  $\psi'$  mit Rücksicht auf Fig. 37 S. 282 die Relationen zu beachten:

$$p^2 = 1 + \left(\frac{c}{2} - \sigma\right)^2;$$

$$\psi' = \arccot \left(\frac{c}{2} - \sigma\right) \text{ für } \sigma \leq \frac{c}{2}.$$

Dieselben geben noch:

$$\frac{dp}{p d\sigma} = -\frac{\frac{c}{2} - \sigma}{p^2}, \quad \frac{d\psi'}{d\sigma} = \frac{1}{p^2}.$$

Hiermit findet sich ohne Schwierigkeit für den Differentialquotienten von  $A'$  nach  $\sigma$ , außerhalb:

$$\frac{dA'}{d\sigma} = 2K''h_0 \cdot \frac{\sin 2A}{2} \log \text{nat} \frac{(c-2\sigma)^2 + 4}{-4\sigma(c-\sigma)}, \quad (3)$$

innerhalb:

$$\frac{dA'}{d\sigma} = 2K''h_0 \cdot \frac{\sin 2A}{2} \left\{ \log \text{nat} \frac{(c-2\sigma)^2 + 4}{4\sigma(c-\sigma)} - \frac{2\pi}{c} \right\}. \quad (4)$$

Berücksichtigt man, daß im ersten Falle  $\sigma$  negativ ist und daß man identisch hat:

$$-4\sigma(c-\sigma) = [(c-2\sigma)^2 + 4] - [c^2 + 4],$$

so erkennt man leicht, daß  $dA' : d\sigma$  außerhalb stets positiv ist, bei Annäherung an den Gebirgsrücken beständig zunimmt und für  $\sigma = \text{null}$ , also in  $A$ ,  $+\infty$  wird. In  $A$  beginnt  $dA' : d\sigma$  innerhalb mit  $+\infty$ , und es findet von da an eine fortwährende Abnahme statt.

Diese Abnahme von  $A$  bis  $C'$  führt den Differentialquotienten notwendig durch null hindurch, da in  $C'$  mit  $\sigma = \frac{c}{2}$  der Wert von  $A'$  null wird. In der That ist in  $C'$

$$\frac{dA'}{d\sigma} = 2K''h_0 \cdot \sin 2A \left\{ \log \text{nat} \frac{2}{c} - \frac{\pi}{c} \right\},$$

und dieses ist für jeden Wert von  $c$  negativ.

Das Verschwinden von  $dA' : d\sigma$  innerhalb erfolgt in demjenigen Punkte zwischen  $A$  und  $C'$ , dessen  $\sigma$  der Bedingung genügt:

$$\log \text{nat} \frac{(c-2\sigma)^2 + 4}{4\sigma(c-\sigma)} = \frac{2\pi}{c}. \quad (5)$$

Setzt man zur Abkürzung für  $\log \text{nat} \frac{2\pi}{c}$  das Symbol  $q$ , so folgt hieraus durch Auflösung nach  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{c}{2} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{q - \frac{4}{c^2}}{1 + q}} \right\}. \quad (6)$$

Für  $c = 10$  und  $100$  ist dieser Wert gleich 1,003 bzw. 14,10.

Hierzu findet man aus Formel (2) die zugehörigen Werte von  $A'$ , die *Maximalwerte*, gleich

$$31,0'' \text{ bzw. } 34,0''.$$

Mit Rücksicht auf vorstehende Entwicklungen kann man nun den Gang der Lotablenkung in der Grundlinie des Profils wie folgt angeben: Die in größerem Abstände verschwindende Lotablenkung wächst bei Annäherung an den Gebirgsrücken rascher und rascher, besonders rasch am Fußpunkt  $A$ ; dann erfolgt die Zunahme allmählich immer langsamer bis zum Maximalwert, von wo ab eine beschleunigte Abnahme stattfindet, infolge welcher in  $C'$  die Lotablenkung sich auf null reduziert. Über  $C'$  hinaus erscheinen die Lotablenkungen in umgekehrter Reihenfolge, aber mit negativem Vorzeichen wieder.

Wir geben hier zur Übersicht in nebenstehenden Tabellen eine Reihe von Werten der *Lotablenkung*  $A'$  in der *Basis* des mittleren Teiles des Gebirgsrückens für die beiden Beispielfälle und verweisen im übrigen auf die graphischen Darstellungen der Tafel II (7. Kap.). Für die nächste Umgebung von  $A$ , d. h. für kleine Werte von  $\sigma$ , sind die Werte aus Näherungsformeln für  $A'$  mit Hülfe der Differentialquotienten in ähnlicher Weise wie im vorigen Paragraphen abgeleitet. Diese Formeln lauten, außerhalb:

$$A' = 2K''h_0 \left\{ \cos^2 A \log \text{nat} \frac{4c^2}{c^2 + 4} + A \sin 2A \right\} \\ + 2K''h_0 \frac{\sin 2A}{2} \left\{ \log \text{nat} \frac{c^2 + 4}{4c\sigma} + 1 \right\} \sigma, \quad (7)$$

innerhalb:

$$A' = 2K''h_0 \left\{ \cos^2 A \log \text{nat} \frac{4c^2}{c^2 + 4} + A \sin 2A \right\} \\ + 2K''h_0 \frac{\sin 2A}{2} \left\{ \log \text{nat} \frac{c^2 + 4}{4c\sigma} + 1 - \frac{2\pi}{c} \right\} \sigma. \quad (8)$$

Die Tabellen zeigen, was auch die Formeln (1) und (2) dieses Paragraphen bestätigen, daß  $A'$  außerhalb bei flachen Profilen wesentlich von  $\sigma : c$  abhängt, während sich innerhalb eine Abweichung von dieser Abhängigkeit zeigt.

Es mag noch bemerkt werden, daß die für die Abstände  $\sigma = -500$  und  $-100$  angegebenen Werte der  $A'$  bei  $c = 100$  im Falle des S. 287 eingeführten Wertes von  $2L$  eine nur ganz rohe Annäherung bieten und eigentlich  $2L$  weit größer voraussetzen. Die für diese Abstände angegebenen Werte der  $A'$  sind bei jenem Werte von  $2L$  zu groß.

$$c = 10 \quad ch_0 = 25000^m$$

$$c = 100 \quad ch_0 = 250000^m$$

$\sigma$	$\sigma h_0$	$A'$	$\sigma$	$\sigma h_0$	$A'$
— 50	— 125000 <sup>m</sup>	1,8''	— 500	— 1250000 <sup>m</sup>	1,8''
— 10	— 25000	6,6	— 100	— 250000	6,6
— 5	— 12500	10,2	— 50	— 125000	10,2
— 0,5	— 1250	22,3	— 5	— 12500	21,9
— 0,1	— 250	25,2	— 1	— 2500	25,4
— 0,01	— 25	26,5	— 0,1	— 250	26,8
0 <sup>am</sup> Fuße	0	26,7	0 <sup>am</sup> Fuße	0	27,0
+ 0,01	+ 25	27,0	+ 0,1	+ 250	27,3
+ 0,1	+ 250	28,1	+ 1	+ 2500	28,7
+ 0,5	+ 1250	30,5	+ 5	+ 12500	31,8
+ 1,0	+ 2500	31,0	+ 10	+ 25000	33,6
+ 1,5	+ 3750	30,6	+ 15	+ 37500	34,0
.	.	.	+ 20	+ 50000	33,3
+ 3	+ 7500	23,1	+ 30	+ 75000	28,7
+ 4	+ 10000	13,4	+ 40	+ 100000	19,4
+ 4,5	+ 11250	7,1	+ 45	+ 112500	11,9
.	.	.	+ 48	+ 120000	5,6
+ 4,9	+ 12250	1,4	+ 49	+ 122500	3,0
+ 5	+ 12500	0	+ 50	+ 125000	0
unter dem Kamm.			unter dem Kamm.		

Zu einer *rohen Schätzung* hat man für die Nähe des Fußes des Gebirges die Lotstörungsformel:

$$A' = 2 K'' h_0 \log \text{nat } 4, \quad (9)$$

d. i. für  $K'' = 0,0039$ , wobei  $h_0$  in Metern zu nehmen ist:

$$A' = 0,011 h_0 \text{ Sekunden.} \quad (9^*)$$

Mit Rücksicht auf die angegebenen Werte für die Lotstörung  $A$  darf man sich nicht wundern, wenn sich bei einem so mächtigen Gebirge wie dem Kaukasus die Breitenamplitude von ca.  $1^\circ$  für die beiden, nördlich und südlich des Kammes gelegenen Punkte *Wladikawkas* und *Duschett* um  $54''$  gestört fand\*). Ebenso müssen große Amplitudenstörungen entstehen, wenn die Endpunkte des Bogens zwischen 2 hohen Gebirgen liegen, wie die Endpunkte der Gradmessung des *Beccaria* (1768) in Oberitalien: *Andrate* am südlichen Fusse der schweizer Alpen und *Mondovi* am nördlichen der ligurischen Alpen. Nach Oberst *von Orff's* Zusammenstellung

\*) Nach Mitteilung von *O. Struve*, vergl. weiterhin § 41.

(vergl. Bd. 1 S. 571) ist die geograph. Breite, astronom. bzw. geodätisch von *München* übertragen, gleich

für <i>Andrate</i>	45°31'12,36''	astr.	45°31'40,57''	geod.	geod. — astr.
					+ 28,21''
„ <i>Mondovi</i>	44 23 45,38	„	44 23 25,28	„	— 20,10.

Mithin ist die Störung der Amplitude gleich 48''. *Beccaria* fand 41'', ein Resultat, welches anfangs seinen Messungen zur Last gelegt wurde, bis eine Revision im 1. Viertel dieses Jahrhunderts die Ergebnisse der Messungen wenigstens im allgemeinen bestätigte\*).

§ 13. Fortsetzung: Die Krümmungsradien im Niveau der Grundfläche. Denken wir uns den gleichschenkeligen Gebirgsrücken auf eine Kugelfläche vom Radius  $R$ , dem mittleren Erdradius, aufgesetzt, so ändern sich für das mittlere Querprofil die berechneten Lotablenkungen  $A$  und  $A'$  jedenfalls nur unwesentlich, dagegen erlangen wir den Vorteil, bezüglich der Krümmungsradien die Rechnungsergebnisse den irdischen Verhältnissen besser angepaßt zu haben. Nach S. 274 § 3 (19) können wir nämlich für den Krümmungsradius der gestörten Niveaufläche in der Ebene des mittleren Profils mit Rücksicht auf die allgemeine Erdkrümmung nunmehr angenähert setzen

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} - \frac{dA'}{h_0 d\sigma}. \quad (1)$$

Hierin ist für  $A'$  die Lotablenkung in der Basis  $AB$  zu setzen, welche die ungestörte Lage der Niveaufläche bezeichnet. Die nicht unerhebliche Störung der Höhenlage der Niveaufläche bewirkt allerdings einen Fehler der Gleichung (1), wenn man dieselbe auf die gestörte, aus  $AB$  hervorgehende Niveaufläche bezieht; aber einerseits ist der Fehler nicht beträchtlich, andererseits kommt man der Wahrheit etwas näher, wenn man  $\varrho$  nicht auf diejenige gestörte Niveaufläche bezieht, welche ungestört die Lage  $AB$  hat, sondern auf eine  $AB$  näherliegende, gestörte Niveaufläche, etwa diejenige, welche durch  $A$  und  $B$  hindurch geht. Ja man kann sogar diese gestörte Niveaufläche als Basis des Gebirgsrückens ansehen, denn der Wert für  $A'$  kann dadurch merkliche Änderungen nicht erleiden.

Nach (3) und (4) des vorigen Paragraphen erhalten wir nun außerhalb ( $\sigma$  negativ):

$$\frac{1}{\varrho_a} = \frac{1}{R} \left\{ 1 - KR \sin 2A \log \text{nat} \frac{(c - 2\sigma)^2 + 4}{-4\sigma(c - \sigma)} \right\}, \quad (2)$$

und innerhalb ( $\sigma$  positiv):

$$\frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{R} \left\{ 1 - KR \sin 2A \left[ \log \text{nat} \frac{(c - 2\sigma)^2 + 4}{4\sigma(c - \sigma)} - \frac{2\pi}{c} \right] \right\}. \quad (3)$$

\*) Die Angabe für *Beccarias* Fehler gleich 41'' ist der *Ordnance Survey, Principal Triangulation*, entlehnt und stammt wohl aus *Opérations géodésiques et astronomiques pour la mesure d'un arc du parallèle moyen*, t. II., Milan 1827.

Hierbei ist  $K$  als Arcus zu nehmen, sodaß nach S. 286 (9):

$$KR = \frac{3\Theta}{4\pi\Theta_m} \quad (4)$$

wird, speziell für  $\Theta = \frac{1}{2} \Theta_m$  aber bis auf  $1/2\%$  genau

$$KR = 0,12 \quad (4^*)$$

gesetzt werden kann.

Zufolge der Gleichungen (2) und (3) weicht  $\varrho_a$  erst in solcher Nähe von  $A$  bemerkenswert von  $R$  ab, für welche  $\sigma$  nicht größer ist als von der Ordnung  $c$ , und zwar ist  $\varrho_a > R$ . Erst in allernächster Nähe von  $A$ , d. h. für sehr kleine  $\sigma$ , steigt  $\varrho_a$  bis  $+\infty$ , springt nach  $-\infty$  und nimmt ab bis auf null in  $A$  selbst; innerhalb geht  $\varrho_i$  ebenso rasch nach  $+\infty$  und sinkt rasch auf Werte herab, die nur wenig größer als  $R$  sind; weiterhin bis  $C'$  nimmt  $\varrho_i$  langsam bis zu Werten ab, die etwas kleiner als  $R$  sind. In  $C'$  ist  $\varrho_i$  ein Minimum.

Von  $h_0$ , der Höhe des Gebirgsrückens, hängen  $\varrho_a$  und  $\varrho_i$  nicht ab, wohl aber von  $c$ , dem Verhältnis der Basisbreite zur Höhe, und zwar wachsen bei konstantem Verhältnis  $\sigma:c$  die Abweichungen von  $\varrho_a$  gegen  $R$  nicht mit zunehmendem  $c$  sondern mit abnehmendem  $c$ , also mit wachsender Steilheit der Hänge.

Dasselbe gilt im wesentlichen auch für  $\varrho_i$ . Fassen wir insbesondere dasjenige  $(\varrho_i)_{min}$  ins Auge, welches in  $C'$  stattfindet, so ist zunächst nach (3):

$$\frac{1}{(\varrho_i)_{min}} = \frac{1}{R} \left\{ 1 + 2KR \sin 2A \left[ \frac{\pi}{c} - \log \text{nat} \frac{2}{c} \right] \right\}, \quad (5)$$

wobei zu beachten ist, daß zwischen  $A$  und  $c$  die Relation  $\tan A = 2:c$  besteht. Der Differentialquotient von

$$\sin 2A \left[ \frac{\pi}{c} - \log \text{nat} \frac{2}{c} \right], \text{ d. i. } \frac{4c}{c^2 + 4} \left[ \frac{\pi}{c} - \log \text{nat} \frac{2}{c} \right],$$

nach  $c$  ist gleich

$$\frac{4}{(c^2 + 4)^2} \left\{ (c^2 - 4) \left[ \log \text{nat} \frac{2}{c} + 1 \right] - 2\pi c + 8 \right\};$$

derselbe ist von  $c$  gleich null bis unendlich negativ. Daher hat (5) seinen größten Wert bei  $c = \text{null}$ . Man hat u. a. als Wert der geschlungenen Parenthese von (5) für die Annahme (4\*):

1,039	bei $c = 100$	
1,177	„	10
1,375	„	2
1,470	„	1
1,750	„	0.

(6)



Es scheint paradox, allein es stimmt damit überein, dass die Maximallenkung des Lastes auf dem Hange, wie oben S. 297 angegeben, die gleiche Profile gezeigt wurde, unabhängig von  $c$  ist. Je kleiner also der Bogen, auf welchen sich die Lastverteilung verteilt, und desto größer müssen die Störungen im Nennungsstadium werden.

Wir geben nun eine Übersicht für die Werte  $\varrho$  bei  $c = 10$  und  $100$  mit der Annahme (4\*) für  $KR$ :

$c = 10 \quad c h_0 = 25000^m$			$c = 100 \quad c h_0 = 250000^m$		
$\sigma$	$\sigma h_0$	$\varrho : R$	$\sigma$	$\sigma h_0$	$\varrho : R$
50	— 125000 <sup>m</sup>	1,0004	— 100	— 250000 <sup>m</sup>	1,0006
10	— 25000	1,0056	— 50	— 125000	1,0014
5	— 12500	1,0139	— 5	— 12500	1,0084
0,5	— 1250	1,0896	— 1	— 2500	1,0158
0,1	— 250	1,179	— 0,1	— 250	1,0272
0,01	— 25	1,345	— 0,01	— 25	1,0390
0 <sup>am</sup> Fuß	— 0	null	0 <sup>am</sup> Fuß	— 0	null
+ 0,01	+ 25	1,294	+ 0,01	+ 25	1,0387
+ 0,1	+ 250	1,136	+ 0,1	+ 250	1,0269
+ 0,5	+ 1250	1,0418	+ 1	+ 2500	1,0152
+ 1	+ 2500	1,0004	+ 5	+ 12500	1,0067
+ 2	+ 5000	0,9519	+ 15	+ 37500	0,9995
+ 3	+ 7500	0,9131	+ 30	+ 75000	0,9
+ 4	+ 10000	0,8745	+ 40	+ 100000	0,9866
+ 5	+ 12500	0,8494	+ 50	+ 125000	0,9626
unter dem Kamm.			unter dem Kamm.		

Diese Übersicht zeigt u. a., dass das Gebiet der abnorm großen und kleinen  $\varrho_a$  und  $\varrho_i$  in der nächsten Umgebung von  $A$  an ganz kleine  $\sigma$  gebunden ist. Um dieses noch besser einzusehen, setzen wir für kleine  $\sigma$ :

$$\varrho_a = n R, \quad (7)$$

womit aus (2) folgt zur Bestimmung von  $\sigma$  bei gegebenem  $n$ :

$$\frac{(c - 2\sigma)^2 + 4}{-4\sigma(c - \sigma)} = \text{num log nat} \frac{1 - \frac{1}{n}}{KR \sin 2A} = q.$$

Die Auflösung dieser Gleichung giebt, wenn wie angedeutet, die rechte Seite derselben mit  $q$  bezeichnet wird:

$$\sigma = \frac{c}{2} \left\{ 1 - \sqrt{1 + \frac{c^2 q}{1 - \frac{1}{q}}} \right\}. \quad (8)$$

Denken wir uns entsprechend einer successiven Annäherung an  $A$  den Wert von  $n$  von  $+2$  durch  $+\infty$  über  $-\infty$  bis null gehend, so ist  $q$  stets eine große Zahl. Den kleinsten Wert hat  $q$  bei  $n=2$  und  $A=45^\circ$  oder  $c=2$ . Derselbe ist für  $KR=0,12$  gleich rund 65. Ferner ist für  $n=2$ , wie man durch Probieren findet, der kleinste Wert von  $c^2q$  nahe bei  $c=1,5$  gelegen. Dieses Minimum von  $c^2q$ , gleich rund 170, ist für das angegebene Intervall von  $n$  überhaupt das Minimum. Wegen des Umstandes, daß  $q$  und  $c^2q$  große Zahlen sind, genügt es anstatt (8) zu setzen:

$$-\sigma = \frac{c}{4q} \left\{ 1 + \frac{4}{c^2} + \frac{3}{4q} + \dots \right\}. \quad (8^*)$$

Für  $c=10$  und  $KR=0,12$  ist  $q = \text{num log nat} \left[ 21,7 \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right]$ , dagegen für  $c=100$  gleich  $\text{num log nat} \left[ 208 \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \right]$ . Hieraus erkennt man, daß zu

$$\varrho_a = 2R$$

bei  $c=10$ , dem ungünstigeren Falle, der sehr kleine Wert  $-\sigma = 1/20000$  gehört, sodaß bei  $h_0 = 2500^m$  der betreffende Punkt von  $A$  nur um  $-\sigma h_0 = 1/8^m$  absteht. Im gleichen Falle ist für

$$\varrho_a = 3R$$

$-\sigma = 1/800000$ ,  $-\sigma h_0 = 0,003^m$ . Dies bestätigt das oben Gesagte über die geringe Ausdehnung des Gebietes abnormer Werte von  $\varrho_a$  bei flachen Profilen.

Ein ganz gleiches Verhalten zeigt  $\varrho_i$ , was hier nicht besonders untersucht zu werden braucht.

Aber auch bei steilen Profilen ist das betreffende Gebiet nur von geringer Ausdehnung. Durch Differenzieren von  $\sigma$  nach  $c$  findet man zunächst, daß für jeden Wert von  $n$  der größte Wert von  $-\sigma$  nahe bei  $c=2$  liegt. Es ist dieser Maximalwert gleich

$$-\sigma = \text{num log} \left( -\frac{1 - \frac{1}{n}}{0,12} \right).$$

Hiermit erhält man denselben

$$\left. \begin{array}{lll} \text{für } n=2 \text{ gleich } 1/65, & \text{womit } -\sigma h_0 = 40^m & \\ \text{,, } 3 \text{ ,, } 1/260 & \text{,, ,, } 10^m & \\ \text{,, } \infty \text{ ,, } 1/4000 & \text{,, ,, } 0,6^m & \end{array} \right\} \text{ bei } h_0 = 2500^m.$$

Nach dem Vorstehenden entspricht praktisch genommen der Verlauf der Krümmungsradien in der Grundfläche am Fuße des Gebirgsrückens wesentlich einer stetig verlaufenden Verflachung. Dagegen sind in den Niveauflächen, welche zwischen  $A$  und  $C$  in das Gebirge eintreten, Unstetigkeiten der Krümmung vorhanden, für welche die

allgemeine Formel (2) S. 38 gilt, die man aber auch mittelst der Formeln (2) und (3) S. 302 nachweisen kann, wenn man unterhalb einer derartigen Niveaufläche für die Gebirgsmasse eine horizontale Platte und ein negativ wirkendes, gleichschenkeliges Prisma substituiert.

§ 14. **Prismatische Thäler.** Für den mittleren Querschnitt eines Thales von der Form eines dreiseitigen Prismas, dessen Länge groß ist im Verhältnis zur Breite und Tiefe, gelten die Formeln der §§ 7—13 unmittelbar, wenn  $\Theta$  negativ genommen wird. Auch ist die zum Gebirgsrücken entgegengesetzte Lage zu beachten. Demgemäß erhalten die Lotstörungen und Störungen im reziproken Krümmungsradius bei einem Thale entgegengesetzte Werte wie bei einem entsprechenden Gebirgsrücken. Aber die Schwerestörungen bleiben in entsprechenden Punkten der Querschnitte dieselben.

Setzen wir ein auf beiden Seiten gleichgeböschtes Thal voraus,

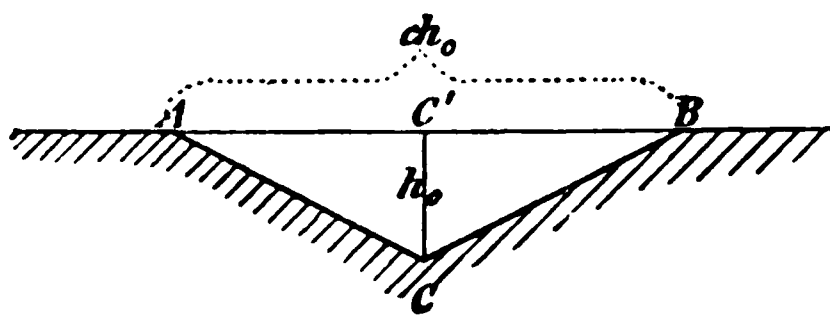


Fig. 41.

Fig. 41, so gelten für die besonders interessanten Lotstörungen in der Linie  $AB$  die Formeln des § 12 S. 298.

$$\text{Man hat darin } \Theta = -\frac{1}{2} \Theta_m$$

$$= -2,8 \text{ anzusetzen für ein offe-}$$

nes Thal, dagegen  $-1,8$  für ein mit Wasser gefülltes Thal, also einen Fluß oder Meeresarm.

Unter Voraussetzung flacher Böschung, die hier meist zutrifft, ist die Lotstörung in der Linie  $AB$  nahe bei  $A$  und  $B$  nach S. 301 (9) nahezu gleich

$$2K''h_0 \log \text{nat } 4. \quad (1)$$

Hierin ist für ein offenes Thal entsprechend der Annahme  $\Theta = -\frac{1}{2} \Theta_m$  zu setzen  $K'' = -0,0039$ . Dagegen ist für einen Fluß  $K''$  im Verhältnis  $2,8 : 1,8$  zu verkleinern. Somit folgt als Näherungswert der Lotstörung am Rande

$$\begin{aligned} \text{eines flachen Thales: } & -0'',011 h_0 \\ \text{eines flachen Stromes: } & -0'',007 h_0 \end{aligned} \quad (1^*)$$

für  $h_0$  in Metern. Das negative Vorzeichen bedeutet eine Abstossung des aufgehängten Lotes von  $C'$  weg.

Das Maximum der Lotstörung liegt etwas nach der Mitte zu und ist ein wenig größer.

Der Krümmungsradius, welcher nach dem vorigen Paragraphen wegen des negativen Wertes von  $K$  zwischen  $A$  und  $B$  im allgemeinen, ausgenommen nahe bei  $A$  und  $B$ , größer als der ungestörte Wert  $R$  wird, erhält in der Mitte  $C'$  seinen Maximalwert, für den sich bei flachen Profilen ebenfalls eine Näherungsformel

aufstellen läßt. Mit einigen Vernachlässigungen giebt nämlich die Formel (5) S. 303 die nachstehende, für grössere Werte von  $c$  brauchbare Näherungsformel:

$$\left(\frac{1}{\varrho}\right)_{C'} = \frac{1}{R} \left\{ 1 + 4KR \frac{\log \text{nat} \frac{c}{2}}{\frac{c}{2}} \right\}. \quad (2)$$

Hierin ist bei  $\varpi = \frac{1}{2} \varpi_m = 2.8$  nach S. 303 (4\*)  $4KR = 0,48$ ; bei  $\varpi = 1,8$  also gleich  $0,31$ , sodaß man für den reziproken Krümmungsradius in der Mitte  $C'$  von  $AB$  näherungsweise hat

$$\text{bei einem flachen Thale: } \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} \left( 1 - 0,5 \frac{\log \text{nat} \frac{c}{2}}{\frac{c}{2}} \right) \quad (2^*)$$

$$\text{bei einem flachen Strome: } \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} \left( 1 - 0,3 \frac{\log \text{nat} \frac{c}{2}}{\frac{c}{2}} \right).$$

Hierin ist  $\frac{2}{c} = \tan A$  das Gefälle der Böschung, von welchem  $\varrho$  lediglich abhängt.

Da der Quotient  $\log \text{nat} \frac{c}{2} : \frac{c}{2}$  bei  $\frac{c}{2} = 1$  und  $\infty$  gleich null wird, so existiert dazwischen ein Maximum, welches bei  $\frac{c}{2} = e$ , der Basis der natürlichen Logarithmen, stattfindet und gleich ist  $1 : e$ . Man hätte hiernach für den maximalen Wert von  $\varrho$  inmitten  $AB$  angenähert bei einem flachen Thale  $\varrho = 1,22 R$ , bei einem Strome  $\varrho = 1,12 R$ , und zwar für die Böschung  $1 : e$  d. i.  $1 : 2,7$ . Jedoch ist hierbei zu beachten, daß eine solche Böschung nicht mehr als flache zu bezeichnen ist und daß daher die Formeln (2\*) hier bereits einen größeren Fehler besitzen. In der That ist nach (5) S. 303 für  $\frac{c}{2} = e$  bei einem flachen Thale  $\varrho = 1,32 R$ , bei einem Strome  $\varrho = 1,18 R$ . Außerdem ist bereits S. 303 nachgewiesen, daß die Störung in  $\frac{1}{\varrho}$  für den Punkt  $C'$  mit wachsender Steilheit der Böschung fortwährend wächst, sodaß also auch im gegenwärtigen Falle  $\varrho$  bei wachsendem Gefälle der Böschung im Punkte  $C'$  fortwährend zunimmt.

§ 15. Fortsetzung: steile Böschung. Indem wir unter Voraussetzung des Querprofils Fig. 42 die Formel für die Horizontalanziehung am Rande in  $A$  ableiten, haben wir den Ausdruck (5) § 6 S. 281 anzuwenden auf die dreiseitigen Prismen 1 und 2, Fig. 42.

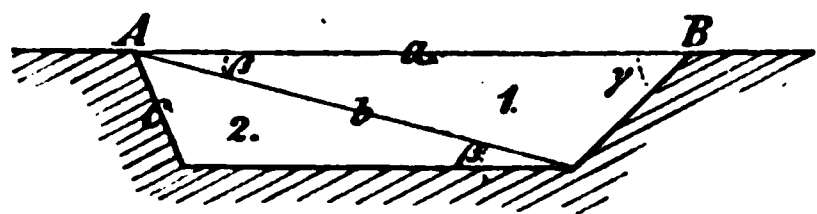


Fig. 42.

Es ist zu setzen

$$\begin{aligned} \text{für 1: } & r_1' = a & \varphi_1 = 0 \\ & r_2' = b & w_1 = \gamma \quad \omega_0 = \beta, \\ \text{für 2: } & r_1' = b & \varphi_1 = \beta \\ & r_2' = c & w_1 = \beta, \end{aligned}$$

womit die durch die Horizontalanziehung erzeugte Ablenkung des aufgehängten Lotes in Richtung nach dem Thale hin mit Rücksicht auf den Schluß von § 7 S. 286 gleich wird

$$2K'' \left\{ a \sin \gamma \left( \cos \gamma \log \text{nat} \frac{a}{b} + \beta \sin \gamma \right) + b \sin \beta \log \text{nat} \frac{b}{c} \right\}. \quad (1)$$

Hierin ist nach S. 296 für ein offenes Thal  $K'' = -0,0039$ , wenn 2,8 die Dichtigkeit der umgebenden Massen ist; für einen vollen Kanal reduziert sich  $K''$  auf  $-0,0025$ . Die Distanzen  $a$  und  $b$  sind dabei in Metern einzuführen.

Ist das Querprofil ein *Rechteck* von der Grundlinie  $a$  und der Höhe  $h_0$ , so wird am Rande in  $A$  die Lotablenkung gleich

$$2K'' h_0 \left\{ \frac{\beta}{\tan \beta} + \log \text{nat} \frac{1}{\sin \beta} \right\}. \quad (2)$$

Aus den Formeln der §§ 5 und 6 dieses Kapitels kann man leicht auch Formeln für vierseitige Prismen herstellen, was wir indessen dem Leser überlassen, ebenso wie die Behandlung des Falles *einer sehr tiefen, langen Schlucht im Felsengebirge*. Auf diesen weisen *Thomson und Tait, Handbuch der theor. Physik*, Bd. 1, 2. Hälfte, S. 27--28, als besonders interessant hin. Die daselbst angegebene, nicht entwickelte Formel für die Lotstörung am Rande der Schlucht findet man leicht, wenn man die Schlucht als große Platte betrachtet und die Formel (2) S. 141 für die normale Anziehung einer solchen auf einen Punkt, der in geringem Abstände vor ihrem mittleren Teile liegt, anwendet. Da der in Rede stehende Punkt nicht am mittleren Teile, sondern am Rande liegt, ist nur die Hälfte des Formelwertes für die normale Anziehung anzuwenden. Für einen Punkt, der mehr nach der mittleren Tiefe zu liegt, gelten aber die ganzen Werte. Die Lotstörung ist gleich

$$- \varrho'' \frac{3 \Theta a}{4 \Theta_m R}$$

im 1. Falle, das Doppelte hiervon im 2. Falle, für  $a$  als Breite der Schlucht. Hiernach wird  $\varrho$  für Niveauflächen, welche die Schlucht in mittleren Tiefen durchschneiden, in der Regel negativ, oben und unten aber nur bei sehr dichten Felsmassen. Denu dazu gehört, daß die Summe der Absolutwerte der Lotstörungen für beide Seiten der Schlucht  $>$  ist als der ungestörte Wert  $\frac{a}{R}$  des Winkels zwischen den Lotrichtungen. Die mittelst der an-

gezogenen Formel leicht zu führende Untersuchung von  $\frac{1}{\varrho}$  zeigt, daß  $\frac{1}{\varrho}$  am Rande außerhalb der Schlucht gleich  $\frac{1}{R}$  ist und im Innern auf

$\frac{1}{R} \left( 1 - \frac{3\Theta}{2\Theta_m} \right)$  springt, welchen Wert  $\frac{1}{\varrho}$  daselbst konstant beibehält. In der mittleren Tiefe geht der Sprung von  $\frac{1}{R}$  auf  $\frac{1}{R} \left( 1 - \frac{3\Theta}{\Theta_m} \right)$ , welcher Wert ebenfalls im Innern gilt. Der Betrag der Sprünge stimmt mit den Angaben (2) S. 38 im 1. Kapitel.

### § 16. Halbkugelförmiger Berg und halbkugelförmige Pinge.

Wir betrachten zunächst einen halbkugelförmigen Berg mit dem Radius  $a$  und der Dichtigkeit  $\Theta$ , Fig. 43. Dabei sind für einen Punkt  $P$  in der durch den Kugelmittelpunkt führenden Niveaufläche, insoweit wir diese als Ebene auffassen dürfen, das Potential  $v$  der Anziehung und die Horizontalanziehung genau halb so groß als für eine Vollkugel mit demselben Zentrum  $C$ .

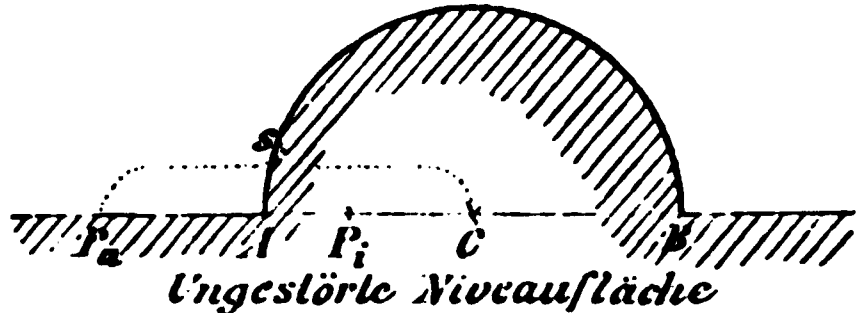


Fig. 43.

Für einen Punkt  $P_a$  der Niveaufläche von  $C$  außerhalb im Abstände  $s$  von letzterem Punkte ist das Potential nach S. 62 (8) gleich

$$v = \frac{2}{3} \pi k^2 \frac{a^3 \Theta}{s}; \quad (1)$$

setzen wir nun die normale Schwerkraft gleich  $\frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R$  und dividieren damit in (1), so folgt als Erhebung der gestörten Niveaufläche über die ungestörte bei  $P_a$  der Wert

$$h_a = \frac{\Theta}{2\Theta_m} \frac{a^3}{Rs}. \quad (2)$$

Für einen Punkt  $P_i$  der Niveaufläche von  $C$  innerhalb der Halbkugel ist das Potential nach S. 62 (8\*) gleich

$$v = \pi k^2 \Theta \left( a^2 - \frac{1}{3} s^2 \right). \quad (3)$$

Hieraus folgt durch Division mit der Schwerkraft die Erhebung der gestörten Niveaufläche bei  $P_i$  gleich

$$h_i = \frac{\Theta}{4\Theta_m} \frac{3a^2 - s^2}{R}. \quad (4)$$

Das Maximum für  $h_i$  findet für  $s = 0$ , also für die Mitte des Berges, statt.

Die Lotablenkung  $A = -dh:ds$  wird für einen Punkt  $P_a$  außerhalb mit Rücksicht auf (2) gleich

$$A_a = \frac{\Theta}{2\Theta_m} \frac{a^3}{Rs^2}, \quad (5)$$

dagegen für einen Punkt  $P_i$  innerhalb mit Rücksicht auf (4) gleich

$$A_i = \frac{\Theta}{2\Theta_m} \frac{s}{R}. \quad (6)$$

Das Maximum von  $A$  liegt bei  $A$  mit  $s = a$ :

$$A_{max} = \frac{\Theta}{2\Theta_m} \frac{a}{R}.$$

Für den Krümmungsradius der gestörten Niveaufläche haben wir nach S. 274 (19) die Formel

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} + \frac{dA}{ds},$$

wenn  $R$  den Radius der ungestörten Niveaufläche bezeichnet. Hiermit wird für einen Punkt  $P_a$  außerhalb:

$$\frac{1}{\varrho_a} = \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{a^3}{s^3} \right), \quad (7)$$

und für einen Punkt  $P_i$  innerhalb:

$$\frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{\Theta}{2\Theta_m} \right). \quad (8)$$

Innerhalb ist also der Radius  $\varrho$  konstant; außerhalb wächst er bei Annäherung an den Berg bis auf seinen Maximalbetrag in  $A$ , der aus (7) für  $s = a$  sich findet gleich

$$\frac{1}{(\varrho_a)_{max}} = \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{\Theta}{\Theta_m} \right). \quad (9)$$

Für  $\Theta = \frac{1}{2} \Theta_m$  geben vorstehende Formeln bzw.:

außerhalb	innerhalb
$h = a^3 : 4 R s$	$(3 a^2 - s^2) : 8 R$
$A = \varrho'' a^3 : 4 R s^2$ <small>in Sek.</small>	$\varrho'' s : 4 R$
$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{a^3}{2 s^3} \right)$	$\frac{5}{4 R},$
in $A$ und $B$ :	$\left\{ \begin{array}{l} A_{max} = \varrho'' a : 4 R \\ \frac{1}{(\varrho_a)_{max}} = \frac{1}{2 R} \end{array} \right.$

(10)

Betrachten wir anstatt eines halbkugelförmigen Berges eine halbkugelförmige Pinge, so ist in den Ausdrücken für Potential und Horizontalanziehung lediglich  $\Theta$  negativ zu nehmen. Speziell für  $\Theta = -\frac{1}{2} \Theta_m$  ergeben sich dabei die Ausdrücke:

außerhalb	innerhalb
$h = - a^3 : 4 R s$	$-(3 a^2 - s^2) : 8 R$
$A = - \varrho'' a^3 : 4 R s^2$ <small>in Sek.</small>	$-\varrho'' s : 4 R$
$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{a^3}{2 s^3} \right)$	$\frac{3}{4 R},$

(11)

$$\text{in } A \text{ und } B: \begin{cases} A_{\max} = -\varrho'' a : 4R \\ \frac{1}{(\varrho_a)_{\min}} = \frac{3}{2R} \end{cases}$$

Für  $\Theta = \pm \frac{1}{2} \Theta_m$  beträgt der Sprung in  $\frac{1}{\varrho}$  bei  $A$  und  $B$  von außen nach innen bezw.  $\pm \frac{3}{4R}$  anstatt, wie im 1. Kap. S. 39 (5) angegeben ist,  $\frac{3}{2R}$ . Dies hat seinen Grund lediglich darin, daß die Entwicklungen am letztgenannten Orte hier nicht mehr gelten, weil daselbst vorausgesetzt ist, daß die Niveaufläche an regulären Stellen der Grenzflächen der Massen hindurch geht;  $A$  und  $B$  sind aber offenbar solche Stellen nicht. Dagegen werden bei einem Berg Niveauflächen in einiger Höhe über  $ACB$  bei ihrem Eintritt in den Berg einen Sprung in  $\frac{1}{\varrho}$  gleich  $\frac{3}{2R}$  erleiden, und entsprechend bei einem Thale.

Die Lotablenkung durch einen halbkugelförmigen Berg berechnet nach *Todhunter, History of Attraction I* p. 460, schon *Newton* 1728 in der Abh. *A Treatise of the system of the World*. Das *Handbuch der theor. Physik* von *Thomson und Tait*, Bd. 1, 2. Hälfte, S. 26–27, enthält die Formeln für Anziehung auf  $A$  horizontal und vertikal. Vergl. auch *Dahlander, Poggendorff's Ann.* 1862, Bd. 117, S. 148 u. ff.

§ 17. **Kleine Insel im Ocean.** Wir denken uns eine Insel in Form eines geraden Kreiskegels, welcher auf dem horizontalen Meeresboden aufsitzt und mit seiner Spitze  $P$  gerade bis zum Niveau der Meeresfläche reicht. Durch die Anwesenheit der Insel wird sich die letztere in der Nähe der Insel etwas heben, jedoch nicht viel. Wichtiger ist die Vergrößerung der Beschleunigung der Schwerkraft durch die Inselanziehung.

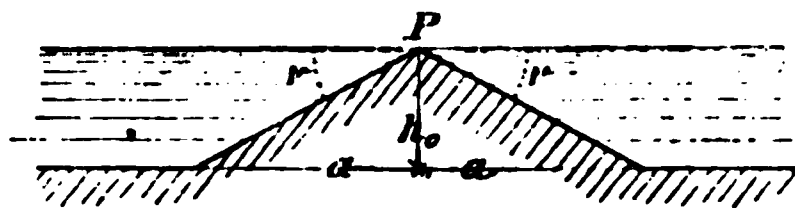


Fig. 44.

Nach S. 143 § 2 (3) und (4) ist mit Rücksicht auf die veränderte Bezeichnung das Potential der Anziehung der Inselmasse auf  $P$  gleich

$$\pi k^2 (\Theta - 1) h_0 \left\{ \sqrt{a^2 + h_0^2} - h_0 \right\} \quad (1)$$

und die Vertikalanziehung gleich

$$2\pi k^2 (\Theta - 1) h_0 \left\{ 1 - \sin \nu \right\}. \quad (2)$$

Hierin ist unter  $\Theta$  die Dichtigkeit der Inselmasse zu verstehen.

Dem Ausdrücke (1) entspricht eine Hebung der Meeresfläche im Betrage von

$$\frac{3(\Theta - 1)}{4\Theta_m} \frac{h_0}{R} \left\{ \sqrt{a^2 + h_0^2} - h_0 \right\}, \quad (3)$$

wie aus (1) durch Division mit der normalen Schwerkraft  $G$ , für



welche wir wie sonst  $\frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R$  ansetzen, hervorgeht. Da bei größeren Tiefen wohl in der Regel  $a = h_0 \cot \nu$  wesentlich größer als  $h_0$  sein wird, so folgt für die Annahme  $\Theta = \frac{1}{2} \Theta_m = 2,8$  in meist ausreichender Annäherung als Hebung der Meeresfläche in  $P$ :

$$\frac{a h_0}{4 R} \quad \text{oder} \quad \frac{h_0^2 \cot \nu}{4 R}. \quad (3^*)$$

Hierbei bezeichnet  $\cot \nu$  das reziproke Gefälle der Inselböschungen.

Beispielsweise ist für  $h_0 = 3500^m$  und  $\cot \nu = 30$  die Hebung der Meeresfläche bei  $P$  gleich  $14^m$ . Dies ist so unerheblich, daß die durch Hebung der entsprechenden Massenschicht entstehende sekundäre Wirkung gar nicht weiter erörtert zu werden braucht. In Fig. 44 können wir uns unter der Meeresfläche die gestörte Fläche denken.

Die Schwerestörung wird nach (2) gleich

$$+ G \cdot \frac{3(\Theta - 1)}{2 \Theta_m} \frac{h_0}{R} (1 - \sin \nu). \quad (4)$$

Für die Annahme  $\Theta = \frac{1}{2} \Theta_m = 2,8$  und unter Voraussetzung flacher Böschung ist dies angenähert gleich

$$+ G \cdot \frac{h_0}{2 R}. \quad (4^*)$$

Infolge der Hebung der Meeresfläche tritt fürs Niveau der gestörten, d. i. wirklichen Meeresfläche noch eine kleine Verminderung zu dieser Vermehrung, welche sich nach der Regel für die Änderung der normalen Schwere bei Erhebungen außerhalb der Erdrinde berechnet.

Hiernach folgt aus (3) und (4) als Schwerestörung im Meeresniveau, wobei wir in (3) für  $a$  schreiben  $h_0 \cot \nu$ :

$$+ G \cdot \frac{3(\Theta - 1)}{2 \Theta_m} \frac{h_0}{R} \left(1 - \frac{h_0 \csc \nu}{R}\right) (1 - \sin \nu), \quad (5)$$

oder näherungsweise bei flachen Böschungen, wenn wir zugleich  $\Theta = \frac{1}{2} \Theta_m = 2,8$  setzen:

$$+ G \cdot \frac{h_0}{2 R} \left(1 - \frac{h_0 \cot \nu}{R}\right). \quad (5^*)$$

Die Verminderung der Schwerestörung infolge Hebung der Meeresfläche wird übrigens bei kleinen Inseln immer eine geringe sein; denn wie die Tiefenkarten des Weltmeeres zeigen, ist der Radius der Grundfläche  $a = h_0 \cot \nu$  im Verhältnis zu  $R$  stets geringfügig, so daß für eine Schätzung des Inseleinflusses auf die Schwerkraft Ausdruck (4\*) ausreicht.

Beispielsweise ist für  $h_0 = 3500^m$  und  $\cot \nu = 30^m$  die Schwerestörung nach (4\*) gleich  $0,000275 \cdot G$ , nach (5\*) gleich  $0,000270 \cdot G$  und nach (5) strenger gerechnet gleich  $0,000251 \cdot G$ .

§ 18. Deformationen durch kreisförmige Kontinente. Für die Verteilung der Erdoberfläche auf Land und Wasser hat man folgende Zahlen\*):

Oberfläche = 9 261 238 Qu.-Mln.\*\*)

Europa	=	180 000	„	} zus. = 990 000 Qu.-Mln.
Asien	=	810 000	„	
Afrika	=	540 000	„	
Australien	=	160 000	„	
Amerika	=	750 000	„	

welche letztere sich annähernd im Verhältnis 4 : 3 auf Nord- und Süd-Amerika verteilen.

Betrachtet man die Kontinente als ebene Kreisflächen vom Radius  $a$  und setzt die Erdoberfläche  $= 4\pi R^2$ , so erhält man hiermit für:

Europa-Asien	$a = 0,66 R$
Afrika	. . 0,48
Australien	. . 0,26
Nord-Amerika	. . 0,43
Süd-Amerika	. . 0,37 ,

indem allgemein wird:

$$a = 2R \sqrt{\frac{\text{Fläche}}{9261238}}.$$

Für eine schätzungsweise Berechnung der Deformationswirkung ist die Annahme der Kreisform eine gar nicht üble Annäherung, wie jeder Globus zeigt. Die stärkste relative Abweichung zeigt Afrika.

Als mittlere Meerestiefen ergeben sich für den

atlantischen Ocean	3681 <sup>m</sup>
stillen „	3887
indischen „	3344

und im Mittel für das ganze Weltmeer 3438<sup>m</sup>. Ferner hat man für die mittlere Höhe der Kontinente:

Europa	300 <sup>m</sup>
Asien	500
Afrika	500
Australien	250
Amerika	410

und im Mittel für das ganze Festland 440<sup>m</sup>.

\*) *Richard Andree, allgemeiner Handatlas 1880.* Hier findet man auch eine Tiefenkarte für den atlantischen und für den stillen Ocean.

\*\*) 1 geogr. Meile ist gleich 4 Min. des Äquators. Zur Berechnung der Oberfläche ist daher Bd. 1, S. 62, in Formel (9) für  $a_0\pi$  zu setzen 2700 Meilen.



Es ist aber nach Fig. 46  $\frac{1}{4} s_{\varphi}^2 = a^2 - b^2 \sin^2 \varphi$ ; daher wird

$$v_i = 4 k^2 \Theta D a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (3)$$

Bezeichnet man das vollständige elliptische Integral 2. Gattung mit  $E$ , setzt insbesondere

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} d\varphi = E\left(\frac{b}{a}\right), \quad (4)$$

so wird

$$v_i = 4 k^2 \Theta D a E\left(\frac{b}{a}\right). \quad (3^*)$$

Zu diesem Betrage von  $v_i$  gehört eine gewisse Erhebung  $h_i$ , welche erforderlich ist, um von der ungestörten Niveaufläche in die gestörte Niveaufläche gleichen Potentialwertes zu gelangen.

In erster Annäherung findet man  $h_i$  aus  $v_i$  durch Division mit der normalen Schwerkraft, für welche wir den Wert  $G = \frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R$  annehmen. Mit Rücksicht auf die sonstigen Vernachlässigungen reicht diese Annäherung trotz der bedeutenden Gröfse der Erhebungen  $h_i$  zu der beabsichtigten Schätzung aus. Es wird

$$h_i = \frac{3 \Theta}{\Theta_m} \frac{a D}{\pi R} E\left(\frac{b}{a}\right) \quad (5)$$

und für  $3 \Theta D : \Theta_m = 4000^m$  sowie wegen  $\pi R = 20000000^m$ :

$$h_i = a \frac{E\left(\frac{b}{a}\right)}{5000}. \quad (5^*)$$

Hieraus folgt die Lotstörung, positiv im Sinne einer Anziehung des aufgehängten Lotes gegen das Zentrum  $M$  hin, gleich

$$\mathcal{A}_i = - \frac{dh_i}{db} = \frac{3 \Theta}{\Theta_m} \frac{D}{\pi R} \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}} d\varphi.$$

Schreibt man identisch im Zähler des Integrales für  $\sin^2 \varphi$

$$\left\{ 1 - \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi \right) \right\} \frac{a^2}{b^2},$$

und setzt das vollständige elliptische Integral 1. Gattung

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}} = K\left(\frac{b}{a}\right), \quad (6)$$

so wird die Lotstörung

$$\underset{\text{in Sek.}}{\mathcal{A}_i} = \varrho'' \frac{3\Theta}{\Theta_m} \frac{D}{\pi R} \frac{a}{b} \left\{ K\left(\frac{b}{a}\right) - E\left(\frac{b}{a}\right) \right\}. \quad (7)$$

Für  $3\Theta D : \Theta_m = 4000^m$  giebt dies rund

$$\underset{\text{in Sek.}}{\mathcal{A}_i} = 40 \frac{a}{b} \left\{ K\left(\frac{b}{a}\right) - E\left(\frac{b}{a}\right) \right\}. \quad (7^*)$$

Um zu sehen, wie sich die Lotstörung von der Mitte nach dem Rande zu ändert, differenzieren wir  $\mathcal{A}_i$  nach  $b$  und erhalten

$$\frac{d\mathcal{A}_i}{db} = \frac{3\Theta D}{\Theta_m \pi R} \frac{a}{b} \frac{dK\left(\frac{b}{a}\right)}{db} = \frac{3\Theta D}{\Theta_m \pi R a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}} d\varphi. \quad (8)$$

Dieser Differentialquotient ist stets positiv, und es wächst daher die Lotstörung von der Mitte stetig bis an den Rand, wo sie einen Maximalwert erreicht.

Zugleich ergibt sich für den Krümmungsradius der gestörten Niveaufläche, wenn der ungestörte mit  $R$  bezeichnet wird, indem nach S. 274 (19)

$$\frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{R + h_i} + \frac{d\mathcal{A}_i}{db}$$

ist, die Näherungsrelation:

$$\frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{R + h_i} \left\{ 1 + \frac{3\Theta}{\pi \Theta_m} \frac{D}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}} d\varphi \right\}. \quad (9)$$

Augenscheinlich wächst  $\frac{1}{\varrho_i}$  mit  $b$ , also von der Mitte nach dem Rande zu, und  $\varrho_i$  ist somit innerhalb der Scheibe am Rande am kleinsten, in der Mitte am größten.

Um das in (9) auftretende Integral herzuleiten, kann man sich der Funktionen  $K$  und  $E$  bedienen. Es ist nämlich

$$\frac{d \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}}}{d\varphi} = \frac{1 - 2\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}} + \frac{b^2}{a^2} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}^3}.$$

Setzt man im 1. Zähler rechter Hand identisch

$$\sin^2 \varphi = \frac{a^2}{b^2} \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi \right) \right\}$$

und im 2. Zähler hiermit

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi &= - \sin^2 \varphi \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \\ &+ \frac{a^2}{b^2} \left\{ \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi \right) - \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

so folgt der obige Differentialquotient gleich

$$\frac{a^2}{b^2} \left\{ \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} - \frac{\left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}} \right\} - \frac{\left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}^3}.$$

Hiermit erhält man durch Umkehrung und Einführung der Grenzen ohne Schwierigkeit:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}^3} d\varphi = \frac{a^2}{b^2} \left\{ E\left(\frac{b}{a}\right) - \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) K\left(\frac{b}{a}\right) \right\} \frac{1}{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Es ist daher:

$$\frac{1}{e_i} = \frac{1}{R + h_i} \left\{ 1 + \frac{3\Theta}{\pi \Theta_m} \frac{D}{a} \frac{a^2}{b^2} \frac{E\left(\frac{b}{a}\right) - \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) K\left(\frac{b}{a}\right)}{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right\}. \quad (10)$$

Hierin setzen wir entsprechend der Annahme  $\Theta = 1,8$  abgerundet:

$$\frac{3\Theta}{\pi \Theta_m} = 0,3. \quad (10^*)$$

Ehe wir untersuchen, inwieweit vorstehende Formeln auf die durch einen Kontinent erzeugten Störungen anwendbar sind, entwickeln wir noch die entsprechenden Formeln für die Nähe des Randes auferhalb.

§ 20. Fortsetzung: Die Deformationen in der Nähe des Randes auferhalb. Mit Rücksicht auf Fig. 47 erhalten wir für das Potential der Anziehung des Flächenelements  $dq$  auf  $P_a$  den Ausdruck:

$$dv_a = k^2 \Theta D d\varphi de \quad (1)$$

in derselben Weise wie im vorigen Paragraphen den Ausdruck (1) für  $dv_i$ . Die Integration nach  $e$  giebt

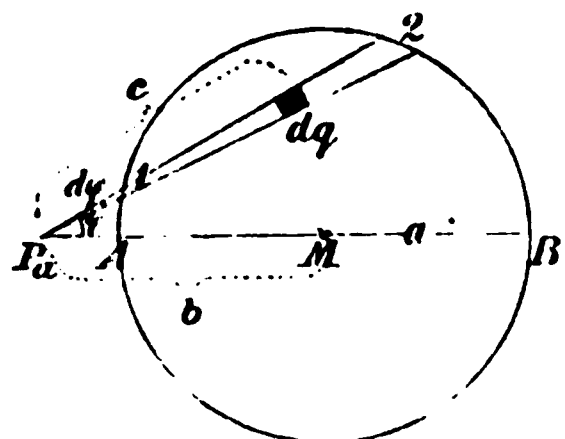


Fig. 47.

$$v_a = 2 k^2 \Theta D \int_0^\Phi s_\varphi d\varphi, \quad (2)$$

wobei für  $\Phi$  die Relation:

$$b \sin \Phi = a \quad (3)$$

und für  $s_\varphi$  die Beziehung:

$$\frac{1}{4} s_\varphi^2 = a^2 - b^2 \sin^2 \varphi \quad (4)$$

besteht. Hiermit wird

$$v_a = 4 k^2 \Theta D a \int_0^\Phi \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (5)$$

Führt man anstatt  $\varphi$  eine Variable  $\psi$  mit Hülfe der Gleichung

$$\sin \psi = \frac{b}{a} \sin \varphi$$

ein, so geht der Ausdruck für  $v_a$  über in

$$v_a = 4 k^2 \Theta D \frac{a^2}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \psi d\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \psi}}. \quad (6)$$

Derselbe läßt sich unter Beachtung der Identität

$$\cos^2 \psi = 1 - \frac{b^2}{a^2} \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \psi \right) \right\}$$

wie folgt schreiben:

$$v_a = 4 k^2 \Theta D b \left\{ E \left( \frac{a}{b} \right) - \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) K \left( \frac{a}{b} \right) \right\}. \quad (6^*)$$

Hierzu gehört die Erhebung der gestörten Niveaufläche gleichen Potentialwertes mit der ungestörten:

$$h_a = \frac{3 \Theta}{\Theta_m} \frac{b D}{\pi R} \left\{ E \left( \frac{a}{b} \right) - \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) K \left( \frac{a}{b} \right) \right\}, \quad (7)$$

d. i. für  $3 \Theta D : \Theta_m = 4000^m$  gleich

$$h_a = b \frac{E \left( \frac{a}{b} \right) - \left( 1 - \frac{a^2}{b^2} \right) K \left( \frac{a}{b} \right)}{5000}. \quad (7^*)$$

Die Entwicklung der Formeln für die Lotstörung und den Krümmungsradius unterlassen wir, da sie wenig Interesse bieten und ohnehin in der nächsten Nähe des Randes unbrauchbar werden.

§ 21. Fortsetzung: Die Brauchbarkeit der Formeln der letzten beiden Paragraphen mit Rücksicht auf die endliche Dicke der Kontinente. Bei den vorhergehenden Entwicklungen wurden anstatt sphärischer Scheiben von der Dicke  $D$  ebene Flächen, mit kondensierter Masse belegt, gesetzt. In diesem Paragraphen soll untersucht werden, welchen Einfluß die Kondensation hat. Wir sehen dabei von der Krümmung der Erde zunächst noch ab und haben also zuerst zu vergleichen das Potential der Anziehung eines Cylinders und dasjenige einer ebenen Fläche vom Querschnitt des Cylinders, belegt mit dessen kondensierter Masse.

Liegt der angezogene Punkt in der Mitte  $M$  der cylindrischen Deckfläche, so ist nach S. 142 § 2 (1)

$$v = \pi k^2 \Theta D a \left\{ \sqrt{1 + \frac{D^2}{a^2}} - \frac{D}{a} + \frac{a}{D} \log \text{nat} \left( \frac{D}{a} + \sqrt{1 + \frac{D^2}{a^2}} \right) \right\}.$$

Entwickelt man die Parenthese nach Potenzen von  $D : a$  und vernachlässigt bereits die 2. Potenzen, so folgt

$$v = 2\pi k^2 \Theta D a \left( 1 - \frac{D}{2a} + \dots \right). \quad (1)$$

Dagegen ist für die Mitte einer Fläche vom Radius  $a$  nach (3\*) S. 315

$$v = 2\pi k^2 \Theta D a, \quad (2)$$

indem für  $b = \text{null}$  nach (4) S. 315  $E$  offenbar in  $\frac{\pi}{2}$  übergeht.

Man erkennt, daß hiernach zunächst für die Mitte  $M$  eines Kontinents die Voraussetzung der Flächenform genügt, indem selbst für Australien mit  $a = 0,26 R$  der Quotient  $D : 2a = 1 : 830$  als verschwindend zu betrachten ist.

Aber auch anderwärts genügt die Annahme der Flächenform. So ist offenbar am Rande der Fehler in  $v$  ungefähr nur halb so groß wie in der Mitte; da nun  $v$  selbst nach dem Rande zu abnimmt, speziell für  $b = a$  aus (3\*) S. 315 sich zu  $4k^2 \Theta D a$  ergibt, so ist hier verhältnismäßig der Fehler etwa derselbe wie in der Mitte. In runder Zahl sind somit  $v$  und  $h$ , wie sie für die Kontinente aus der Annahme der Flächenform hervorgehen, nicht über  $1/1000$  des Wertes fehlerhaft.

Es ist ferner leicht einzusehen, daß  $v$  und  $h$  wenig verändert werden, wenn die Küste anstatt steil abfallend, flach abgeböschet vorausgesetzt wird.

Aber die Lotstörungen an der Küste hängen von deren Form sehr wesentlich ab.

Betrachten wir zunächst einen cylindrischen Kontinent, so genügt zur Berechnung der Lotstörung  $A_i$  die Formel (7) des § 19 S. 316, so lange  $P_i$  um einige Vielfache der Dicke  $D$ , etwa um  $3D$ , vom Rande entfernt ist. Wir können nämlich  $P_i$  immer zum Mittelpunkt der Deckfläche eines Cylinders machen, der den Kontinent



gerade am Rande berührt; derselbe ist in Fig. 48 schraffiert. Die Horizontalanziehung dieses Cylinders ist null; ebenso auch, wenn die Masse auf die Deckfläche kondensiert wird.

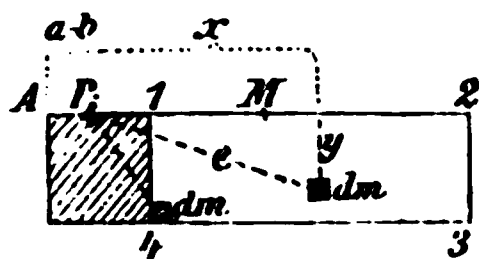


Fig. 48.

Einen Fehler gibt also nur die Kondensation außerhalb liegender Massenteilchen. Z. B. wird für das in Fig. 48 angedeutete Teilchen  $dm$  bei Punkt 4 die Horizontalanziehung gleich

$$k^2 dm \cdot \frac{a-b}{e^3} \text{ d. i. } \frac{k^2 dm}{9 D^2 \sqrt{1 + \frac{1}{9}}},$$

wenn  $a - b = 3D$  angenommen wird. Die Kondensation setzt dafür

$$\frac{k^2 dm}{9 D^2}$$

mit dem Fehler

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{k^2 dm}{9 D^2}. \quad (3)$$

Derselbe beträgt also hier  $\frac{1}{6}$  des Wertes oder 17%.

Er ist aber für alle anderen Teilchen kleiner. Fassen wir alle Massenelemente ins Auge, welche von dem Rechteck 1.2.3.4, Fig. 48 und 49, und dem unendlich benachbarten 1'.2'.3'.4', dessen Ebene durch  $P_1$  führt und mit derjenigen des erstgenannten den Winkel  $d\varphi$  bildet, begrenzt werden, so ist deren Horizontalanziehung gleich dem über die Fläche 1.2.3.4 zu erstreckenden Doppelintegral

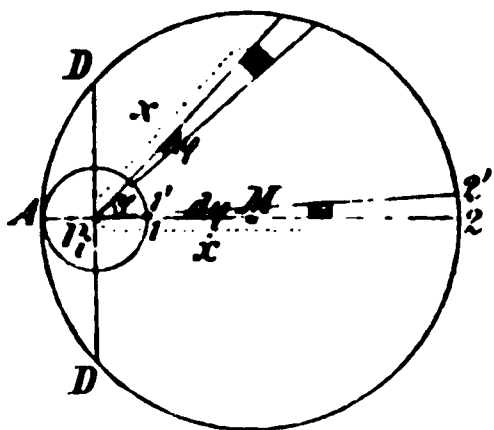


Fig. 49.

$$k^2 \Theta d\varphi \iint \frac{x^2 dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

indem mit Rücksicht auf Figur 48  $dm = \Theta x d\varphi dx dy$  wird. Die Integration nach  $y$  giebt hieraus

$$k^2 \Theta D d\varphi \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + D^2}},$$

wobei die Integration von  $x = x_1$  bis  $x_2$  zu erstrecken ist. Unter dem Integralzeichen kann man aber setzen

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + D^2}} = \frac{1}{x} - \frac{D^2}{2x^3} + \dots$$

und hiermit geht der vorige Ausdruck über in:

$$k^2 \Theta D d\varphi \left\{ \log \text{nat} \frac{x_2}{x_1} - \frac{D^2}{4} \left( \frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} \right) + \dots \right\}.$$

Dagegen ergibt sich als Horizontalanziehung nach erfolgter Kondensation der Masse:

$$k^2 \Theta D d\varphi \log \text{nat} \frac{x_2}{x_1};$$

der begangene Fehler ist somit im Verhältnis zur Anziehung angenähert gleich

$$\frac{1}{4} \frac{D^2}{x_1^2} - \frac{1 - \frac{x_1^2}{x_2^2}}{\log \text{nat} \frac{x_2}{x_1}}. \quad (4)$$

Ganz denselben Ausdruck erhält man für den Fehler der in die Richtung von  $AP_iM$  fallenden Komponente der Anziehung der Masse zwischen zwei unendlich benachbarten Schnitten in irgend einem Richtungsunterschied  $\varphi$  gegen die durch  $AP_iM$  gelegte Ebene 1.2.3.4. Für Teile rechter Hand von der zu  $AP_iM$  normalen Linie  $DD$ , Fig. 49, ist aber der Fehler von entgegengesetztem Zeichen, wie für Teile linker Hand. Wir unterschätzen hiernach den Gesamtfehler keinesfalls, wenn wir nur die einflussreichere rechte Seite betrachten.

$x_1$  ist nun zufolge unserer Annahme überall gleich  $3D$ ;  $x_2$  nimmt ab mit der Annäherung der Schnitte an die zu  $AM$  normale Lage. Für  $DD$  ist  $x_2$  am kleinsten, aber selbst für Australien noch rund  $50D$ ; denn es ist hier  $2a$  rund  $830D$  und  $x_2$  somit für Punkt  $D$  nahezu gleich  $\sqrt{3D \cdot 830D}$ . Daraus erkennt man ohne Schwierigkeit, daß der Gesamtfehler in keinem Falle 1% überschreitet.

Wir dürfen daher für jeden der in § 18 S. 313 aufgeführten Kontinente die Lotstörung  $A_i$  nach der Formel (7) des § 19 S. 316 berechnen, solange  $P_i$  von der Küste des cylindrisch gedachten Kontinents um mindestens  $3D$ , d. i. 12 Kilometer, absteht. Bei größerer Annäherung an die Küste wächst der Fehler der Formel (7) rasch und wird schließlich unendlich groß.

§ 22. Die Lotstörung an der Küste eines cylindrischen Kontinents. Fig. 50 stelle die Deckfläche des Cylinders vor, für deren Randpunkt  $A$  die Lotstörung zu berechnen ist. Die Tiefe eines Massenelementes  $dm$  unter der Deckfläche sei mit  $y$  bezeichnet. Dann ist seine in Richtung  $AM$  fallende Komponente der Horizontalanziehung, wenn  $dm = \Theta x d\varphi dx dy$  gesetzt wird, gleich:

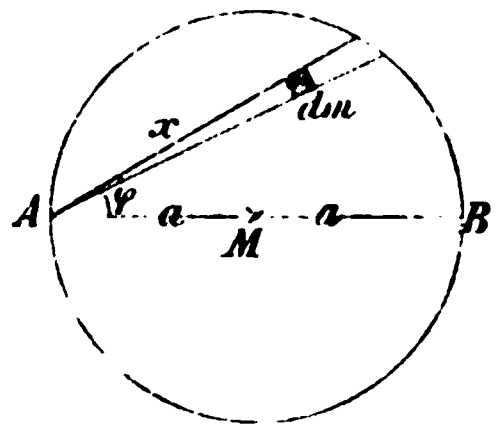


Fig. 50.

$$k^2 \Theta \cos \varphi d\varphi \frac{x^2 dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}. \quad (1)$$

Integrieren wir zunächst nach  $y$  von null bis  $D$ , so folgt hieraus:

$$k^2 \Theta D \cos \varphi d\varphi \frac{dx}{\sqrt{x^2 + D^2}}.$$

Die weitere Integration nach  $x$  von null bis  $s_\varphi$ , welches letztere Symbol die Sehne von  $A$  aus in der durch  $\varphi$  markierten Richtung bezeichnet, giebt:

$$k^2 \Theta D \cos \varphi \log \text{nat} \left( \sqrt{1 + \frac{s_\varphi^2}{D^2}} + \frac{s_\varphi}{D} \right) d\varphi.$$

Setzen wir hierin  $s_\varphi = 2a \cos \varphi$  und integrieren endlich nach  $\varphi$  von  $-\frac{\pi}{2}$  bis  $+\frac{\pi}{2}$ , so ergibt sich die gesuchte Horizontalanziehung in Richtung  $AM$  gleich

$$2k^2 \Theta D \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \log \text{nat} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{2a \cos \varphi}{D} \right)^2} + \frac{2a \cos \varphi}{D} \right) d\varphi. \quad (2)$$

Durch partielle Integration läßt sich dieses leicht auf vollständige elliptische Integrale 1. und 2. Gattung hinführen. Indessen ist es mit Rücksicht auf den großen Betrag von  $2a:D$  vorzuziehen, die numerische Auswertung an eine wie folgt abzuleitende Näherungsformel zu knüpfen.

Wir betrachten zunächst das obige Integral zwischen den Grenzen  $\varphi$  gleich null und  $\arccos \delta$ , und denken uns unter  $\delta$  hierbei einen kleinen Bruch im Betrage  $1/100$ . Da nun selbst für den kleinsten der Kontinente, Australien,  $2a = 830 D$  ist, so beträgt innerhalb jener Grenzen der kleinste Wert von  $2a \cos \varphi : D$  immer noch mehr als 8, sodaß man auf die Wurzel im Logarithmanden eine Reihenentwicklung anwenden kann. Dieselbe giebt:

$$\begin{aligned} & \log \text{nat} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{2a \cos \varphi}{D} \right)^2} + \frac{2a \cos \varphi}{D} \right) \\ &= \log \text{nat} \left\{ \frac{4a \cos \varphi}{D} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{D}{2a \cos \varphi} \right)^2 + \dots \right] \right\}, \end{aligned}$$

wofür man ausreichend genau

$$\log \text{nat} \frac{4a \cos \varphi}{D}$$

nehmen kann, indem die dabei stattfindende Vernachlässigung den Logarithmus höchstens um etwa  $1/750$  seines Wertes beeinflusst.

Hiernach darf man für das in (2) auftretende Integral zwischen den Grenzen  $\varphi$  gleich null und  $\arccos \delta$  setzen:

$$\int_0^{\arccos \delta} \cos \varphi \log \text{nat} \frac{4a \cos \varphi}{D} d\varphi, \quad (3)$$

oder für  $\sin \varphi = u$ :

$$\int_0^{\sqrt{1-\delta^2}} \log \text{nat} \frac{4a}{D} \sqrt{1-u^2} du.$$

Zerlegt man den Logarithmus in

$$\log \text{nat} \frac{4a}{D} + \frac{1}{2} \left( \log \text{nat} (1-u) + \log \text{nat} (1+u) \right)$$

und beachtet die Formel

$$\int_0^t \log \operatorname{nat} v \, dv = t (\log \operatorname{nat} t - 1),$$

welche sich unter Anwendung der Substitution  $\log \operatorname{nat} v = z$  einwurfsfrei herleiten läßt, so folgt ohne Schwierigkeit als Wert des betrachteten Integrales (3):

$$\sqrt{1 - \delta^2} \log \operatorname{nat} \frac{4a}{D} + \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - \delta^2}) [\log \operatorname{nat} (1 + \sqrt{1 - \delta^2}) - 1] \\ + \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - \delta^2}) [\log \operatorname{nat} (1 - \sqrt{1 - \delta^2}) - 1],$$

wofür man mit Rücksicht auf den Betrag  $\delta = 1/100$  völlig ausreichend genau setzen kann:

$$\log \operatorname{nat} \frac{4a}{D} + \log \operatorname{nat} 2 - 1,$$

oder

$$\log \operatorname{nat} \frac{8a}{D} - 1. \quad (4)$$

Hiermit geht (2), wenn man die obere Grenze  $\frac{\pi}{2}$  durch  $\arccos \delta$  ersetzt, über in

$$2k^2 \odot D (\log \operatorname{nat} \frac{8a}{D} - 1). \quad (5)$$

Abgesehen von den bisher erörterten unerheblichen Fehlern ist dies zu verbessern um

$$2k^2 \odot D \int_{\arccos \delta}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \log \operatorname{nat} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{2a \cos \varphi}{D} \right)^2} + \frac{2a \cos \varphi}{D} \right) d\varphi. \quad (6)$$

Der Wert des Logarithmus liegt innerhalb der Grenzen des Integrales zwischen

$$\log \operatorname{nat} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{2a\delta}{D} \right)^2} + \frac{2a\delta}{D} \right) \text{ und null.}$$

Der erste Grenzbetrag ist für Australien gleich 2,8 und daher in diesem Falle der Fehler (6) kleiner als

$$2k^2 \odot D \cdot 2,8 (1 - \sqrt{1 - \delta^2}),$$

was gegen (5) verschwindet. Auch für die größeren Kontinente ist der Ausdruck (5) völlig ausreichend.

Die Lotstörung am Rande wird also mit Rücksicht auf den Wert  $G = \frac{4}{3} \pi k^2 \odot_m R$  in Sekunden gleich

$$\varrho'' \frac{3\Theta}{2\Theta_m} \frac{D}{\pi R} \left( \log \operatorname{nat} \frac{8a}{D} - 1 \right) \cdot *) \quad (7)$$

Für  $3\Theta D : \Theta_m = 4000^m$  ist dies rund

$$20 \left( \log \operatorname{nat} \frac{8a}{D} - 1 \right). \quad (7^*)$$

§ 23. Berücksichtigung der Böschung an der Küste. Um die Einwirkung der Masse zu berücksichtigen, welche zu dem cylin-

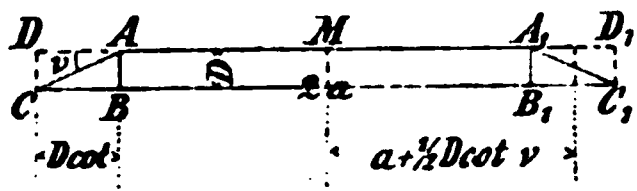


Fig. 51.

drischen Kontinent vom Radius  $a$  und der Dicke  $D$  im Falle einer Abböschung der Küste unter dem Winkel  $\nu$  hinzutritt, kann man in genügender Annäherung so ver-

fahren, daß man den Radius des zylindrischen Kontinents, wie es die rechte Seite von Fig. 51 punktiert andeutet, vergrößert auf

$$a' = a + \frac{1}{2} D \cot \nu. \quad (1)$$

Dieser Vorgang ist nicht ganz korrekt, aber bequem und für eine Schätzung ausreichend. Am größten wird der Fehler für den Küstenpunkt  $A$ , insbesondere in der Lotstörung und entsprechend im Krümmungsradius\*\*).

Die Lotstörung an der geböschten Küste in  $A$  berechnen wir genauer dadurch, daß wir 2 Werte ermitteln, zwischen welchen sie ziemlich genau in der Mitte liegen muß.

Den ersten Wert erhalten wir, indem wir die Horizontalanziehung des Cylinders  $ABA_1B_1$  vom Radius  $a$  vermindern um den absoluten Wert der Horizontalanziehung eines unendlich langen Prismas vom Querschnitt  $ABC$ , welches jenen Cylinder in  $AB$  tangiert. Eigentlich sollte der Kreisring  $(ABC - A_1B_1C_1)$  berücksichtigt werden; es wird daher der 1. Wert zu klein.

Den zweiten Wert erhalten wir, indem wir für  $A$  die Horizontalanziehung des Cylinders  $DCD_1C_1$  vom Radius  $a + D \cot \nu$  vermehren um den absoluten Wert der Horizontalanziehung eines unendlich langen Prismas vom Querschnitt  $ACD$ , welches jenen Cylinder in  $DC$  tangiert. Eigentlich sollte der Kreisring  $(ADC - A_1D_1C_1)$  berücksichtigt werden; es wird daher der 2. Wert zu groß.

Die Fehler in beiden Fällen halten sich sehr nahe das Gleichgewicht, weil die Anziehungen der von  $A$  entfernteren Teile beider

\*) Diese Formel wurde zur Kontrolle auch mittelst elliptischer Integrale aus (2) hergeleitet.

\*\*) Die Anlage von Böschungen an die Kontinente vermindert die mittlere Meerestiefe etwas; um wieder auf die bisher angenommene Meerestiefe zu kommen, wäre für ein Gefälle der Böschung gleich  $1/100$  der Betrag von  $D$  um 4% zu vergrößern, was wir aber im Hinblick auf andere Vernachlässigungen unterlassen.

Kreisringe ebenso wie diejenigen der entfernteren Teile beider unendlich langen Prismen nahezu gleich sind, wie aus der Gleichheit der Querschnitte und der räumlichen Lage folgt.

Nach S. 284 (5) und S. 286 (10) § 7 dieses Kapitels ist die Horizontalanziehung auf  $A$  in Richtung des Radius  $AM$  für das Prisma vom Querschnitt  $ABC$  gleich

$$- \varrho'' \frac{3\Theta}{2\Theta_m} \frac{D}{\pi R} \log \operatorname{nat} \sin \nu, \quad (2)$$

für das Prisma vom Querschnitt  $ACD$  dagegen gleich

$$\varrho'' \frac{3\Theta}{2\Theta_m} \frac{D}{\pi R} \nu \cot \nu. \quad (3)$$

Der erstere Wert ist von dem Ausdruck (7) bzw. (7\*) S. 324 abzuziehen, der letztere zu (7) S. 316 zu addieren, nachdem darin anstatt  $a$  der Wert  $a + D \cot \nu$  eingeführt ist. Damit folgt als 1. Wert:

$$\varrho'' \frac{3\Theta}{2\Theta_m} \frac{D}{\pi R} \left( \log \operatorname{nat} \frac{8a \sin \nu}{D} - 1 \right), \quad (4)$$

und als 2. Wert:

$$\varrho'' \frac{3\Theta}{2\Theta_m} \frac{D}{\pi R} \left\{ 2 \frac{K(x) - E(x)}{x} + \nu \cot \nu \right\} \quad (5)$$

für

$$x = \frac{a}{a + D \cot \nu}. \quad (6)$$

Aus den Ergebnissen (4) und (5) ist das arithmetische Mittel zu nehmen. Die beiden Werte (4) und (5) weichen übrigens von einander nicht sehr ab, am meisten für flache Böschungen und kleine  $a$ . Da nach § 21 S. 321 der 2. Wert (5) nur brauchbar ist, so lange  $\cot \nu \geq 3$  bleibt, so kann man in (5)  $\nu \cot \nu = 1$  setzen.

Zu den Formeln (4) und (5) ist für  $3\Theta D : \Theta_m = 4000''$  mit derselben Abrundung wie bei (7\*) S. 318 und S. 324:

$$\varrho'' \frac{3\Theta}{2\Theta_m} \frac{D}{\pi R} = 20. \quad (7)$$

**§ 24. Der Einfluß der Krümmung der Meeresfläche auf die Formeln der vorhergehenden Entwicklungen.** Wir betrachten die Kontinente jetzt wieder als Flächen, auf welchen die Massen kondensiert sind und nehmen wie früher als Masse für die Flächeneinheit  $\Theta D$ . Diese kreisförmigen, die Kontinente vorstellenden Flächen denken wir uns auf einer Kugelfläche vom Radius  $R$ , dem Repräsentanten der ungestörten Erdoberfläche, aufliegend und bezeichnen den sphärischen Radius  $MA$ , Fig. 45 S. 314, mit  $a$ . Der Flächeninhalt eines sphärischen Kreises vom Radius  $a$ , ist aber gleich

$$2\pi R^2 \left(1 - \cos \frac{a_s}{R}\right) = 4\pi R^2 \sin^2 \frac{a_s}{2R} \quad (1)$$

oder näherungsweise

$$\pi a_s^2 \left(1 - \frac{a_s^2}{12R^2} + \dots\right). \quad (1^*)$$

Bisher wurden die Kontinente als ebene Flächen vom Radius  $a$  betrachtet; bezeichnen wir den letzteren jetzt mit  $a_e$  und nehmen für die ebene und sphärische Kreisfläche *gleichen Inhalt*, so muß sein

$$a_e = 2R \sin \frac{a_s}{2R} \quad (2)$$

oder näherungsweise

$$a_e = a_s \left(1 - \frac{a_s^2}{24R^2} + \dots\right). \quad (2^*)$$

Erheblich ist also selbst für Europa-Asien der Unterschied der Radien  $a_e$  und  $a_s$  nicht; denn indem hier rund  $a : R = 2/3$  ist, wird er nur knapp 2%. Wir werden daher auch weiterhin in den Endformeln keinen Unterschied zwischen  $a_e$  und  $a_s$  zu machen brauchen.

Das Potential der sphärischen Fläche auf ihren Mittelpunkt  $M$  ist nach S. 145 (2) gleich

$$2\pi k^2 \Theta D \cdot 2R \sin \frac{a_s}{2R}. \quad (3)$$

Führen wir den ebenen Radius mittelst (2) ein, so folgt

$$2\pi k^2 \Theta D a_e. \quad (3^*)$$

Vergleicht man dies mit (3\*) S. 315, worin  $E\left(\frac{b}{a}\right)$  wegen  $b = \text{null}$  gleich  $\frac{\pi}{2}$  ist, so erkennt man, daß der Potentialwert für die Mitte  $M$  durch die ebene Rechnung genau richtig erhalten wird.

Wir entwickeln nunmehr das Potential für einen Randpunkt  $A$ , legen aber die Entwicklung so an, daß sie im ersten Teile auch für einen äußeren Punkt  $P_a$  paßt.

Den Punkt  $P_a$  nehmen wir als Pol eines sphärischen Polarkoordinatensystems;  $z$  sei die sphärische Entfernung eines Flächenelementes  $dq$ , Fig. 52. Wir haben

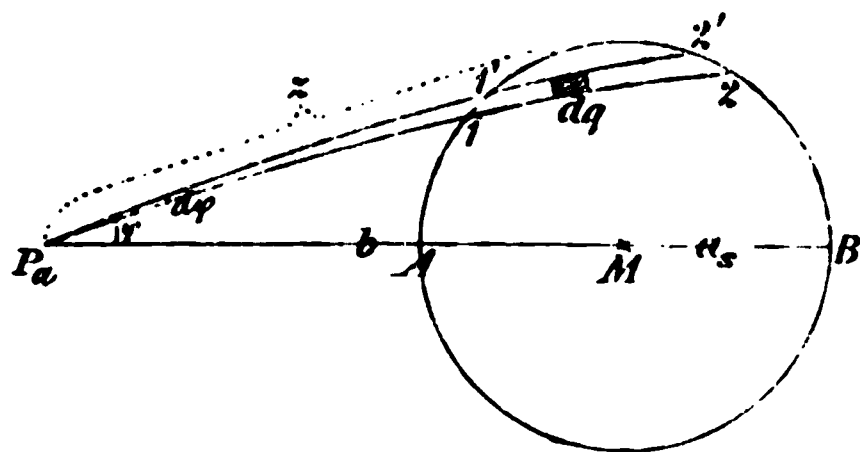


Fig. 52.

haben

$$dq = R \sin \frac{z}{R} d\varphi \cdot dz$$

und seine gerade Entfernung von  $P_a$  gleich  $2R \sin \frac{z}{2R}$ , mithin das Potential der auf  $dq$  lagernden Masse gleich

$$k^2 \Theta D \cos \frac{z}{2R} d\varphi dz.$$

Integriert man zunächst nach  $z$  vom Punkte 1 bis Punkt 2, so folgt

$$2k^2 \Theta D R \left( \sin \frac{z_2}{2R} - \sin \frac{z_1}{2R} \right) d\varphi \quad (4)$$

als Potential des Flächenstreifens 1.1'.2.2', Fig. 52.

Verlegen wir  $I'_a$  nach  $A$ , so gilt der Ausdruck (4) noch; er geht dann über in

$$2k^2 \Theta D R \sin \frac{z_2}{2R} d\varphi. \quad (5)$$

Dabei ist

$$\tan \frac{z_2}{2R} = \tan \frac{a_s}{R} \cos \varphi \quad (6)$$

und hieraus mit Hilfe des bekannten Überganges von  $\tan$  zu  $\sin$ :

$$\sin \frac{z_2}{2R} = \frac{\sin \frac{a_s}{R} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{a_s}{R} \sin^2 \varphi}}. \quad (7)$$

Als Ausdruck für das Potential in  $A$  folgt somit, da (5) von  $-\frac{\pi}{2}$  bis  $+\frac{\pi}{2}$  zu integrieren ist:

$$4k^2 \Theta D R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \frac{a_s}{R}}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{a_s}{R} \sin^2 \varphi}} d(\sin \varphi). \quad (8)$$

Man hat aber als unbestimmtes Integral hierzu den Ausdruck  $\arcsin \left( \sin \frac{a_s}{R} \sin \varphi \right)$ , abgesehen von einer Konstanten; somit ergibt die Integration den gesuchten Potentialwert gleich

$$4k^2 \Theta D a_s. \quad (9)$$

Ganz dasselbe giebt (3\*) S. 315, nur bedeutet dort  $a$  den ebenen Radius  $a_e$ . Indem wir mit diesem rechnen, wird der Potentialwert für den Randpunkt  $A$  im Verhältnis  $a_e : a_s$  zu klein erhalten; vergl. (2\*) oben. Der Fehler der ebenen Rechnung ist also für Europa-Asien knapp 2%.

Um auch den Fehler in der Lotstörung am Rande zu schätzen, bilden wir die Horizontalanziehung der in  $d\varphi$  lagernden Masse auf den Punkt  $I'_a = A$  in Richtung nach  $M$ . Sie ist gleich

$$k^2 \Theta D \cos \varphi d\varphi \frac{\cos^2 \frac{z}{2R}}{\sin \frac{z}{2R}} d\left(\frac{z}{2R}\right),$$

oder in Reihenentwicklung:

$$k^2 \Theta D \cos \varphi d\varphi \left\{ \frac{dz}{z} - \frac{5}{24} \frac{z dz}{R^2} + \dots \right\}.$$



Fällt  $P_a$  nach  $A$ , so würde die Integration nach  $z$  unendlich geben, wenn wir von  $z = \text{null}$  an integrieren wollten. Nehmen wir anstatt null einen sehr kleinen Wert  $z_0$ , so folgt

$$k^2 \Theta D \cos \varphi \, d\varphi \left\{ \log \text{nat} \frac{z_2}{z_0} - \frac{5}{48} \frac{z_2^2}{R^2} + \dots \right\} \quad (10)$$

mit Vernachlässigung von  $z_0^2 : R^2$ .

Eine ebene Scheibe, in welcher die Entfernungen von  $P_a = A$  mit  $e$  bezeichnet werden, giebt

$$k^2 \Theta D \cos \varphi \, d\varphi \left\{ \log \text{nat} \frac{e_2}{e_0} \right\}. \quad (11)$$

Durch Subtraktion von (10) und (11) folgt:

$$k^2 \Theta D \cos \varphi \, d\varphi \left\{ \log \text{nat} \left( \frac{z_2}{e_2} \frac{e_0}{z_0} \right) - \frac{5}{48} \frac{z_2^2}{R^2} + \dots \right\}. \quad (12)$$

Hierin setzen wir  $e_0 : z_0 = 1$ , d. h. wir schließen um  $P_a = A$  in beiden Fällen kleine halbkreisförmige Elemente von der Anziehung aus, deren Anziehung auf  $A$  wegen  $e_0 = z_0$  als gleichwertig betrachtet werden darf. Außerdem haben wir als Wert von  $z_2 : e_2$  im Falle  $\varphi = \text{null}$  den Quotienten  $a_s : a_e$ , d. i. nach S. 326 (2\*) angenähert

$$1 + \frac{a^2}{24 R^2}.$$

$\log \text{nat} (z_2 : e_2)$  wird demnach für  $\varphi = \text{null}$  angenähert gleich  $a^2 : 24 R^2$ . Dieses kleine Glied vernachlässigen wir in (12) gegen  $5 z_2^2 : 48 R^2$ , welcher Quotient für  $\varphi = \text{null}$  in  $5 a^2 : 12 R^2$  übergeht.

Wir können ebenso für einen beliebigen Wert von  $\varphi$  den Betrag des  $\log \text{nat}$  in (12) gegen das 2. Glied vernachlässigen und erhalten,  $z_2 = 2a \cos \varphi$  setzend, in hinreichender Annäherung anstatt (12) den Ausdruck:

$$- \frac{5}{12} k^2 \Theta D \frac{a^2}{R^2} \cos^3 \varphi \, d\varphi.$$

Beachten wir nun, daß  $\cos^3 \varphi = \frac{3}{4} \cos \varphi + \frac{1}{4} \cos 3\varphi$  ist, so giebt die Integration dieses Ausdrucks von  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  bis  $+\frac{\pi}{2}$  leicht:

$$- \frac{5}{9} k^2 \Theta D \frac{a^2}{R^2}.$$

Um die Wirkung dieses Fehlers in der ohne Rücksicht auf die Krümmung der Erde berechneten Horizontalanziehung auf den Randpunkt  $A$  in der Lotstörung zu erhalten, dividieren wir mit  $G = \frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R$  und erhalten den Fehler der Lotstörung für  $A$  in Sekunden gleich

$$- \frac{5 \varphi''}{18} \frac{3 \Theta}{2 \Theta_m} \frac{D}{\pi R} \frac{a^2}{R^2}$$

d. i. nahezu

$$- \frac{5 a^2}{R^2} \text{ Sekunden.} \quad (13)$$

Dieser Betrag würde als Verbesserung an der nach § 22 (7) S. 324 mit  $a = a_0$  berechneten Lotstörung anzubringen sein, um den Lotstörungswert am Rande der sphärischen Scheibe vom Radius  $a_0$  zu erhalten.

Für Europa-Asien ist derselbe gleich  $2''$ , also nicht sehr erheblich. Auch kompensiert sich dieser Fehler zum Teil mit einem entgegengesetzten, der bei Anwendung der Näherungsmethode des § 23 entsteht.

Die Krümmung der Erde kann hiernach bei der Berechnung der Störungswirkungen selbst bei dem größten der Kontinente außer acht bleiben, so lange nur Punkte innerhalb, oder auch außerhalb nahe der Küste, in betracht gezogen werden.

Bei der weiterhin folgenden numerischen Auswertung ist allerdings ein nicht mehr zu beseitigendes Versehen in der Weise begangen worden, daß die ebenen Entfernungen  $a_0$ , für welche Erhebungen  $h$  berechnet wurden, bei der Zusammenstellung ohne Vergrößerung als sphärische betrachtet worden sind, was einer Deformation der gestörten Niveaufläche in der Nähe der Küste im Sinne einer Verschiebung nach dem Zentrum  $M$  entspricht. Es äußert sich dieses Versehen indessen wesentlich nur bei den Kontrollrechnungen, auf welche wir weiterhin geführt werden.

§ 25. Die störende Wirkung der Kontinente in größerem Abstände vom Zentrum  $M$  kann nach der Annahme, daß alle Masse in  $M$  konzentriert sei, hinreichend genau ermittelt werden, sobald der zu dem Abstände  $P_a M$ , Fig. 53, gehörende Zentriwinkel  $\gamma$  am Kugelmittelpunkte  $C$  mindestens nahezu  $90^\circ$  beträgt. Die Masse ist  $a^2 \pi \Theta D$ , die Entfernung  $P_a M$  gleich  $2R \sin \frac{\gamma}{2}$ , folglich das Potential nach dieser Annahme gleich

$$v_a = \pi k^2 \Theta \frac{a^2 D}{2R \sin \frac{\gamma}{2}}, \quad (1)$$

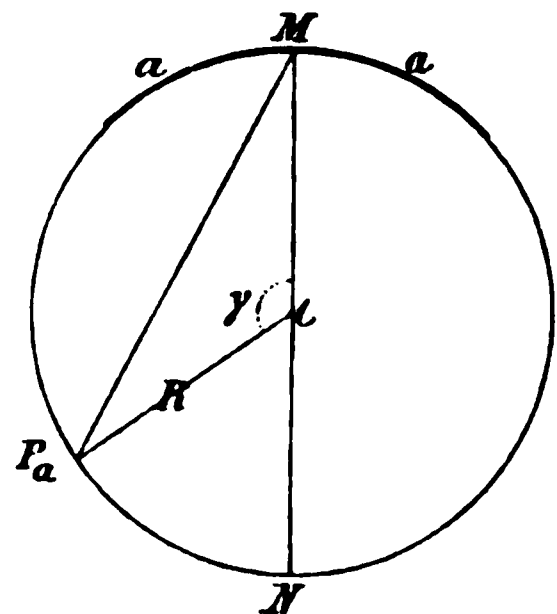


Fig. 53.

die zugehörige Erhebung der gestörten Niveaufläche über die ungestörte also gleich

$$h_a = \frac{3\Theta}{8\Theta_m} \frac{a^2 D}{R^2 \sin \frac{\gamma}{2}}, \quad (2)$$

oder für  $3\Theta D : \Theta_m = 4000^m$

$$h_a = \frac{500 a^2}{R^2 \sin \frac{\gamma}{2}}. \quad (2^*)$$

Die Lotstörung, welche hierzu gehört, wird gleich

$$\Lambda_a = - \varrho'' \frac{dh_a}{R d\gamma} = \varrho'' \frac{3\Theta}{16\Theta_m} \frac{a^2 D}{R^3 \sin \frac{\gamma}{2} \tan \frac{\gamma}{2}}, \quad (3)$$

in Sek.

mithin für  $3\Theta D : \Theta_m = 4000''$

$$\Lambda_a = \frac{8a^2}{R^2 \sin \frac{\gamma}{2} \tan \frac{\gamma}{2}}. \quad (3^*)$$

in Sek.

Diese Lotstörung ist für  $\gamma > 90^\circ$  sehr gering, insbesondere für Europa-Asien bei  $\gamma = 90^\circ$  nur  $5''$ . Da bis  $\gamma = 180^\circ$  dieser geringe Betrag ganz allmählich auf null sinkt, so ist auch die Störung in  $\varrho$  ganz unerheblich (selbst für Europa-Asien nur ca.  $200''$ ) und braucht hier nicht weiter untersucht zu werden.

Um die Genauigkeit dieser Formeln, welche eben nur für

$$\gamma \geq 90^\circ \quad (4)$$

Anwendung finden sollen, zu erkennen, berechnen wir  $v_a$  strenger für  $\gamma = 90^\circ$ . Aus der Entwicklung des § 24 S. 327 läßt sich der Ausdruck für  $v_a$  leicht herleiten. Wir setzen dabei identisch in (4) a. a. O.:

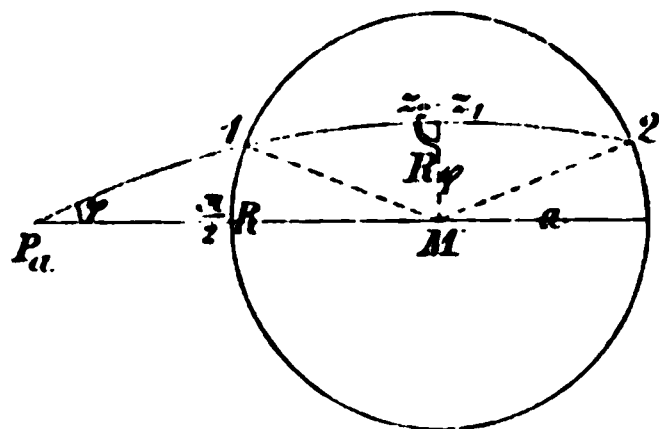


Fig. 54.

$$\sin \frac{z_2}{2R} - \sin \frac{z_1}{2R} = 2 \sin \frac{z_2 - z_1}{4R} \cos \frac{z_2 + z_1}{4R}. \quad (5)$$

Wenn aber in Fig. 54  $P_a M$  gleich dem Quadranten eines größten Kreises ist, so ist auch  $(z_2 + z_1) : 2$  so groß und daher

$$\cos \frac{z_2 + z_1}{4R} = \cos 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Außerdem ist nach Fig. 54:

$$\cos \frac{z_2 - z_1}{2R} = \frac{\cos \frac{a}{R}}{\cos \varphi},$$

somit

$$\sin \frac{z_2 - z_1}{4R} = \sqrt{\frac{\cos \varphi - \cos \frac{a}{R}}{2 \cos \varphi}}.$$

Hiermit erhält man aus der Gleichung (4) S. 327 durch Integration, da  $R\varphi$  zwischen  $-a$  und  $+a$  liegt:

$$v_a = 4k^2 \Theta D R \int_0^{\frac{a}{R}} \sqrt{\frac{\cos \varphi - \cos \frac{a}{R}}{\cos \varphi}} d\varphi. \quad (6)$$

Um diesen Ausdruck zu integrieren, setzen wir darin für  $\cos \varphi$  den Ausdruck  $1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$  und entsprechend für  $\cos \frac{a}{R}$ . Wir führen zugleich eine neue Variable mittelst der Relation

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{a}{2R} \sin \psi$$

ein und erhalten

$$v_a = 8 \sqrt{2} k^2 \Theta D R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \frac{a}{2R} \cos^2 \psi d\psi}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2R} \sin^2 \psi} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{a}{2R} \sin^2 \psi}}. \quad (7)$$

Die Integration läßt sich jetzt in genügender Genauigkeit durch Reihenentwicklung bewirken. Wir setzen

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2R} \sin^2 \psi} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{a}{2R} \sin^2 \psi}} = 1 + \frac{3}{2} \sin^2 \frac{a}{2R} \sin^2 \psi + \dots$$

und beachten die Relationen:

$$\begin{aligned} \cos^2 \psi &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\psi \\ \cos^2 \psi \sin^2 \psi &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4\psi. \end{aligned}$$

Damit wird

$$v_a = 2 \sqrt{2} \pi k^2 \Theta D R \sin^2 \frac{a}{2R} \left( 1 + \frac{3}{8} \sin^2 \frac{a}{2R} + \dots \right). \quad (8)$$

Um dieses mit Formel (1) vergleichen zu können, müssen wir da- selbst  $\sin \frac{\gamma}{2} = \sin 45^\circ = 1 : \sqrt{2}$  setzen, außerdem aber noch in (8) anstatt des sphärischen Radius  $a$  den ebenen einführen, welcher in (1) figurirt. Mit Rücksicht auf die Relation (2) S. 326 geht (8) über in

$$v_a = \pi k^2 \Theta \frac{a^2 D}{R \sqrt{2}} \left( 1 + \frac{3a^2}{32R^2} + \dots \right), \quad (8^*)$$

wenn  $a$  den ebenen Radius bezeichnet. Der Fehler der Formel (1) wird in Bruchteilen von  $v_a$  hiernach durch  $3a^2 : 32R^2$  bezeichnet, d. i. für Europa-Asien  $4\%$ . Dieser Betrag kann als unerheblich angesehen werden.

Berechnet man  $v_a$  endlich noch für  $\gamma = 180^\circ$ , was keine Schwierigkeit bereitet, so findet man

$$v_a = 8 \pi k^2 \Theta D R \sin^2 \frac{a}{4R},$$

worin  $a$  der sphärische Radius ist. Durch Einführung des ebenen Radius, sowie durch Reihenentwicklung folgt

$$v_a = \pi k^2 \odot D \frac{a^2}{2R} \left( 1 + \frac{a^2}{16R^2} + \dots \right). \quad (9)$$

Die Formel (1) giebt also hier  $a^2 : 16R^2$  Bruchteile von  $v_a$  zu wenig, d. i. für Europa-Asien  $3\%$ .

§ 26. **Berücksichtigung der Schwerpunktsverschiebung.** Durch Hinzutritt eines Kontinents zu einer  $4000^m$  hoch mit Wasser bedeckten Kugel vom Radius  $R$  entsteht eine Schwerpunktsverschiebung. Bisher wurden die Lagenänderungen einer Niveaufläche, die anfangs mit der Meeresfläche zusammenfällt, unter der Bedingung betrachtet, daß der Potentialwert nach Hinzutritt des Kontinents derselbe bleibt und von der Verschiebung der Wassermassen, deren Oberfläche eine Gleichgewichtsfläche, d. i. Niveaufläche, bleiben muß, abgesehen wird.

Indem wir uns die Erörterung dieses letzteren Punktes vorbehalten, beziehen wir jetzt die gestörte Niveaufläche nicht mehr auf ihre ungestörte Lage, sondern auf eine Kugel vom Radius  $R$ , deren Mittelpunkt mit der gestörten Schwerpunktslage  $S$  zusammenfällt, Fig. 55.

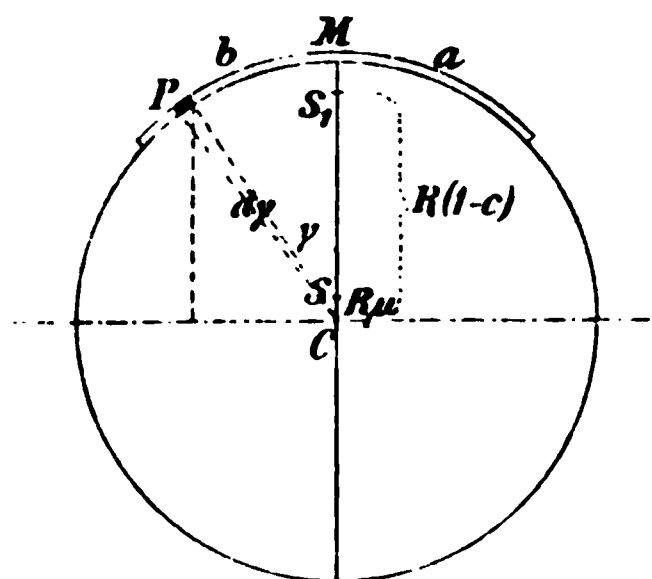


Fig. 55.

Zunächst ist die Schwerpunktsverschiebung zu ermitteln. Um dieses ausführen zu können, bestimmen wir die Lage des Schwerpunktes  $S_1$  des Kontinentes, den wir hierbei als sphärische Kreisfläche vom Radius  $a$  auf der Kugel vom Radius  $R$  mit dem Mittelpunkt  $C$  ansehen. Dieser

Schwerpunkt  $S_1$  liegt jedenfalls auf dem zentralen Radius  $CM$ . Senkrecht zu diesem letzteren legen wir durch  $C$  eine Ebene, für welche wir die statischen Momente aufstellen. Ein zu  $M$  konzentrisches, ringförmiges Element der sphärischen Kreisfläche vom Radius  $R\gamma$  und der Breite  $Rd\gamma$ , welches in Fig. 55 bei  $P$  im Durchchnitt angedeutet ist, hat das Moment

$$2\pi R^2 \sin \gamma \, d\gamma \cdot R \cos \gamma.$$

Die Integration von  $\gamma = \text{null}$  bis  $\frac{a}{R}$  giebt das statische Moment der ganzen Fläche gleich

$$\frac{\pi}{2} R^3 \left( 1 - \cos \frac{2a}{R} \right) \text{ d. i. } \pi R^3 \sin^2 \frac{a}{R}. \quad (1)$$

Diesem Werte muß das Moment des in  $S_1$  vereinten Flächeninhalts gleich sein. Bezeichnen wir die Entfernung  $S_1C$  mit  $R(1-c)$ , so ist das Moment mit Rücksicht auf S. 326 (1) gleich:

$$4\pi R^2 \sin^2 \frac{a}{2R} \cdot R(1-c). \quad (2)$$

Die Vergleichung der Ausdrücke (1) und (2) führt zu der Relation

$$1 - c = \cos^2 \frac{a}{2R} = 1 - \sin^2 \frac{a}{2R}. \quad (3)$$

Hierin ist  $a$  der sphärische Radius. Führen wir den ebenen ein, nach (2) S. 326, so folgt

$$1 - c = 1 - \frac{a^2}{4R^2}, \quad (3^*)$$

wobei der Ausdruck rechter Hand nicht abgebrochen, sondern geschlossen ist.

Ist nun  $S$  der Schwerpunkt des gesamten Massenkomplices, und wird  $SC$  mit  $R\mu$  bezeichnet, so folgt aus der Gleichsetzung der statischen Momente bezüglich des Punktes  $S$ , wenn die Masse des Kontinentes jetzt mittelst des ebenen Radius  $a$  ermittelt wird:

$$\pi a^2 D \Theta \cdot (1 - c - \mu) = \frac{4}{3} \pi R^3 \Theta_m \cdot \mu,$$

woraus in hinreichender Annäherung mit Rücksicht auf (3\*) hervorgeht:

$$R\mu = \frac{3\Theta}{4\Theta_m} \frac{a^2 D}{R^2} (1 - c - \mu) = \frac{3\Theta}{4\Theta_m} \frac{a^2 D}{R^2} \left(1 - \frac{a^2}{4R^2}\right). \quad (4)$$

Für  $3\Theta D : \Theta_m = 4000^m$  wird

$$R\mu = 1000 \frac{a^2}{R^2} \left(1 - \frac{a^2}{4R^2}\right). \quad (4^*)$$

Ein Punkt  $P$  der Kugel vom Radius  $R$  konzentrisch zu  $C$ , Fig. 55, hat von  $S$  sehr nahe den radialen Abstand

$$R(1 - \mu \cos \gamma).$$

Die Verschiebung des Kugelmittelpunktes nach  $S$  erzeugt somit in den Erhebungen  $h_i$  und  $h_a$  der gestörten Niveaufläche Änderungen im Betrage von

$$- R\mu \cos \gamma, \quad (5)$$

oder, wenn für  $R\mu$  Ausdruck (4\*) gesetzt und zugleich  $b : R$  für  $\gamma$  geschrieben wird, Änderungen im Betrage von:

$$- 1000 \frac{a^2}{R^2} \left(1 - \frac{a^2}{4R^2}\right) \cos \frac{b}{R}. \quad (5^*)$$

Die entsprechende Änderung der Lotstörung ist in Sekunden gleich:

$$\varphi'' R\mu \frac{d \cos \gamma}{R d \gamma},$$

d. i.

$$- \varphi'' \mu \sin \gamma, \quad (6)$$

oder mit Rücksicht auf (4\*) rund

$$- 30 \frac{a^2}{R^2} \left(1 - \frac{a^2}{4R^2}\right) \sin \frac{b}{R}. \quad (6^*)$$

§ 27. Mittelwert der Erhebungen  $h_i$  für einen Kontinent. Nach S. 315 (5) und (4) ist zunächst ohne Rücksicht auf die Schwerpunktsverschiebung die Erhebung der gestörten Niveaufläche innerhalb eines Kontinents

$$h_i = \frac{3\Theta}{\Theta_m} \frac{aD}{\pi R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad (1)$$

wenn  $b$  der Abstand des betreffenden Punktes vom Zentrum  $M$  ist. Indem wir nun den Kontinent als ebene, kreisförmige Fläche auffassen, wie das auch bei Entwicklung der Formel (1) geschah, haben wir die Anzahl der  $h_i$  für einen ebenen, ringförmigen Streifen vom Radius  $b$  und der Breite  $db$  proportional  $b db$  zu setzen, und es wird daher der Mittelwert von  $h_i$  gleich

$$\int_0^a h_i b db : \int_0^a b db. \quad (2)$$

Es ist aber

$$\int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi} \cdot b db d\varphi, \quad (3)$$

wenn man zuerst nach  $b$  integriert, was sehr leicht ausführbar ist, gleich

$$\frac{a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos^3 \varphi}{1 - \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Nun ist identisch

$$\frac{1 - \cos^3 \varphi}{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi} = \cos \varphi + \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Mit Rücksicht hierauf läßt sich das Integral sofort bilden und man erhält für (3) den Wert:

$$\frac{2a^2}{3}.$$

Hiermit findet man als Durchschnittswert der  $h_i$  für den ganzen Kontinent ohne Rücksicht auf die Schwerpunktsverschiebung

$$\frac{4\Theta}{\Theta_m} \frac{aD}{\pi R}. \quad (4)$$

Infolge der Schwerpunktsverschiebung tritt zu diesem Ausdruck der Durchschnittswert von (5) S. 333, für den Kontinent genommen, hinzu. Betrachten wir hierbei die Erdoberfläche wie bei Entwicklung dieses letzteren Ausdruckes als gekrümmt, so erhalten wir als Mittelwert

$$- R\mu \int_0^{a:R} \cos \gamma \sin \gamma d\gamma : \int_0^{a:R} \sin \gamma d\gamma ,$$

indem, vergl. S. 332 Fig. 55, für einen ringförmigen Streifen vom Inhalt  $2\pi R^2 \sin \gamma d\gamma$  der Ausdruck (5) konstant ist. Die Ausführung der Rechnung giebt, da der Integralquotient nach (3) S. 333 gleich  $1 - c$  ist:

$$- R\mu(1 - c),$$

d. i. nach (4) und (3\*) S. 333 gleich

$$- \frac{3\Theta}{4\Theta_m} \frac{a^2 D}{R^2} (1 - c)^2 \quad \text{oder} \quad - \frac{3\Theta}{4\Theta_m} \frac{a^2 D}{R^2} \left(1 - \frac{a^2}{4R^2}\right)^2. \quad (5)$$

(4) und (5) zusammen geben als Mittelwert der Erhebungen  $h_i$  für einen Kontinent mit Rücksicht auf die Schwerpunktsverschiebung:

$$\frac{4\Theta}{\Theta_m} \frac{a D}{\pi R} \left\{ 1 - \frac{3\pi a}{16R} \left(1 - \frac{a^2}{4R^2}\right)^2 \right\}. \quad (6)$$

Für  $3\Theta D : \Theta_m = 4000^m$  wird dies:

$$\frac{4a}{15000} \left\{ 1 - \frac{3\pi a}{16R} \left(1 - \frac{a^2}{4R^2}\right)^2 \right\}. \quad (6^*)$$

Diese Formel gilt zunächst nur für einen cylindrischen Kontinent; wird zur Berücksichtigung der Böschung anstatt  $a$  der vergrößerte Radius  $a'$  nach S. 324 (1) eingeführt, so giebt (6) bzw. (6\*) den Durchschnitt der Erhebungen über die Küste hinaus bis zu einer Stelle, welche vertikal über der Mitte der Abböschung liegt. Indessen kann man sich auch hier recht wohl mit diesen Formeln begnügen.

§ 28. Kleinste Erhebung der gestörten Niveafläche. Berücksichtigt man die Schwerpunktsverschiebung, so liegt die kleinste Erhebung nicht mehr diametral gegenüber der Mitte des Kontinents in  $M$ , sondern ungefähr bei einem Winkel  $\gamma = 90^\circ$ , wie der Augenschein lehrt.

Nehmen wir an, daß für die Stelle des Minimums die Formel (2) S. 329 noch ausreicht, so wird mit Rücksicht auf den Einfluß der Schwerpunktsverschiebung nach (5) S. 333 in hinreichender Annäherung

$$h_a = \frac{3\Theta}{8\Theta_m} \frac{a^2 D}{R^2} \left\{ \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} - 2 \cos \gamma \left(1 - \frac{a^2}{4R^2}\right) \right\}. \quad (1)$$

Differenziert man die Parenthese nach  $\gamma$  und setzt den Differentialquotienten gleich null, so wird als Bedingung des Minimums erhalten:

$$\frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} = 2 \sin \gamma \left(1 - \frac{a^2}{4R^2}\right),$$



oder reduziert:

$$8 \left(1 - \frac{a^2}{4R^2}\right) \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1, \text{ d. h. sehr nahe } \gamma = 60^\circ, \quad (2)$$

mit

$$(h_a)_{\min} = \frac{3\Theta}{8\Theta_m} \frac{a^2 D}{R^2} \left(1 + \frac{a^2}{4R^2}\right). \quad (3)$$

Wie wir später sehen werden, gilt die Formel (2) S. 329 in der That mit genügender Genauigkeit bis  $\gamma = 60^\circ$  auch noch für Europa-Asien, sodaß der Ausdruck (3) das Minimum ziemlich korrekt giebt.

Indem wir in (3)  $3\Theta D : \Theta_m = 4000^m$  einsetzen, wird

$$(h_a)_{\min} = 500 \frac{a^2}{R^2} \left(1 + \frac{a^2}{4R^2}\right). \quad (3^*)$$

§ 29. Zusammenstellung der Formeln für die Störungswirkungen eines Kontinents mit Rücksicht auf Schwerpunktsverschiebung.

Wir setzen hierbei sogleich  $3\Theta D : \Theta_m = 4000^m$ ; im einzelnen  $\Theta = 1,8$ ,  $D = 4000^m$ .  $a$  ist der ebene oder sphärische Radius des Kontinents,  $\nu$  sein Böschungswinkel, endlich [S. 324 (1)]

$$a' = a + 2000 \cot \nu. \quad (1)$$

Die Erhebung innerhalb von  $b = \text{null}$  bis  $a'$ , also bis zur Küste und noch etwas darüber hinaus bis zur Mitte der Böschung, folgt aus S. 315 (5\*) und S. 333 (5\*) gleich

$$h_a = a' \frac{E\left(\frac{b}{a'}\right)}{5000} - 1000 \frac{a'^2}{R^2} \left(1 - \frac{a'^2}{4R^2}\right) \cos \gamma. \quad (2)$$

Außerhalb in der Nähe der Küste, von  $b = a'$  an ist die Erhebung nach S. 318 (7\*):

$$h_a = b \frac{E\left(\frac{a'}{b}\right) - \left(1 - \frac{a'^2}{b^2}\right) K\left(\frac{a'}{b}\right)}{5000} - 1000 \frac{a'^2}{R^2} \left(1 - \frac{a'^2}{4R^2}\right) \cos \gamma, \quad (3)$$

wobei

$$\frac{\gamma}{\text{in Grad.}} = 90^\circ \frac{b}{R} = 0,009 h^m. \quad (3^*)$$

Von  $\gamma$  gleich  $90^\circ$  bis  $180^\circ$  ist nach S. 329 (2\*)

$$h_a = 500 \frac{a'^2}{R^2 \sin \frac{\gamma}{2}} - 1000 \frac{a'^2}{R^2} \left(1 - \frac{a'^2}{4R^2}\right) \cos \gamma. \quad (4)$$

Das Intervall von der Nähe der Küste bis  $\gamma = 90^\circ$  füllen wir bei der folgenden numerischen Anwendung dadurch aus, daß wir (3) bis

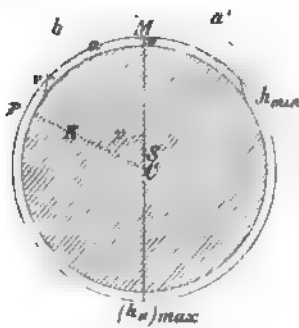


Fig. 56.

$\gamma = 90^\circ$  und (4) bis zur Küste anwenden und sodann mit Benutzung graphischer Darstellung aller  $h$  verbesserte Werte aufsuchen.

Die größte Erhebung innerhalb findet statt in der Mitte  $M$  des Kontinents und beträgt nach (2) mit  $b = 0$ :

$$(h_i)_{max} = \frac{a' \pi}{10000} - 1000 \frac{a'^2}{R^2} \left(1 - \frac{a'^2}{4R^2}\right); \quad (5)$$

die größte Erhebung außerhalb liegt diametral gegenüber  $M$  und beträgt nach (4) mit  $\gamma = 180^\circ$ :

$$(h_a)_{max} = 500 \frac{a'^2}{R^2} + 1000 \frac{a'^2}{R^2} \left(1 - \frac{a'^2}{4R^2}\right). \quad (5^*)$$

Die kleinste Erhebung liegt nach dem vorhergehenden Paragraphen nahe bei  $\gamma = 60^\circ$  und beträgt angenähert

$$500 \frac{a'^2}{R^2} \left(1 + \frac{a'^2}{4R^2}\right). \quad (6)$$

Die mittlere Erhebung eines Kontinents ist nach S. 335 (6\*) gleich

$$\frac{4a'}{15000} \left\{1 - \frac{3\pi a'}{16R} \left(1 - \frac{a'^2}{4R^2}\right)^2\right\}. \quad (7)$$

Den Mittelwert aller  $h$  für die ganze Oberfläche leiten wir ausreichend genau aus einer Tafel der  $h$  ab, welche  $h$  für  $\gamma$  von  $10$  zu  $10^\circ$  giebt, indem wir bilden

$$\Sigma h \sin \gamma : \Sigma \sin \gamma. \quad (8)$$

Dies ist ein Näherungsausdruck, entsprechend dem strengen Ausdruck

$$\int_0^\pi h \sin \gamma d\gamma : \int_0^\pi \sin \gamma d\gamma.$$

Er genügt aber völlig, und es ist nicht erforderlich, strengere Formeln der mechanischen Quadratur anzuwenden\*).

Der Mittelwert (8) läßt sich aber noch auf eine ganz andere Art berechnen. Schon im 2. Kap. S. 66 ist angegeben, daß der Mittelwert des Potentials  $v$  für alle Punkte einer die betreffenden Massen umschließenden, zum Schwerpunkt konzentrischen Kugelfläche gleich

\*) Die beiden Summen in (8) entsprechen der einfachsten Formel der mechanischen Quadratur, welche für

$$\int y dx$$

setzt

$$\Delta x \left( \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right).$$

Im vorliegenden Falle sind  $y_0$  und  $y_n$  gleich null.

Über die *Simpsonsche* Regel vergl. weiterhin § 32.

$k^2$ .Masse:Radius ist. Jetzt handelt es sich allerdings um das Potential  $v$  von Massen, die auf der betreffenden Kugelfläche selbst liegen und deren Schwerpunkt nicht in den Kugelmittelpunkt fällt. Jedoch gilt der Satz auch hier, wie sowohl aus der Theorie der Kugelfunktionen folgt, als auch leicht direkt zu beweisen ist. Denn das Potential der Anziehung eines Massenelementes  $dm$  auf einen Punkt derselben Kugelfläche im Abstände  $e$  ist  $k^2 dm : e$ , oder für  $e = 2R \sin \frac{\gamma}{2}$  gleich

$$\frac{k^2 dm}{2R \sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Die Anzahl dieser Werte für denselben Abstand  $e$ , d. h. denselben Wert  $\gamma$  auf einem Ringe von der Breite  $R d\gamma$ , ist proportional  $2\pi \sin \gamma d\gamma$  und daher der Mittelwert aller  $v$  gleich

$$\frac{\pi k^2 dm}{R} \int_0^\pi \frac{\sin \gamma d\gamma}{\sin \frac{\gamma}{2}} : 2\pi \int_0^\pi \sin \gamma d\gamma, \quad \text{d. i.} \quad \frac{k^2 dm}{R}.$$

Der Satz gilt also für das Massenelement  $dm$  und ebenso auch für die ganze Masse.

Da nun  $h$  der Quotient  $v : G$  ist, abgesehen von dem Einfluß der Schwerpunktsverschiebung, der sich im Mittel für die Oberfläche aufhebt, so muß der Mittelwert von  $h$  gleich sein der gesamten störenden Masse mal  $(k^2 : RG)$ , d. i.

$$\frac{3 \Theta a'^2 D}{4 \Theta_m R^2},$$

also für  $3 \Theta D : \Theta_m = 4000$  gleich

$$1000 \frac{a'^2}{R^2}. \quad (8^*)$$

Die Vergleichung mit (8) gewährt eine Kontrolle. Auf eine andere Probe kommen wir am Schlusse des § 34 zu sprechen.

Zieht man den Mittelwert (8) von den Werten  $h$  ab, so erhält man Höhen  $h'$  einer Parallelfäche zu der bisher betrachteten Niveaufäche, die mit gleicher Annäherung wie diese eine Niveaufäche ist. Die Fläche der  $h'$  und die Kugelfläche konzentrisch zum Schwerpunkt  $S$  verhalten sich zu einander wie Niveaufäche und zugehöriges Niveausphäroid (Normalsphäroid); insbesondere entsprechen die  $h'$  den  $N$  des 3. Kapitels. Die Summe der  $h'$  für die ganze Oberfläche ist ebenso wie diejenige der  $N$  gleich null.

Wir werden weiterhin die erwähnte Kugelfläche bezüglich der Niveaufäche der  $h'$  das *normale Niveau* nennen.

Die Lotstörung im Sinne einer Anziehung des aufgehängten Lotes nach der Mitte des Kontinents  $M$  hin folgt nach S. 316 (7\*) und S. 333 (6\*) innerhalb des Kontinents bis zur Küste, also für  $b = \text{null bis } a$ , aus der Formel:

$$A_i = 40 \frac{a'}{b} \left\{ K\left(\frac{b}{a'}\right) - E\left(\frac{b}{a'}\right) \right\} - 30 \frac{a'^2 b}{R^3} \left( 1 - \frac{a'^2}{4R^2} \right). \quad (9)$$

in Sek.

Der Wert des 1. Gliedes von  $A_i$  ist an der Küste mit  $b = a$  nach S. 325 (4) bis (6) unter Voraussetzung flacher Böschungen genauer gleich

$$10 \left\{ \log \text{nat} \frac{a \sin \nu}{500} + 2 \frac{K(x) - E(x)}{x} \right\} \quad (10)$$

mit

$$x = \frac{a}{a + 4000 \cot \nu}. \quad (10^*)$$

Ist der Abfall an der Küste so steil, daß  $\cot \nu < 6$ , so wird die Formel (9) für die Küste unbrauchbar, weil alsdann der Abstand der Küste vom Rande der Scheibe mit dem Radius  $a'$  kleiner als  $3D$  ist (§ 21 S. 319). Formel (10) versagt aber erst für  $\cot \nu < 3$ . Bei vertikalem Abfall der Küste ist (7\*) S. 324 zu benutzen.

Für  $\gamma \geq 90^\circ$  ist die Lotstörung nach S. 330 (3\*) und S. 333 (6\*)

$$A_a = \frac{8a'^2}{R^2 \sin \frac{\gamma}{2} \tan \frac{\gamma}{2}} - 30 \frac{a'^2}{R^2} \left( 1 - \frac{a'^2}{4R^2} \right) \sin \gamma. \quad (11)$$

in Sek.

Diese Lotstörung hat insofern wenig Interesse, als nur ihr 1. Teil den Krümmungsradius beeinflusst, was bei dem 2., von der Schwerpunktsverschiebung erzeugten, nicht der Fall ist. Der 1. Teil ist aber der kleinere und sein Einfluß auf  $\rho$  nur höchstens ein paar hundert Meter (S. 330).

Für den Krümmungsradius hat man nach (10) S. 317 innerhalb des Kontinents die Relation

$$\frac{1}{\rho_i} = \frac{1}{R'} \left\{ 1 + \frac{1200}{a'} \frac{a'^2}{b^2} \frac{E\left(\frac{b}{a'}\right) - \left(1 - \frac{b^2}{a'^2}\right) K\left(\frac{b}{a'}\right)}{1 - \frac{b^2}{a'^2}} \right\}. \quad (12)$$

Hierin ist für  $R'$ , um  $\rho_i$  auf diejenige Niveaufläche zu beziehen, deren Lage durch die Erhebungen  $h'$  gegen die zum gestörten Schwerpunkt konzentrische Kugelfläche  $R$  markiert ist, gleich zu setzen:

$R +$  dem 1. Teil von  $h_i$  aus (2) -- dem Mittelwert (8).

Die Formel (12) giebt eine Annäherung für  $1 : \rho_i$  innerhalb derselben Grenzen wie (9).

§ 30. Numerische Auswertung der elliptischen Integrale  $K$  und  $E$ . Zur Berechnung der Werte der Integrale

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi}}$$

und

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

$$x^2 \leq 1$$

gibt es verschiedene Methoden, die hauptsächlich von *Legendre*, *Gauß*, *Jacobi* und *Weierstraß* herrühren. Die bequemsten Formeln bietet die Theorie der elliptischen Funktionen, aus welcher wir die nachstehenden Formeln auswählten, die sich für uns beim Gebrauche am vorteilhaftesten herausstellten.\*)

Bezeichnet  $q$  eine gewisse, von *Jacobi* eingeführte, von  $x$  abhängige Hilfsgröße, so ist

$$K = \frac{\pi}{2} \cdot \left\{ 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots \right\}^2, \quad (1)$$

mit

$$\frac{\pi}{2} = 1,5708 \dots, \quad \log \frac{\pi}{2} = 0,19612 \dots;$$

$$E - (1 - x^2)K = \frac{2\pi^2}{K} \frac{q + 4q^4 + 9q^9 + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots} \quad (2)$$

mit

$$2\pi^2 = 19,7392 \dots, \quad \log(2\pi^2) = 1,29533 \dots$$

Hieraus folgt  $E$  bei bereits berechnetem  $K$ . Zur gleichzeitigen Kontrolle für  $q$ ,  $E$  und  $K$  dient die Gleichung

$$K - E = \frac{2\pi^2}{K} \frac{q - 4q^4 + 9q^9 - \dots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots} \quad (3)$$

Bei der Berechnung der  $h$ ,  $A$  und  $\varphi$  werden außer  $E$  die durch (2) und (3) direkt gelieferten Kombinationen von  $E$  und  $K$  gebraucht.

Zur Ermittlung von  $q$  aus  $x$  dienen Tabellen. Wir benutzten diejenige, welche *Schlömilch* im 2. Bande seines Kompendiums der höheren Analysis nach *Jacobi*, *Crelles Journal* Bd. 26 1843 S. 93, im Auszug, aber mit der Erweiterung giebt, daß auch  $x$  selbst als Argument auftritt (bei *Jacobi* nur  $\varphi^0 \arcsin x$ ).

\*) *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen.*

Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Prof. *K. Weierstraß* bearbeitet und herausgegeben von *H. A. Schwarz*. Göttingen 1881. 82.

Bei direkter Berechnung von  $q$  ermittelt man zunächst

$$l = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - x^2}}{1 + \sqrt[4]{1 - x^2}}. \quad (4)$$

Setzt man  $x = \sin \alpha$  und  $\cos \beta = \sqrt[4]{\cos \alpha}$ , so ist  $l = \tan^2 \frac{\beta}{2}$ . Dann wird

$$q = \left(\frac{l}{2}\right) + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \dots \quad (5)$$

Ist  $x$  nahezu eins, so berechnet man besser zunächst

$$l' = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}, \quad (6)$$

oder für  $\cos \beta' = \sqrt{x}$ ,  $l' = \tan^2 \frac{\beta'}{2}$  und

$$q' = \left(\frac{l'}{2}\right) + 2\left(\frac{l'}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l'}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l'}{2}\right)^{13} + \dots \quad (7)$$

Alsdann folgt  $q$  aus der Gleichung:

$$(-\log q)(-\log q') = \pi^2 \text{Mod}^2 = \text{num log } 0,26986836. \quad (8)$$

Alle Reihen konvergieren so stark, daß meist nur das erste Glied oder die beiden ersten Glieder für unsere Zwecke erforderlich sind.

Die Formel (1) findet sich bei *Weierstraß-Schwarz* S. 61 unter (7); (2) und (3) auf S. 44 unter (15) und (16); (4) und (5) auf S. 61 unter (3); (8) folgt aus S. 61 (2) Nr. 2 und 3. Dabei ist zu beachten, daß  $q$  daselbst mit  $h$  bezeichnet ist. Die in den Größen auftretenden drei Wurzeln  $e$  einer kubischen Gleichung, in der der Koeffizient des Quadrats der Unbekannten null ist, sind definiert durch das System

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad x^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Die 2. Relation sagt, daß  $e_1 > e_2 > e_3$  ist, da  $x^2 \leq 1$ . Schreibt man sie in der Form

$$x^2 e_1 - e_2 + (1 - x^2) e_3 = 0,$$

so giebt sie mit der 1. Relation die Proportion

$$e_1 : e_2 : e_3 = 2 - x^2 : -(1 - 2x^2) : -(1 + x^2).$$

Mit Hilfe dieser Proportion gelangt man ohne Schwierigkeit zu unseren Formeln, wenn man noch beachtet, daß nach S. 61 (1) das in den citierten Formeln auftretende  $\omega_1$  und  $\omega$  gleich  $K : \sqrt{e_1 - e_3}$ , nach S. 34 (2)

$$\eta_1 = \bar{\eta} = \sqrt{e_1 - e_3} \left\{ E - \frac{e_1}{e_1 - e_3} K \right\}$$

und nach S. 61  $\mu = 2$ ,  $\nu = 3$  ist.

Für einige Werte von  $\kappa$ , die im Folgenden besonders häufig gebraucht werden, stellen wir  $K$ ,  $E$  u. s. w. zusammen:

$\kappa$	$\log q + 10$	$q$	$K$	$E$	$E - (1 - \kappa^2) K$	$\frac{K - E}{\kappa}$	$\frac{E - (1 - \kappa^2) K}{\kappa^2(1 - \kappa^2)}$
0,0	$-\infty$	0,0000	1,571	1,571	0,000	0,00	0,79
0,1	6,80	0,0006	1,575	1,567	0,008	0,08	0,80
0,2	7,40	0,0025	1,587	1,555	0,032	0,16	0,82
0,3	7,77	0,0059	1,608	1,534	0,071	0,25	0,86
0,4	8,037	0,0109	1,640	1,506	0,128	0,34	0,95
0,5	8,255	0,0180	1,686	1,468	0,203	0,44	1,08
0,6	8,445	0,0279	1,751	1,418	0,297	0,56	1,29
0,7	8,623	0,0420	1,846	1,355	0,414	0,70	1,66
0,8	8,803	0,0635	1,995	1,276	0,558	0,90	2,42
0,9	9,0101	0,1023	2,280	1,171	0,738	1,23	4,80
1,0	10,0000	1,0000	$\infty$	1,000	1,000	$\infty$	$\infty$

In Bezug auf die ersten und letzten Werte der Kolumnen ist eine Bemerkung nötig. Für  $\kappa = \text{null}$  ist nach (4) und (5) auch  $q$  null; damit wird nach (1)  $K = \frac{\pi}{2}$  und nach (3)  $E = K$ . Ist  $\kappa$  sehr klein, so ist nach (4) und (5) sehr nahe  $q = \kappa^2 : 16$ , und zwar um so genauer, je kleiner  $\kappa$ . Hiermit und im Hinblick auf (3) und (4) ist ersichtlich, daß für  $\kappa = \text{null}$   $(K - E) : \kappa$  gleich null und  $[E - (1 - \kappa^2) K] : \kappa^2(1 - \kappa^2) = \frac{\pi}{4}$  wird.

Ist  $\kappa = 1$ , so wird nach (7) und (8)  $q = 1$  und nach (1)  $K$  unendlich groß. Den Wert von  $E$  kann man in diesem Falle aus (2) und (3) nicht entnehmen; er folgt aber leicht aus dem definierenden Integral zu 1.

Ist  $\kappa$  sehr nahe gleich 1, so ist sehr nahe

$$K = \log \text{nat} \frac{4}{\sqrt{1 - \kappa^2}}, \quad E = 1$$

und zwar für  $\kappa = 0,9999$  ersteres bis auf  $1/25000$ , letzteres bis auf  $1/2000$  des betreffenden Integralwertes. \*) Hieraus erkennt man, daß  $(1 - \kappa^2)K$  für  $\kappa = 1$  gleich null wird, womit sich die angegebenen Werte der drittletzten und letzten Kolumne obiger Tafel für  $\kappa = 1$  sofort ergeben.

\*) Genauer siehe in *Schlömilchs Kompendium der höheren Analysis* Bd. 2, Braunschweig 1866, S. 316 und 317.

§ 31. Störungen durch Europa-Asien. Wir behandeln speziell den größten und den kleinsten Kontinent; jenen zuerst. Nach S. 313 ist dafür

$$a = 0,66 R = 4\,200\,000^m. \quad (1)$$

Setzen wir für den Böschungswinkel  $\nu$  der Küste

$$\cot \nu = 100, \quad (2)$$

so ergibt sich nach (1) S. 336:

$$a' = 4\,400\,000^m = 4400^km. \quad (3)$$

Nach (2) S. 336 sowie nach (9) und (12) S. 339 ist nun, wenn  $K$  und  $E$  auf  $\kappa = b : a'$  bezogen gedacht werden:

$$h_i = 880 E - 420 \cos \gamma \quad (4)$$

in Metern

$$A_i = 40 \frac{K - E}{\kappa} - 9 \kappa \quad (5)$$

in Sek.

$$\frac{1}{e_i} = \frac{1}{R} \left\{ 1 + 0,000273 \frac{E - (1 - \kappa^2) K}{\kappa^2 (1 - \kappa^2)} \right\}. \quad (6)$$

Wir setzen hierin der Reihe nach und mit Rücksicht auf (3\*) S. 336:

$\kappa = \frac{b}{a'}$	$\gamma$
0	0°
0,1	3,96
0,2	7,92
0,3	11,88
0,4	15,84
0,5	19,80
0,6	23,76
0,7	27,72
0,8	31,68
0,9	35,64
42/44	37,80

Dazu giebt die Tabelle von S. 342  $K$  und  $E$ , ausgenommen für  $\kappa = 42:44$ , wofür  $K$  und  $E$  direkt zu berechnen sind. Dieser Wert von  $\kappa$  entspricht einem Küstenpunkte, indem für die Küste  $b = a = 4200000^m$  ist. Die Formeln geben mit  $\kappa = 42 : 44$  der Reihe nach  $q = 0,14700$ ,  $K = 2,6340$ ,  $E = 1,0956$  und  $E - (1 - \kappa^2) K = 0,8615$ .



Man gelangt nun zu folgender Zusammenstellung:

Zentrums- abstand $b$	Er- hebung $h_i$	Er- hebung $h_i'$	Lot- störung $A_i$	$R' : \varrho_i$	$R' - \varrho_i$	$R - \varrho_i$	Küsten- abstand.
Zentrum	962 <sup>m</sup>	504 <sup>m</sup>	0''	1,00022	1400 <sup>m</sup>	500 <sup>m</sup>	4200 <sup>km</sup>
440 <sup>km</sup>	960	502	2	1,00022	1400	500	3760
880	952	494	5	1,00022	1400	500	3320
1320	939	481	7	1,00023	1500	600	2880
1760	921	463	10	1,00026	1700	800	2440
2200	896	438	13	1,00030	1900	1100	2000
2640	863	405	17	1,00035	2200	1400	1560
3080	821	363	22	1,00045	2900	2200	1120
3520	765	307	29	1,00066	4200	3500	680
3960	689	231	41	1,00131	8300	7700	240
4200	632	174	55	1,00291	18500	18000	An der Küste.

Die 3. Rubrik giebt  $h_i'$ , gleich  $h_i$  weniger dem Mittelwert aller  $h$  für die ganze Oberfläche, welcher weiterhin zu 458<sup>m</sup> berechnet wird.

Bezüglich der 7. Rubrik ist zu bemerken, daß inmitten des Kontinents  $R' = R + 1382^m - 458^m$ , an der Küste  $R' = R + 964^m - 458^m$  wird.  $R - \varrho$  ist also um 900 bis 500<sup>m</sup> kleiner als  $R' - \varrho$ , was die 7. Rubrik für die einzelnen Orte genau berücksichtigt.

Die Lotstörung an der Küste folgt aus der strengeren Formel (10) S. 339, wobei  $\alpha = 42 : 46$ ,  $q = 0,11030$ ,  $K = 2,3414$  und  $K - E = 1,1862$  wird, gleich

$$70 - 8 = 62''.$$

Nach S. 328 (13) gehen wegen der Krümmung der Erdoberfläche, die in (10) S. 339 nicht berücksichtigt ist, 2'' ab, sodaß als Lotablenkung an der Küste bleiben

$$60''.$$

Wenn man nun bedenkt, daß in der Regel der Abfall der Küste anfangs ein sanfter ist (etwa 1 : 250 bis zu 50<sup>km</sup> Abstand) und erst in einiger Entfernung vom Lande rascher erfolgt (etwa mit 1 : 100), so wird ersichtlich, daß der in der Tabelle angesetzte Wert von 55'' an der Küste den Verhältnissen ganz gut entspricht.

Einige Sekunden mehr oder weniger sind aber überhaupt an der Küste ganz bedeutungslos, insofern hier die Lotstörung in hohem Grade von dem Böschungsmaße abhängt. Für letzteres nahmen wir 1 : 100, weil es ein Wert ist, dem man nach Ausweis der Tiefen-

karten in *Andrees Atlas* — abgesehen von der Beschränkung auf Europa-Asien — vielfach begegnet, so namentlich u. a. an den Küsten des atlantischen Oceans von Amerika, Afrika, Spanien. Vielfach ist die Böschung aber steiler, namentlich an der pacifischen Küste von Nord- und Südamerika, woselbst sie auf rund 1 : 40 steigt, und östlich von Japan und den Kurilen, wo der Abfall nach der 8500<sup>m</sup> tiefen Tuscara-Senkung mit 1 : 36 erfolgt. Indessen wird hier die Wirkung gemildert durch die Meere, welche die Inseln vom Festlande trennen. An der amerikanischen Küste kommt aber die volle Wirkung zur Geltung bis auf die Abschwächung, welche auch hier durch das in der Nähe des Landes geringere Abfallen entsteht.

Wir berechnen jetzt noch für das Böschungsmaß 1 : 40 die an der Küste stattfindenden Werte im Hinblick darauf, daß dieses Maß den steilsten Abfall bezeichnet, der in größerem Umfange an Festlandsküsten auftritt. Wir denken uns dabei für eine Küstenstrecke die steilere Böschung durch die im allgemeinen stattfindende sanftere in der Weise unterbrochen, daß  $a'$  unverändert bleibt, also der Abstand der Küste vom Zentrum um die absolut genommene Änderung von  $\frac{1}{2} D \cot \nu$  wächst,

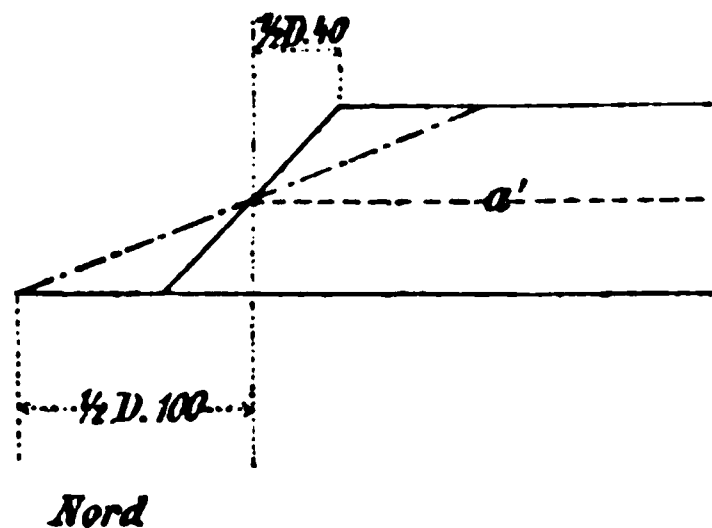


Fig. 57.

vergl. Fig. 57. In den obigen Formeln für  $h_i$ ,  $A_i$  und  $1 : \varphi_i$  ist nun zu setzen

$$\kappa = \frac{b}{a'} = \frac{a' - \frac{1}{2} D \cdot 40}{a'} = 1 - \frac{1}{55},$$

$$b = 4320^{km} \quad \gamma = 38,88^\circ.$$

Es wird  $q = 0,19712$ ,  $K = 3,0668$ ,  $E = 1,0466$  und  $E - (1 - \kappa^2) K' = 0,9359$ ; ferner

$$h_i = 594^m \quad A_i = 73'' \quad R : \varphi_i = 1,00736.$$

Nach der strengeren Formel (10) S. 339 würde sich  $A_i$  um 5'' größer ergeben, wovon aber 2'' wegen der Erdkrümmung abgehen.

Der Wert von rund

1 1/4 Minute

kann für Europa-Asien als *Maximum der Lotstörung kontinentalen Charakters* angesehen werden. Durch Kombination mit lokalen Einflüssen kann allerdings die Lotstörung sich noch erheblich steigern. Immerhin aber dürften diese lokal gesteigerten Werte von demjenigen

Beträge weit entfernt bleiben, der sich an einer vertikal abfallenden Küste ergibt.\*)

Für die vertikale Küste ist bei Festhaltung des Wertes von  $a'$  die Lotstörung aus Formel (7\*) S. 324 zu entnehmen, wobei  $a'$  für  $a$  zu setzen ist. Es wird dieselbe mit Abzug von  $9''$  wegen der Schwerpunktsverschiebung gleich  $154''$  oder rund

$2\frac{1}{2}$  Minute.

Während wir bisher nur die größten Lotstörungen im Auge hatten, so ist nun darauf hinzuweisen, daß vielfach selbst die in der Tabelle angesetzten  $55''$  nicht eintreten werden, weil der Abfall der Küste überhaupt gering oder bis zu erheblichem Abstände vom Lande sehr schwach ist. Dies gilt unter andern für die atlantische Küste von Frankreich, England und Norwegen. Insbesondere ist auch zu beachten, daß die mittlere Tiefe der Nordsee nur  $89^m$  beträgt.

§ 32. Fortsetzung. Den erheblichen Lotstörungen in der Nähe der Küste entspricht im Verlaufe der Erhebungen  $h$  eine Art Schwelle. Um dieselbe zur Anschauung zu bringen, muß man für die Nähe der Küste noch einige Werte  $h_a$  berechnen, wobei die Formel (3) S. 336 zur Anwendung gelangt. Die Schwelle wird am besten aus

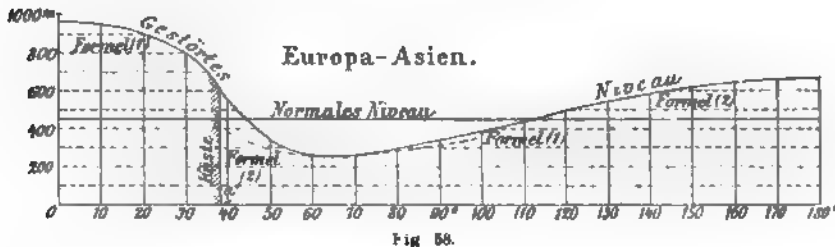


Fig. 58.

beistehender Zeichnung, Fig. 58, die überhaupt alle  $h$  von  $\gamma = 0$  bis  $180^\circ$  darstellt,  $\gamma$  als Abscisse und  $h$  als Ordinate giebt, ersichtlich.

Zur Konstruktion dienten außer den Werten  $h_i$  der Tabelle von S. 344 eine Reihe von Werten  $h_a$ , die für solche Argumente  $a': b = x$  nach Formel (3) S. 336 ermittelt wurden, daß die S. 342 angegebenen Werte von  $E - (1 - x^2) K$  benutzt werden konnten. Die Formel (3) lautet jetzt:

$$h_a = b \frac{E - (1 - x^2) K}{5000} - 420 \cos \gamma. \quad (1)$$

Sie wurde bis  $b = 11000^m$  angewandt\*\*). Den Fehler der Formel bei diesem großen Werte von  $b$  zeigt die Formel (4) S. 336, welche jetzt mit  $a' = 4400^m$  lautet:

\*) Ph. Fischer, *Gestalt der Erde* S. 92, findet für die Kontinentalküsten abgesehen von lokalen Störungen als maximale Lotablenkung etwa  $1\frac{1}{4}$  Min.

\*\*) Die in Fig. 58 mit „Formel (1)“ bezeichnete Kurve ist innerhalb des Kontinents selbstverständlich mit den früher angegebenen Werten von  $h_i$  konstruiert.

$$h_a = 239 \operatorname{csc} \frac{\gamma}{2} - 420 \cos \gamma, \tag{2}$$

und die für  $\gamma = 90^\circ$  nach § 25 S. 331  $4\%$ , d. i.  $14^m$ , zu wenig giebt.

Diese Formel wurde aufer auf mehrere Werte von  $\gamma$  zwischen  $90^\circ$  und  $180^\circ$  auch auf einige kleinere Werte von  $\gamma$  bis an die Küste angewandt, um ihre mit Annäherung an dieselbe wachsende Fehlerhaftigkeit zu erkennen. Da die Formel (1) für  $b = 11000^{km}$  etwa  $45^m$  Fehler zeigt, wurde sie nur bis  $b = 7200^{km}$  beibehalten, an welcher Stelle sie mit (2) gleiche Werte giebt; von hier an aber wurde für wachsende  $b$  Formel (2) angewandt. Die Zahlen sind folgende:

b	$\gamma$	$h_a$	
		nach (1)	nach (2)
4400 <sup>km</sup>	39,6 <sup>o</sup>	558 <sup>m</sup>	383 <sup>m</sup>
4890	44,0	420	.
5500	49,5	341	296
6290	56,6	289	.
7333	66,0	264	267
8800	79,2	279	296
11000	99	348	379
13330	120	.	486
14440	130	.	533
15560	140	.	576
16670	150	.	611
17780	160	.	637
18890	170	.	653
20000	180	.	659

Mit Hilfe der graphischen Darstellung folgt nachstehende Übersicht der  $h$  für  $\gamma$  von  $10$  zu  $10^\circ$ :

$\gamma$	$h$	$\sin \gamma$	$h$	$\gamma$	$h \sin \gamma$
0 <sup>o</sup>	962 <sup>m</sup>	0,000	659 <sup>m</sup>	180 <sup>o</sup>	0 <sup>m</sup>
10	946	0,174	653	170	278
20	894	0,342	637	160	524
30	796	0,500	611	150	704
40	542	0,643	576	140	719
50	338	0,766	533	130	666
60	278	0,866	486	120	662
70	270	0,940	442	110	669
80	296	0,985	392	100	678
90	340	1,000			340
$\Sigma \sin \gamma = 11,432; \Sigma h \sin \gamma = 5240.$					

Der Durchschnittswert der  $h$  ist hiermit nach S. 337 (8) gleich  
 $458^m$ .

Die *Simpsonsche* Regel giebt bezw. die Zahlen 11,461, 5265 und 459. Der Unterschied ist also ganz unerheblich.\*)

Der Durchschnittswert der  $h$  folgt andererseits aus S. 338 (8\*) gleich

$$479^m,$$

der vorige Wert ist somit um  $20^m$  zu klein. Dies kann nicht befremden, da überhaupt alle Werte  $h$ , ausgenommen für  $\gamma = 0^\circ$ , zu klein sind, vergl. § 24 S. 327 und § 25 S. 331. Bei  $40^\circ$  ist der Fehler ca.  $20^m$ , bei  $90^\circ$   $14^m$ , bei  $180^\circ$   $6^m$ . Dazu tritt nach § 24 S. 329 noch für  $\gamma = 0^\circ$  bis  $60^\circ$  eine Verkleinerung der Abscissen um ca.  $2\%$ , was insbesondere bei  $\gamma = 30^\circ$  bis  $50^\circ$  Fehler von durchschnittlich  $18^m$  erzeugt.

Die mittlere Erhebung innerhalb des Kontinents Europa-Asien wird nach Formel (7) S. 337 mit  $a' = 4400000^m$  gleich  $802^m$ ; nach Abzug von 458 aber für die Niveaufläche der  $h'$ :

$$344^m.$$

Die kleinste Erhebung ist nach S. 337 (6) gleich  $267^m$ , die graphische Darstellung giebt dasselbe; hieraus folgt die tiefste Senkung der Niveaufläche der  $h'$  unter das normale Niveau gleich rund

$$190^m.$$

Zieht man überhaupt 458 von den  $h$  ab, so gelangt man zu der Übersicht der Erhebungen  $h'$  über das normale Niveau, welche weiterhin mit den Werten für die anderen Kontinente zusammengestellt ist.

§ 33. Störungen durch Australien. Nach S. 313 ist hier

$$a = 0,26 R = 1\,660\,000^m. \quad (1)$$

Setzen wir wieder für den Böschungswinkel  $\nu$  an der Küste

$$\cot \nu = 100, \quad (2)$$

so ergibt sich nach (1) S. 336

$$a' = 1\,860\,000^m = 1860^k. \quad (3)$$

---

\*) Die *Simpsonsche* Regel setzt für

$$\int y dx$$

die Summe

$$\frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-1} + y_n);$$

die Anzahl der im Intervall  $\Delta x$  berechneten  $y$  muß also eine ungerade sein. Wenn oben als Ergebnisse der *Simpsonschen* Regel 11,461 und 5265 genannt sind, so ist dabei der Faktor  $\Delta x$  weggelassen.

Nach (2) S. 336 sowie nach (9) und (12) S. 339 ist nun, wenn  $K$  und  $E$  auf  $x = \frac{b}{a'}$  bezogen werden:

$$h_i = 372 E - 83,5 \cos \gamma \quad (4)$$

in Metern

$$A_i = 40 \frac{K - E}{x} - 0,8 x \quad (5)$$

in Sek.

$$\frac{1}{e_i} = \frac{1}{R} \left\{ 1 + 0,000645 \frac{E - (1 - x^2) K}{x^2(1 - x^2)} \right\}. \quad (6)$$

Wir setzen hierin der Reihe nach und mit Rücksicht auf (3\*) S. 336:

$x = \frac{b}{a'}$	$\gamma$	$x = \frac{b}{a'}$	$\gamma$
0	0	0,5	8° 22'
0,1	1° 40'	0,6	10 3
0,2	3 21	0,7	11 43
0,3	5 1	0,8	13 24
0,4	6 42	<sup>166</sup> / <sub>186</sub>	14 56

$K$  und  $E$  folgen aus der Tabelle S. 342 teils direkt, teils durch Interpolation. Es ergibt sich damit nachstehende Übersicht:

Zentrums- abstand $b$	Er- hebung $h_i$	Er- hebung $h_i'$	Lot- störung $A_i$	$R' : e_i$	$R' - e_i$	$R - e_i$	Abstand von der Küste.
Zentrum	501 <sup>m</sup>	417 <sup>m</sup>	0''	1,00051	3200 <sup>m</sup>	2700 <sup>m</sup>	1660 <sup>km</sup>
186 <sup>km</sup>	499	415	3	1,00052	3300	2800	1474
372	495	411	6	1,00053	3400	2900	1288
558	488	404	10	1,00056	3600	3100	1102
744	477	393	13	1,00061	3900	3400	916
930	464	380	17	1,00070	4500	4000	730
1116	445	361	22	1,00083	5300	4800	544
1302	422	338	27	1,00107	6800	6300	358
1488	393	309	35	1,00156	9900	9500	172
1660	358	274	47	1,00289	18400	18000	An der Küste.

Die 3. Rubrik giebt  $h_i' = h_i$  weniger dem Mittel aller  $h$  für die ganze Oberfläche, welches weiterhin zu 84<sup>m</sup> berechnet wird.

Die Lotstörung an der Küste folgt aus der strengeren Formel (10) S. 339 mit  $x = 166 : 206$ , für welchen Wert  $(K - E) : x$  aus der Tabelle S. 342 interpoliert werden kann, gleich

$$53,4 - 0,7 = 52''.$$

Da die australische Küste meist sehr flach ist, entspricht der Tabellenwert von  $47''$  den thatsächlichen Verhältnissen genügend. Doch kommt im Südosten auch eine sehr steile Böschung vor.

Setzen wir mit Rücksicht hierauf  $\cot \nu = 40$  und behalten den Wert von  $a'$  wie oben bei, so wird in diesem Falle für die Küste

$$b = 1780^m \quad \gamma = 16,02^\circ$$

$$\kappa = \frac{b}{a'} = \frac{178}{186},$$

$$q = 0,15007, \quad K = 2,659, \quad E = 1,091 \quad \text{und} \quad E - (1 - \kappa^2) K = 0,868,$$

$$h_i = 326^m, \quad A_i = 65'', \quad R : q_i = 1,0072.$$

Die strengere Rechnung nach Formel (10) S. 339 giebt hier  $71''$ .

Für vertikalen Abfall folgt mit Beibehaltung von  $a'$  nach S. 324 (7\*) als Lotstörung an der Küste  $144''$ , also rund

$$2\frac{1}{2} \text{ Minute.}$$

Um eine Übersicht der  $h$  zu gewinnen, wurde nachstehende Tabelle aufgestellt, S. 351, zu deren Berechnung teils obige Zusammenstellung teils die Formeln (3) und (4) S. 336 dienten, welche hier lauten:

$$h_a = b \frac{E - (1 - \kappa^2) K}{5000} - 83,5 \cos \gamma \quad (7)$$

mit

$$\kappa = \frac{a'}{b}$$

und

$$h_a = 42,7 \csc \frac{\gamma}{2} - 83,5 \cos \gamma. \quad (8)$$

Definitiv angenommen wurden die Werte von  $h_a$  nach Formel (7) bis  $\gamma = 40^\circ$ , von da ab diejenigen nach Formel (8).

Der Durchschnittswert der  $h$  folgt nach S. 337 (8) gleich  $83,5$  oder abgerundet

$$84^m;$$

die *Simpsonsche* Regel giebt dasselbe, Formel (8\*) S. 338  $85^m$ . Ziehen wir ersteren Wert von den  $h$  ab, so erhalten wir die Höhen  $h'$  in Bezug auf das normale Niveau. Diese Höhen  $h'$  zeigt die weiterhin folgende Übersicht.

Der kleinste Wert  $h_a$  folgt nach S. 337 (6) gleich  $44^m$ , übereinstimmend mit nebenstehender Tabelle; nach Berücksichtigung der  $84^m$  ergibt sich hieraus die größte Senkung der Niveaufläche der  $h'$  unter das normale Niveau gleich

$$40^m.$$

Die mittlere Erhebung innerhalb des Kontinents Australien wird nach Formel (7) S. 337 gleich  $425^m$ , nach Abzug von  $84^m$  für die Niveaufläche der  $h'$  gleich

$$341^m.$$

$b$	$\gamma$	$h$ nach	
		(4) bzw. (7)	(8)
0	0°	501 <sup>m</sup>	.
1110 <sup>km</sup>	10	445	.
2220	20	195	.
3330	30	97	93 <sup>m</sup>
4440	40	60	60
5560	50	45	47
6670	60	40	44
7780	70	.	46
8890	80	.	52
10000	90	56	60
11110	100	.	70
12220	110	.	81
13330	120	.	91
14440	130	.	101
15560	140	.	110
16670	150	.	116
17780	160	.	122
18890	170	.	125
20000	180	.	126

§ 34. Störungen durch Afrika, Nord- und Süd-Amerika; Übersicht der Höhenstörungen. Für diese drei Kontinente wurden nur die Höhenstörungen nach folgenden, aus § 29 S. 336 hervorgehenden Formeln berechnet, wobei gesetzt wurde mit Rücksicht auf die Werte der Radien  $a$  nach S. 313 und mit  $\cot \nu = 100$  für

$$\begin{aligned} \text{Afrika:} & \quad a' = 3260000^m, \\ \text{Nord-Amerika:} & \quad = 2940000, \\ \text{Süd-Amerika:} & \quad = 2560000. \end{aligned}$$

Die Formeln geben sofort die Erhebung  $h'$  gegen das normale Niveau, indem der nach S. 337 (8) berechnete Mittelwert der  $h$  denselben subtraktiv beigefügt wurde. Sie lauten für

$$\begin{aligned} \text{Afrika:} \quad h_i' &= 652 E - 245 \cos \gamma - 256 \\ h_a' &= b \frac{E - (1 - x^2) K}{5000} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{bis } \gamma = 50^\circ \\ h_a' &= 131 \csc \frac{\gamma}{2} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{von } \gamma = 60^\circ \text{ an,} \\ \text{Nord-Amerika: } h_i' &= 588 E - 202 \cos \gamma - 208 \\ h_a' &= b \frac{E - (1 - x^2) K}{5000} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{bis } \gamma = 50^\circ \\ h_a' &= 106,5 \csc \frac{\gamma}{2} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{von } \gamma = 60^\circ \text{ an,} \end{aligned}$$



$$\text{Süd-Amerika: } h_i' = 512 E - 155 \cos \gamma - 159$$

$$h_a' = b \frac{E - (1 - \kappa^2) K}{5000} \quad , \quad , \quad \text{bis } \gamma = 40^\circ$$

$$h_a' = 81 \csc \frac{\gamma}{2} \quad , \quad , \quad \text{von } \gamma = 50^\circ \text{ an.}$$

In  $h_i'$  bezieht sich  $E$  immer auf  $\kappa = b : a'$ , in  $h_a'$  auf  $\kappa = a' : b$ . Der Mittelwert der  $h$ , welcher bezw. zu 256, 208 und 159 berechnet ist, folgt aus S. 338 (8\*) bezw. zu 262, 213 und 162.

Die tiefste Senkung der Niveaufläche der  $h'$  unter das normale Niveau wird nach S. 337 (6) gleich

116<sup>m</sup> für Afrika

96 „ Nord-Amerika

75 „ Süd-Amerika.

Alles übrige zeigt die nebenstehende Tabelle.

Zu derselben ist nur noch bezüglich der letzten, mit Kontrolle bezeichneten Zeile zu bemerken, daß die darin enthaltenen Zahlen aus der Berechnung von

$$\frac{3}{4} \int_0^\pi h' \sin 2\gamma \, d\gamma$$

nach der *Simpsonschen* Regel hervorgegangen sind. Diese Zahlen geben den Abstand des Volumenschwerpunktes des von der gestörten Niveaufläche eingeschlossenen Raumes vom gestörten Massenschwerpunkt. Denn das statische Moment dieses Raumes in Bezug auf eine durch letzteren Punkt normal zu dem, nach dem Mittelpunkt des betreffenden Kontinents gezogenen Radius gelegte Ebene ist gleich

$$2\pi R^3 \int h' \sin \gamma \cos \gamma \, d\gamma,$$

das statische Moment des im Volumenschwerpunkt vereinigten Volumens aber sehr nahe

$$\frac{4}{3} \pi R^3 x,$$

wenn  $x$  den Schwerpunktsabstand bezeichnet. Die Gleichsetzung beider Ausdrücke führt zu obigem Resultat.

Nach S. 258 muß dieser Abstand null sein oder dürfte nur ein paar Meter betragen, da im vorliegenden Falle die dort erörterte Bedingung für das Zusammenfallen beider Schwerpunkte noch besser wie bei der Erde erfüllt ist. Die berechneten Werte der letzten Horizontalreihe der Tabelle rühren daher wesentlich von den Fehlern in den Ausdrücken für  $h'$  her, auf die schon früher — für Europa-Asien S. 348 — aufmerksam gemacht wurde.

*Höhenstörungen  $h'$  der Niveauflächen gegen das normale Niveau durch die Kontinentalmassen.*

$\gamma$	Europa-Asien.	Afrika.	Nord-Amerika.	Süd-Amerika.	Australien.
0°	+ 504 <sup>m</sup>	+ 523 <sup>m</sup>	+ 514 <sup>m</sup>	+ 490 <sup>m</sup>	+ 417 <sup>m</sup>
10	+ 488	+ 496	+ 483	+ 453	+ 361
20	+ 436	+ 405	+ 375	+ 315	+ 111
30	+ 338	+ 150	+ 87	+ 46	+ 13
40	+ 84	— 35	— 37	— 34	— 24
50	— 120	— 99	— 83	— 67	— 37
60	— 180	— 116	— 96	— 74	— 40
70	— 188	— 111	— 91	— 70	— 38
80	— 162	— 95	— 77	— 60	— 32
90	— 118	— 70	— 57	— 44	— 24
100	— 66	— 42	— 34	— 26	— 14
110	— 16	— 14	— 7	— 7	— 3
120	+ 28	+ 18	+ 16	+ 12	+ 7
130	+ 75	+ 46	+ 39	+ 30	+ 17
140	+ 118	+ 71	+ 60	+ 45	+ 26
150	+ 153	+ 92	+ 77	+ 58	+ 32
160	+ 179	+ 107	+ 90	+ 69	+ 38
170	+ 195	+ 117	+ 98	+ 75	+ 41
180	+ 201	+ 120	+ 101	+ 77	+ 42
Zentrum des Kontinents:					
Geogr. Breite	+ 48°	+ 7,5°	+ 51°	— 13°	— 25°
Östl. Länge von Ferro	95	37,5	280,5	318	152
Radius $a$	38°	27,5°	24,5°	21,5°	15°
Mittlere Erhebung innerhalb des Kontinents	344 <sup>m</sup>	384 <sup>m</sup>	384 <sup>m</sup>	375 <sup>m</sup>	341 <sup>m</sup>
Kontrolle	— 14 <sup>m</sup>	— 10 <sup>m</sup>	— 8 <sup>m</sup>	— 4 <sup>m</sup>	— 1 <sup>m</sup>

Nach *Hann, Gaea* 1876 Bd. 12 S. 79, hat *Saigey* 1842 in der Schrift *Petite Physique du Globe* für kreisförmige Kontinentalscheiben berechnet die Höhenstörungen der Niveauflächen im Zentrum und an der Küste, sowie für innerhalb im Durchschnitt; jedoch sind die Dicken der Scheiben nur den Erhebungen übers Meer proportional angesetzt.

*Bruns* berechnet 1878 in seiner *Figur der Erde* S. 22 bis 24 die Höhenstörungen, welche ein Kugelzweieck von der ungefähren GröÙe Amerikas, das von Pol zu Pol geht, auf dem Äquator erzeugt. Er geht von einer homogenen Kugel ohne Wasserschicht aus, läßt die östliche Halbkugel

ungeändert und bringt auf der westlichen positive und negative Beläge, entsprechend dem übers Meer hervorragenden Festland und dem Wasser, an. Diese Annahme ist nicht wesentlich von der unsrigen verschieden; es war für uns nur bequemer, das Meer nicht durch einen Belag zu ersetzen. Dagegen vermögen wir nicht einzusehen, daß für den Äquator die östliche Halbkugel wenig Einfluß habe, da sich thatsächlich hier ein der Wirklichkeit entsprechender, positiver und negativer Belag gar nicht balancieren. Die Lotstörungen ermittelt *Bruns* nur beiläufig aus den Höhenstörungen, also an den Küsten etwas zu klein.

§ 35. **Zusammenwirkung der Störungen der 5 Kontinente.** Die Störungen  $h'$ , welche jeder Kontinent einzeln giebt, setzen sich zur gesamten Störungswirkung der fünf Kontinente einfach durch algebraische Addition zusammen. Als Normalniveau tritt dabei eine zum Gesamtschwerpunkt konzentrische Kugelfläche vom Radius  $R$  auf.

Denken wir uns nämlich fünf Kontinente auf der ursprünglich vorhandenen Kugel angenommen, so setzt sich für irgend einen Punkt der Oberfläche der Zuwachs des Potentials offenbar aus den Potentialen  $v$  zusammen, die nach der früheren Rechnung jeder Kontinent einzeln giebt. Was aber für die  $v$  gilt, gilt auch für die ersten Teile  $h_1$  der Störungen  $h$ , welche ja gleich  $v : G$  sind.

Außerdem entsteht nun eine Schwerpunktsverschiebung  $X$  und infolge derselben vermindert sich  $h$  um  $X \cos \Gamma$ , wenn  $\Gamma$  der Winkel ist, welchen die Richtung der Schwerpunktsverschiebung mit der Richtung vom Zentrum nach dem betreffenden Oberflächenpunkte  $P$  einschließt. Jedem Kontinent einzeln möge eine Schwerpunktsverschiebung  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , mit einem Winkel  $\gamma_i$  bezüglich der Richtung nach  $P$  entsprechen. Dann ist aber in hinreichender Annäherung

$$X \cos \Gamma = x_1 \cos \gamma_1 + x_2 \cos \gamma_2 + \dots + x_5 \cos \gamma_5,$$

wie man sofort erkennt, wenn man sich die Kontinente successive zur Kugel hinzugesetzt denkt und den hierbei von den Schwerpunktsverschiebungen  $x_1, x_2, \dots, x_5$  gebildeten Linienzug betrachtet. Die Gleichung zeigt, daß die Einflüsse der Schwerpunktsverschiebungen, also die zweiten Teile der  $h$ , bezüglich der einzelnen Kontinente sich bei der Gesamtwirkung ebenfalls algebraisch addieren.

Schließlich ist es offenbar auch gestattet, von allen  $h$ -Werten eine Konstante  $h_m$  abzuziehen, indem dies der Konstruktion einer Parallelfäche entspricht, die (falls nur die Konstante nicht gar zu groß ist) ebenso genau eine gestörte Niveaufäche vorstellt, wie die durch die  $h$  gegebene. Ob diese Konstante auf einmal oder in fünf Teilen angebracht wird, ist für den Effekt gleichgültig; das successive Vorgehen führt aber ganz von selbst zu einem solchen Wert der Konstanten, daß bei der Gesamtwirkung der Kontinente die Summe der  $h'$  für die ganze Oberfläche gleich null wird.

Behufs Ausführung der Addition der  $h'$  wurden die in Bezug auf den Meridian von Ferro östliche und westliche Halbkugel in stereographischer Projektion, mit Gradnetz von  $10$  zu  $10^0$ , benutzt. Die in der Tabelle S. 353 aufgeführten Mittelpunkte der Kontinente wurden eingezeichnet und um jeden herum Kreise von  $10$  zu  $10^0$  Zuwachs in  $\gamma$  aufgesucht. Dieses ist sehr leicht, da die Projektionen solcher Kreise wieder Kreise sind, deren Mittelpunkte alle auf einer Geraden liegen. Die Hilfskreise erhielten für jeden Kontinent eine andere Farbe, in welcher nun auch die Höhenzahlen  $h'$  angeschrieben wurden. (Die endgültige Zeichnung, Tafel I, enthält diese Kreise nicht mehr.)

Um nun Kurven gleicher Summen der  $h'$  zu erhalten, wurden Profile der entsprechenden Niveaufläche, insbesondere entlang der Parallelkreise, abgeleitet. Im letzteren Falle z. B. wurde der Parallelkreis auf Millimeterquadratpapier ausgestreckt und in seinen Schnittpunkten mit den Hilfskreisen eines ersten Kontinents die zugehörigen  $h'$  aufgetragen, deren Endpunkte aber durch eine Kurve verbunden. Auf diese letztere wurden die  $h'$  eines zweiten Kontinents aufgetragen u. s. f. Die letzten Kurven wurden durch Parallelen zur Abscissenaxe in  $100^m$  Äquidistanz geschnitten, die Schnittpunkte aber auf die Parallelkreise zurückgetragen. Das Resultat zeigt Tafel I.

Die Kurven gleichen  $h'$ -Wertes geben auch ein, wenngleich rohes Mittel, um die Lotstörung und die Abweichung des reziproken Krümmungsradius  $\varrho$  von  $\frac{1}{R}$  zu taxieren. Man kann sich dabei u. a. des graphischen Verfahrens bedienen, indem man für irgend ein Profil die  $h'$  als Ordinaten normal zu einer geradlinigen Abscissenaxe aufträgt, die Profilkurve zeichnet und über denselben Abscissen zunächst eine zweite Kurve konstruiert, deren Ordinaten den trigonometrischen Tangenten der Neigungswinkel der ersten Kurve gegen die Abscissenaxe proportional sind. Diese Ordinaten repräsentieren in irgend einem Maßstab die Lotstörungen. Indem man ferner auf dieselbe Art aus der zweiten Kurve eine dritte Kurve herleitet, erhält man Ordinaten proportional  $\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R}\right)$ , d. h. proportional den Störungen in  $1 : \varrho$ .

Übrigens lehrt schon der Augenschein, daß die Zusammenwirkung der Kontinente die für die Einzelkontinente gefundenen Zahlen für Lotablenkung und Krümmungsstörung im ganzen nicht bedeutend ändert, aber eher mildert als verschärft.

Wir müssen im Anschluß an Tafel I noch darauf hinweisen, daß die bisherigen Annahmen über die Dicke der Kontinentalplatten nicht ausreichen, um einen Zustand auf der physischen Erdoberfläche herbeizuführen, welcher dem wirklichen ähnelt. Mit den bisherigen Annahmen nämlich würden die Kontinente einfach überschwemmt.

Um dieses einzusehen, beachten wir zunächst, daß die Niveaufläche der  $h'$  von der ursprünglichen Meeresfläche (der Kugelfläche vom Radius  $R$  konzentrisch zu  $C$ , Fig. 56 S. 336) an irgend einer Stelle um  $h' + X \cos \Gamma$  absteht, wobei  $h'$  für dieselbe aus Tafel I zu entnehmen ist, während für die Bestimmung von  $X \cos \Gamma$  auf den nächstfolgenden Paragraphen, insbesondere die Angaben (8) verwiesen werden muß. Die Niveaufläche der  $h'$  liegt hiernach in Europa-Asien und Afrika um 600 bis 700<sup>m</sup> über der ursprünglichen Meeresfläche, in Amerika 200 bis 300<sup>m</sup>, in Australien etwa 50<sup>m</sup> über derselben. Die Niveaufläche der  $h'$  hat nun zwar gleiches Volumen mit der ursprünglichen Meeresfläche; da aber die Niveaufläche der  $h'$  an den Kontinenten emporsteigt, so schneiden diese aus dem Volumen derselben mehr aus, als aus dem der ursprünglichen Niveaufläche. Um den Mehrbetrag muß sich die gestörte Meeresfläche über die Niveaufläche der  $h'$  erheben. Mit Rücksicht auf das Flächenverhältnis für Meer und Land findet sich als Hebung des Meeresspiegels über die Niveaufläche der  $h'$  rund 200<sup>m</sup>.

Im Durchschnitt für die sämtlichen Kontinente liegt innerhalb derselben die gestörte Meeresfläche um  $500 + 200 = 700^m$  über der ursprünglichen Meeresfläche. Da wir aber als mittlere Höhe der Kontinente bezüglich letzterer Fläche 440<sup>m</sup> angesetzt haben, so würden die Kontinente überschwemmt werden. Dies verhindern wir, wenn wir letztere Zahl durch 1440<sup>m</sup> ersetzen; damit kommen 1000<sup>m</sup> Dicke vom spezifischen Gewicht 2,8 oder 1560<sup>m</sup> von der Dichtigkeit 1,8 zu den bisher für die Kontinentalplatten angenommenen 4000<sup>m</sup> von der Dichtigkeit 1,8. Da nun, abgesehen von den Böschungen der Kontinente, die Wirkungen der Dicke proportional sind, müssen alle bisher erhaltenen Zahlen im Verhältnis 4000 : 5560, d. h. um 0,4 ihres Betrages, vergrößert werden. Insbesondere gehen die 700<sup>m</sup> Höhenstörung der Meeresfläche innerhalb der Kontinente in rund 1000<sup>m</sup> über, sodaß nunmehr die Kontinente sich über die gestörte Meeresfläche gerade 440<sup>m</sup> erheben.

Man kann noch die Frage aufwerfen, ob die Verschiebung der Wassermassen nicht auch die Resultate wesentlich ändert. Dazu ist sie indessen zu gering; denn die Meeresfläche liegt im gestörten Zustande im allgemeinen kaum  $\pm 100^m$  von der ursprünglichen Lage entfernt, wie die Berechnung von  $h' + X \cos \Gamma$  zeigt. Die größte Senkung von rund 200<sup>m</sup> tritt östlich von Neuseeland ein, die größte Hebung im nördlichen Eismeer, woselbst sie an der asiatischen Küste auf rund 800<sup>m</sup> anwächst. Im allgemeinen sammelt sich das Wasser an den Küsten und die Wirkung ist eine kleine Verstärkung der hier berechneten Störungsbeträge, die aber in erster Annäherung vernachlässigt werden kann.

Die Zahlen der Tafel I sind nach dem Vorhergehenden um 0,4 ihres Betrages nach den neuen Annahmen über die Kontinental-

massen zu vergrößern. Die größte Amplitude der  $h'$  geht damit von rund 900 in rund 1300<sup>m</sup> über. Ohne indessen weiter auf die Einzelheiten der von Tafel I dargestellten Höhenstörungen  $h'$  einzugehen, wenden wir uns vielmehr sogleich zu der Frage, ob es überhaupt zulässig ist, die Störungen der Meeresfläche aus den Kontinentalmassen zu folgern. Um dieses zu entscheiden, müssen wir die entsprechenden Störungen der Schwerkraft berechnen und mit den Erfahrungen vergleichen. (Die Multiplikation mit 0,4 können wir hierbei vorerst weglassen und uns zunächst auf Tafel I beziehen.)

§ 36. Die Schwerestörungen. Bei der Berechnung der Schwerestörungen können wir uns sogleich alle Kontinente auf der Kugel vom Radius  $R$  mit dem Mittelpunkt  $C$ , Fig. 56 S. 336, angebracht denken. Als Begrenzung aller Massen nehmen wir die durch die  $h'$  gegebene gestörte Niveaufläche, dergestalt, daß etwa außerhalb liegende Massen auf dieselbe kondensiert gedacht werden und der Wert  $g$  der Schwerebeschleunigung für Punkte der Niveaufläche so berechnet wird, als läge alle Masse innerhalb.

Die ursprüngliche Schwerebeschleunigung auf der Kugelfläche vom Radius  $R$  konzentrisch zu  $C$  sei mit  $G$  bezeichnet, dann ist sie, insoweit die Kugelmasse in betracht kommt, im Abstände  $h''$  außerhalb in hinreichender Annäherung gleich

$$G \left( 1 - \frac{2h''}{R} \right). \quad (1)$$

Dies gilt auch, wenn  $h''$  negativ ist, weil wir die außerhalb der gestörten Niveaufläche liegenden Massen auf diese kondensiert denken.

Zu (1) tritt nun die Anziehung der störenden Massen, welche im wesentlichen als auf einer Kugelfläche vom Radius  $R$  liegend anzusehen sind. Nach S. 147 § 4 (8) können wir daher den Anteil der Schwerebeschleunigung aus diesen Massen hinreichend genau gleichsetzen

$$-\frac{v}{2R} + 2\pi k^2 \vartheta, \quad (2)$$

wenn  $v$  ihr Potential und  $\vartheta$  die Masse für die Flächeneinheit unterhalb des betreffenden Punktes bezeichnet.  $v$  ist aber gleich  $h_1 G$ , unter  $h_1$  den ersten Teil von  $h$ , d. h.  $h$  ohne Schwerpunktsverschiebung, verstanden, sodaß mit Bezug auf die Werte  $h'$  nach dem vorigen Paragraphen

$$h_1 = h' + h_m + X \cos \Gamma \quad (3)$$

wird, worin  $h'$  der Gesamtwirkung der Kontinente nach Tafel I entspricht, also gleich ist der Summe der  $h'$  für die einzelnen Kontinente, worin ferner  $h_m$  die Summe der Mittelwerte der  $h$  für die einzelnen Kontinente bezeichnet und  $X$  die Gesamtschwerpunktsverschiebung vorstellt, welche mit dem Radiusvektor nach dem betreffenden Punkte den Winkel  $\Gamma$  einschließt.

Die gestörte Schwerebeschleunigung in einem Punkte der gestörten Niveaufläche der  $h'$  ist hiermit, insofern für dieselbe  $h' = h_1 - h_m$  wird, gleich

$$g = G \left( 1 - \frac{2(h_1 - h_m)}{R} + \frac{h_1}{2R} + \frac{3\vartheta}{2\Theta_m R} \right). \quad (4)$$

In diesen Ausdruck führen wir den Mittelwert der Beschleunigungen für die ganze Niveaufläche ein. Der Mittelwert von  $h_1$  ist gleich  $h_m$ . Ferner ist der Mittelwert von  $3\vartheta : \Theta_m$ , wenn nur ein Kontinent vorhanden ist, für die ganze Niveaufläche gleich

$$\frac{3a'^2\pi\Theta D}{4\pi R^2\Theta_m},$$

d. i. für  $3\Theta D : \Theta_m = 4000^m$  gleich

$$1000 \frac{a'^2}{R^2},$$

also nach S. 338 (8\*) gleich dem Werte  $h_m$  für diesen Kontinent. Dasselbe findet sich bei Anwesenheit mehrerer Kontinente, wenn  $h_m$  alsdann auf ihre Gesamtwirkung bezogen wird. Hiermit ergibt sich der Mittelwert von (4) gleich

$$G' = G \left( 1 + \frac{h_m}{R} \right). \quad (5)$$

Verbindet man dies mit (4), so wird

$$g = G' \left\{ 1 + \frac{1}{R} \left[ -\frac{3}{2} h_1 + h_m + \frac{3\vartheta}{2\Theta_m} \right] \right\}. \quad (6)$$

Hierzu ist  $h_1$  direkt durch Summierung der von den einzelnen Kontinenten erzeugten  $h_1$  zu bilden, oder aus Formel (3) abzuleiten. Bei Anwendung dieser Formel ist für  $h'$  der durch die Tafel I gegebene Wert einzuführen und für  $h_m$  der Wert

$$h_m = 458 + 256 + 208 + 159 + 84 = 1165^m. \quad (7)$$

Der Betrag  $X$  und die Richtung der Schwerpunktsverschiebung, markiert durch die geographische Breite  $B$  und die Länge  $L$ , ist noch zu ermitteln. Ist  $x$  die Schwerpunktsverschiebung infolge des einzelnen Kontinents und zwar in einer durch die geographische Breite  $b$  und Länge  $l$  markierten Richtung, setzen wir ferner

$$\begin{aligned} x \cos b \cos l &= \xi \\ x \cos b \sin l &= \eta \\ x \sin b &= \zeta, \end{aligned}$$

wobei  $\xi, \eta, \zeta$  offenbar Projektionen von  $x$  auf drei zu einander rechtwinkelige Richtungen sind, so wird

$$\begin{aligned} X \cos B \cos L &= \Sigma \xi \\ X \cos B \sin L &= \Sigma \eta \\ X \sin B &= \Sigma \zeta. \end{aligned}$$



Nach S. 343, 349 und 351 bis 353 hat man folgende Werte von  $x$ ,  $b$  und  $l$ :

	Eur.-Asien	Afrika	Nord-Amer.	Süd-Amer.	Austr.
$x$	420 <sup>m</sup>	245 <sup>m</sup>	202 <sup>m</sup>	155 <sup>m</sup>	84 <sup>m</sup>
$b$	+ 48°	+ 7,5°	+ 51°	— 13°	— 25°
$l$	95°	37,5°	280,5°	318°	152°.

Hiermit fand sich (unter Anwendung eines Rechenschiebers):

$$\begin{aligned}
 X \cos B \cos L &= 235 & X &= 546^m \\
 X \cos B \sin L &= 237 & B &= 52^\circ \\
 X \sin B &= 435 & L &= 45^\circ \text{ östl. Ferro.}
 \end{aligned} \tag{8}$$

$\Gamma$  wird man am bequemsten einem Globus entnehmen, in welchem der zu  $B$  und  $L$  gehörende Punkt eingetragen ist.

Was  $\vartheta$  anbetrifft, welches im letzten Gliede von (6) auftritt, so hat man über Kontinenten

$$\frac{3\vartheta}{2\Theta_m} = \frac{3\Theta D}{2\Theta_m} = 2000^m, \tag{9}$$

dagegen über dem Meere gleich null, abgesehen von der Küstenzone über der Abböschung der Kontinente, wo dieser Quotient von 2000 bis null variiert.

Es sei hier noch bemerkt, daß  $g - G'$  als Schwerestörung im Sinne des dritten Kapitels aufgefaßt werden kann. Bereits S. 338 und 354 wurde darauf hingewiesen, daß die zum Gesamtschwerpunkt  $S$  konzentrische Kugelfläche vom Radius  $R$  für die Niveaufläche  $h'$  als Normalniveau erscheint, sich also zu ihr verhält, wie im zweiten Kapitel eine Niveaufläche zu ihrem Normalsphäroid. Insbesondere kann man im Anschluß an § 44 S. 259 die Niveaufläche  $h'$  als die Fläche  $W = W_0$  und die Kugelfläche um  $S$  als die Fläche  $U = W_0$  auffassen; denn der letzteren entspricht das erste Glied der Entwicklung von  $W$  nach Kugelfunktionen, nämlich das Glied  $k^2 \cdot \text{Masse} : R$ . Zu dieser Fläche gehört die normale Schwere  $G'$ , genau nach Maßgabe von (5), wie man sich leicht überzeugt, indem man die Anziehung der Gesamtmasse in der Entfernung  $R$  ermittelt.

### § 37. Fortsetzung: Numerische Werte.

Wenden wir die Formeln des vorigen Paragraphen zunächst auf einen einzelnen Kontinent, insbesondere Europa-Asien an, so erhalten wir nach § 31 S. 343 u. ff.

$$h_m = 458^m \quad x = 420^m$$

und hiermit aus den S. 353 gegebenen Werten von  $h'$  die  $h_1$  nachstehender Tabelle:



$\gamma$	$h_1$	$\Delta g \cdot R : G'$	$\Delta g : G'$
			Milliontel
0°	1382 <sup>m</sup>	+ 385 <sup>m</sup>	+ 61
10	1359	+ 419	+ 66
20	1287	+ 527	+ 83
30	1159	+ 719	+ 113
40	864	— 38	— 6
50	607	— 453	— 71
60	487	— 273	— 43
70	413	— 162	— 25
80	369	— 96	— 15
90	340	— 52	— 8
100	319	— 21	— 3
110	299	+ 9	+ 1
120	277	+ 42	+ 7
130	264	+ 62	+ 10
140	254	+ 77	+ 12
150	248	+ 86	+ 14
160	244	+ 92	+ 14
170	240	+ 98	+ 15
180	239	+ 99	+ 16

Die Werte der vorletzten Kolumne haben die Bedeutung

$$\frac{g - G'}{G'} R$$

und sind mit Rücksicht auf (6) des vorigen Paragraphen nach der Formel

$$\frac{\Delta g}{G'} R = - \frac{3}{2} h_1 + h_m + \frac{3 \vartheta}{2 \Theta_m} \tag{1}$$

berechnet. Die letzte Kolumne giebt  $\Delta g : G'$  in Millionteln oder sehr nahe Mikrons in der Länge des Sekundenpendels.

Um die Werte  $\Delta g \cdot R : G'$  zu erhalten, wurde bei  $\gamma = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$  und  $30^\circ$  für  $3 \vartheta : 2 \Theta_m$  der Wert nach (9) des vorigen Paragraphen gesetzt. Dagegen ergab sich für  $\gamma = 40^\circ$  dieser Quotient zu 800 mit Rücksicht darauf, daß von 4200<sup>km</sup> Zentrumsabstand bis zu 4600<sup>km</sup> dieser Quotient von 2000 stetig auf null sinkt und daß zu  $\gamma = 40^\circ$  ein Zentrumsabstand von 4440<sup>km</sup> gehört.

Die Werte wurden einer Kontrolle durch Einführung in die Formel (2) S. 255 unterworfen. Versteht man darin unter  $\psi$  und  $\Delta g : G$  bzw.  $\gamma$  und  $(g - G') : G'$ , so muß der Wert von  $N$  das  $h'$  im Zentrum des Kontinents werden. Um die Integration zu bewerkstelligen, konnte wegen der zwischen 30 und 40° stattfindenden raschen Änderung von  $\Delta g$  nicht ohne weiteres nach *Simpsons* Regel

vorgegangen werden, es wurden vielmehr die drei Teile von  $\frac{\Delta g}{G'} R$ , aus welchen sich dasselbe nach Maßgabe von (1) zusammensetzt, einzeln behandelt. Zunächst wurden also die Produkte  $h_1 \cdot F$  von  $10^\circ$  zu  $10^\circ$  gebildet und nach *Simpsons* Regel integriert. Der hieraus folgende Anteil von  $N$  ist

$$- \frac{3757}{5,730}.$$

Der Einfluß des konstanten  $h_m$  verschwindet bei der Integration. Das Glied  $3\theta : 2\theta_m$  beträgt, wenn man anstatt der abgeböschten Küste eine steilabfallende setzt, (die eigentliche Voraussetzung der Rechnung) von 0 bis  $4400^{\text{km}}$  Zentrumsabstand konstant  $2000^{\text{m}}$ . Mit Rücksicht darauf, daß  $1^\circ$  in  $\gamma$  gleich  $111^{\text{km}}$  ist, wurde  $F$  von 1100 zu  $1100^{\text{km}}$  berechnet und sodann die Integration der  $F$  nach *Simpsons* Regel bewirkt. Hiermit folgt als weiterer Anteil in  $N$

$$+ \frac{6380}{5,730}.$$

Mit dem vorigen vereinigt erhält man im Zentrum für  $N$ , d. i.  $h'$ , anstatt  $504^{\text{m}}$  nur

$$458^{\text{m}}.$$

Die Differenz beruht wesentlich darauf, daß gerade von  $50^\circ$  bis  $80^\circ$  in den  $h'$  und also auch in den  $h$ , starke negative Fehler stecken, auf die schon früher hingewiesen worden ist. Bei der entsprechenden Rechnung für den Punkt, welcher dem Zentrum des Kontinents Europa-Asien diametral gegenüber liegt, haben diese Fehler weniger Einfluß; in der That fand sich hier anstatt  $201^{\text{m}}$  der nicht sehr abweichende Wert  $215^{\text{m}}$ .

Ebenso zeigte sich bei Afrika und Australien, wofür die Rechnung auch ausgeführt wurde, eine bessere Übereinstimmung, da hier die Fehler kleiner sind. Für diese Kontinente fand sich zunächst:

$\gamma$	Afrika			Australien		
	$h_1$	$\Delta g \cdot R : G'$	$\Delta g : G'$	$h_1$	$\Delta g \cdot R : G'$	$\Delta g : G'$
			Milliontel			Milliontel
$0^\circ$	$1024^{\text{m}}$	$+ 720^{\text{m}}$	$+ 113$	$584^{\text{m}}$	$+ 1208^{\text{m}}$	$+ 190$
10	993	$+ 796$	$+ 124$	528	$+ 1296$	$+ 203$
20	891	$+ 919$	$+ 144$	273	$- 326$	$- 51$
30	618	$- 21$	$- 3$	170	$- 171$	$- 27$
40	408	$- 356$	$- 56$	124	$- 102$	$- 16$
50	314	$- 215$	$- 34$	101	$- 68$	$- 11$
60	262	$- 137$	$- 22$	85	$- 44$	$- 7$

	Afrika				Australien			
	$h_1$	$\Delta g \cdot R : G'$	$\Delta g : G'$	Milliontel	$h_1$	$\Delta g \cdot R : G'$	$\Delta g : G'$	Milliontel
70 <sup>m</sup>	229 <sup>m</sup>	— 88 <sup>m</sup>	— 14		74 <sup>m</sup>	— 27 <sup>m</sup>	— 4	
80	204	— 50	— 8		66	— 15	— 2	
90	186	— 23	— 4		60	— 6	— 1	
100	171	— 1	0		56	0	0	
110	160	+ 16	+ 2		52	+ 6	+ 1	
120	151	+ 29	+ 5		49	+ 10	+ 2	
130	145	+ 38	+ 6		47	+ 13	+ 2	
140	140	+ 46	+ 7		45	+ 16	+ 3	
150	136	+ 52	+ 8		44	+ 18	+ 3	
160	133	+ 56	+ 9		44	+ 18	+ 3	
170	132	+ 58	+ 9		43	+ 19	+ 3	
180	131	+ 59	+ 9		43	+ 19	+ 3	

$h'$  im Zentrum folgt hieraus anstatt gleich 523<sup>m</sup> und bezw. 417<sup>m</sup> zu 517<sup>m</sup> und 410<sup>m</sup>.

Die Tabellen zeigen, daß  $\Delta g$  auf den Kontinenten starke positive Werte, auf dem Meer in der Nähe der Küste starke negative Werte hat. Auf der Erdoberfläche hat man aber nach dem dritten Kapitel gerade das Gegenteil beobachtet, vergl. S. 226. Zwischen den aus Beobachtungen abgeleiteten  $\Delta g$  und denen obiger Untersuchung besteht allerdings in der Regel noch der Unterschied, daß bei ersteren  $g$  nur in gewöhnlicher Weise reduziert wird, also auf den Kontinenten von der Anziehung der Massen über dem Meere befreit, auf dem Meere dagegen von der Anziehung der Inselmassen nicht befreit ist, während in obiger Untersuchung  $g$  offenbar fürs Festland gerade so verstanden ist, wie es sich mittelst der von uns eingeführten Reduktion durch Kondensation gewisser Massen ergibt, und die auf den oceanischen Inseln beobachtete Schwerkraft um die Anziehung der Inselpfeiler vermindert werden muß, damit sie der Schwerkraft auf dem Meere selbst entspricht.

Prüfen wir nun, ehe wir dies weiter untersuchen, das Verhalten der Schwerestörung bei der Zusammenwirkung der Kontinente.

Wir setzen hier  $h_1 = h' + 1165 + 546 \cos \Gamma$  und entnehmen  $h'$  den Planigloben der Tafel I sowie  $\Gamma$  einem Globus, auf welchem der Punkt mit der geographischen Breite 52° und Länge 45° östl. Ferro eingetragen ist. Als Beispiel diene der Meridian in  $\pm 90^\circ$  östlicher Länge von Ferro. Für denselben ergaben sich folgende Zahlen, wobei gesetzt ist:

$$\frac{\Delta g}{G'} R = - \frac{3}{2} h_1 + 1165 + \left\{ \begin{array}{l} 2000^m \text{ auf Kontinenten} \\ 0^m \text{ auf dem Meere} \end{array} \right\}.$$

Geogr. Breite	$h'$	$\Gamma$	$h_1$	$\Delta g.R:G'$	$\Delta g:G'$	Bemerkungen
					Milliontel	
+ 90°	— 110 <sup>m</sup>	38°	1485 <sup>m</sup>	— 1063 <sup>m</sup>	— 167	Eismeer
+ 80	+ 100	32	1727	+ 574	+ 90	Asien
+ 70	+ 210	28	1856	+ 381	+ 60	„
+ 60	+ 260	26	1915	+ 292	+ 46	„
+ 50	+ 310	28	1956	+ 231	+ 36	„
+ 40	+ 330	33	1952	+ 237	+ 37	„
+ 30	+ 310	40	1893	+ 325	+ 51	„
+ 20	+ 230	47	1767	+ 514	+ 81	„
+ 10	+ 80	55	1557	— 1170	— 184	Nahe d. Küste*)
0	— 150	64	1253	— 715	— 112	Indischer
— 10	— 220	72	1113	— 505	— 79	Ocean
— 20	— 240	81	1010	— 350	— 55	„
— 30	— 240	91	915	— 208	— 33	„
— 40	— 220	100	851	— 112	— 18	„
— 50	— 150	109	838	— 92	— 14	„
— 60	— 90	118	820	— 65	— 10	Südliches
— 70	— 60	126	785	— 13	— 2	Eismeer
— 80	— 10	134	777	0	0	„
— 90	+ 20	142	755	+ 28	+ 4	„
— 80	+ 30	148	732	+ 72	+ 11	„
— 70	+ 40	152	725	+ 77	+ 12	„
— 60	+ 50	154	726	+ 76	+ 12	„
— 50	+ 60	153	740	+ 55	+ 9	Stiller
— 40	+ 50	147	758	+ 28	+ 4	Ocean
— 30	+ 30	140	778	— 2	0	„
— 20	+ 20	133	813	— 55	— 9	„
— 10	+ 10	126	855	— 118	— 18	„
0	— 50	117	868	— 137	— 21	„
+ 10	— 120	108	877	— 151	— 24	„
+ 20	— 20	99	1060	— 425	— 67	„
+ 30	+ 180	90	1345	+ 1147	+ 180	Nord-Amerika
+ 40	+ 270	81	1520	+ 875	+ 137	„
+ 50	+ 260	71	1602	+ 762	+ 120	„
+ 60	+ 220	62	1641	+ 703	+ 110	„
+ 70	+ 100	53	1592	+ 777	+ 122	„
+ 80	— 100	46	1443	— 1000	— 157	Nördl. Eismeer

\*) Wegen der Nähe der Küste ist hier  $\Delta g$  unsicher; der richtige Wert ist kleiner.

Die Zahlen für  $\Delta g$  zeigen wiederum, daß auf den Kontinenten die Schwerestörung positiv und auf dem Meere nahe den Kontinenten negativ ist, entfernt von denselben zwar positiv, aber geringwertig. Die Erhebung  $h'$  und die Schwerestörung haben im allgemeinen dasselbe Zeichen.

**§ 38. Diskussion der Resultate. Die störenden Massen der Erde.** In den letzten beiden Paragraphen haben wir gefunden, daß die Schwerestörungen auf den Kontinenten positiv sind, während sie auf dem Meere negativ sind oder doch nur kleine positive Werte haben. Jedenfalls führt unsere Untersuchung für die Sekundenpendellängen  $F$  auf dem Festland und  $M$  auf dem Meer zu dem Resultate

$$F > M.$$

An diesem Resultat ändert sich auch nichts, wenn nach Maßgabe des letzten Teiles von § 35 S. 356 alle Werte  $h'$  der Tafel I um 0,4 ihres Betrages vergrößert werden; es führt dies lediglich zu einer Vergrößerung der Schwerestörungen um ebenfalls 0,4 ihres Betrages.

Auch der Umstand, daß die Schwerestörungen für die Niveaufläche der  $h'$  berechnet sind, anstatt für die wirkliche Meeresfläche, ändert nichts, da diese letztere mit dem ihr zukommenden Normalsphäroid bei dem bisher festgehaltenen Genauigkeitsgrade dieselben Höhendifferenzen  $h'$  besitzt, wie die Niveaufläche der  $h'$  und ihr Normalsphäroid.

Das Resultat  $F > M$  steht aber in Widerspruch mit der Erfahrung. Nach dem dritten Kapitel § 31 S. 227 ist  $F = I - 230$  Mikrons, wenn  $I$  die Länge des Sekundenpendels auf den Inseln ausschließlich der Kondensationsreduktion für die Inselpfeiler bedeutet. Es ist also  $F < I$ . Um dieses mit der Ungleichung  $F > M$  in Übereinstimmung zu bringen, müßte man annehmen, daß die Länge des Sekundenpendels auf dem Meere um etwa vierhundert Mikrons kleiner sei als auf den Inseln. Dieses ist aber nicht annehmbar, denn sowohl nach dem, mittleren Verhältnissen angepassten Beispiel am Schlusse des § 17 S. 312, wie nach den (S. 227 erwähnten) Berechnungen von *Faye* führt die Anziehung der Inselpfeiler nur zu einem Betrage von etwa 250 Mikrons für die Differenz  $I - M$ . Zur Erklärung einer größeren Differenz  $I - M$  müßte man daher voraussetzen, daß unterhalb der Inselpfeiler die Erdkruste ungewöhnlich dicht sei.

Solange nun  $M$  nicht durch Beobachtungen der Schwerkraft auf dem offenen Meere mit  $F$  direkt vergleichbar ist, erscheint es das natürlichste, von der zu grunde liegenden Voraussetzung, daß die Kontinentalmassen Störungsmassen vorstellen, ganz abzusehen, anstatt dessen aber anzunehmen, daß die *Wirkung der Kontinental-*

*massen mehr oder weniger kompensiert wird durch eine Verminderung der Dichtigkeit der Erdkruste unterhalb der Kontinentalmassen*, dergestalt, daß von einer gewissen Tiefe unterhalb des Meeresniveaus an bis zur physischen Erdoberfläche vertikale Prismen von gleichem Querschnitt annähernd gleiche Massen enthalten, wo man die Prismen auch annehmen möge.

Entsprechend dieser Voraussetzung muß die Erdkruste unterhalb des Meeresbodens etwas dichter sein, als unterhalb der Kontinentalmassen. Nehmen wir an, daß der Dichtigkeitsunterschied bis zur Tiefe von 5 Mln. reicht, so genügt zur Kompensation der Kontinentalmassen ein Betrag desselben gleich 0,2. Die Kontinente erscheinen hiermit als Schollen der Erdkruste, welche etwas geringere Dichtigkeit haben, als letztere im allgemeinen. Ohne auf die physikalische Erklärung eines solchen Zustandes einzugehen, erinnern wir an die bereits im dritten Kapitel § 31 S. 228 besprochene Thatsache, daß in der Regel Gebirge durch unterirdische Massendefekte mehr oder weniger kompensiert sind, eine Thatsache, welche zu gunsten der oben eingeführten Voraussetzung über die Kompensation der Kontinentalmassen spricht.

Diese Voraussetzung ist auch die einfachste zur Erklärung der durchschnittlichen Gleichheit der Längen  $F$  und  $K$  des Sekundenpendels für das Innere des Festlands und die Küsten, vergl. S. 227.

Mit ihr steht auch nicht in Widerspruch, daß nach dem eben angegebenen Orte  $F < I$  ist. Denn wenn auch die Dichtigkeit der Erdkruste unterhalb der Kontinente geringer ist als unter dem Meere, so wird man wegen der geringen Ausdehnung der in betracht kommenden kleinen Inseln doch nicht voraussetzen müssen, daß sich die Dichtigkeit unterhalb der Inseln wie diejenige unterhalb der Kontinente verhält. Stimmt sie aber wesentlich mit derjenigen unter dem Meere überein, so erklärt sich der Überschuß von  $I$  über  $F$  durch die Anziehung der Inselmasse, wie oben bereits angedeutet wurde.

In welchem Grade die störende Wirkung der Kontinentalmassen durch die darunter befindlichen Massendefekte kompensiert wird, läßt sich zur Zeit genau nicht sagen. Jedenfalls aber darf man mit ziemlicher Sicherheit nach dem Vorhergehenden annehmen, daß *das Geoid vom Normalsphäroid weit weniger abweicht, als Tafel I angiebt*. Wenn eine Überkompensation stattfände, so würden sich die Vorzeichen der Höhenabweichungen sogar umkehren. Mit Rücksicht auf das oben Gesagte ist jedoch vor der hand kein Grund vorhanden, eine wesentliche Abweichung von der genauen Kompensation zu vermuten.

Die Kompensation ist selbstverständlich nur als eine im großen und ganzen stattfindende zu verstehen. Namentlich werden an den Küsten beträchtliche Störungen der Lotrichtungen und des Krümmungsradius eintreten. Während aber nach den der Tafel I zu grunde lie-

genden Voraussetzungen die Gradmessungen die Größe der Erde immer zu klein geben würden, wird in einigem Abstand von der Küste nunmehr die Störung des Krümmungsradius gering anzunehmen sein, wodurch *der Wert der Gradmessungen zur Bestimmung der Gestalt und Größe der Erde im allgemeinen erheblich wächst.*

Die einzige Beobachtungsreihe für die Schwerkraft auf dem Ocean selbst, welche bis jetzt bekannt wurde, ist diejenige, welche *Will. Siemens* 1875 am Bathometer auf dem Schiffe *Faraday* anstellen liefs (vergl. auch S. 256). Der Mitteilung in den *Phil. Transact.* von 1876 Bd. 166 II entnehmen wir auszugsweise von S. 684 und 685 folgende Zahlen\*):

Tag	Geograph. Position		Bathom.- Ablesung	Tiefe in Faden
	Nördliche Breite	Westliche Länge v. Gr.		
Okt. 15	Victoria Docks		0	2
„ 25	51° 25'	26° 25'	2130	1900
„ 26	51 7	31 14	2680	2000
„ 27	—	—	2870	2100
Okt. 29	47 50	47 0	201	197
„ 29	47 34	48 23	100	100
„ 31	45 5	54 28	218	204
„ 31	45 10	54 14	55	54
Nov. 1	45 10	54 18	50	58
„ 3	45 6	54 26	111	100
„ 4	45 11	54 20	70	64
„ 7	46 45	47 17	388	353
„ 7	46 35	46 57	799	698
„ 7	46 26	46 20	608	503
„ 8	46 23	41 11	2789	2516
„ 10	48 12	33 12	2388	2320
„ 11	48 49	28 55	1907	1861
„ 11	48 56	28 3	1615	1700
„ 24	Victoria Docks		5	2

An den Bathometerablesungen des zweiten Theiles der Tabelle sind Korrekturen für Temperatur und Luftdruck angebracht; im ersten Theil scheinen sie zu fehlen, doch sind sie nicht erheblich und betragen keinesfalls 20<sup>p</sup>. Die Tiefen des ersten Theiles waren zur Zeit der Beobachtungen bereits aus früheren Lotungen bekannt, diejenigen des zweiten Theiles aber noch nicht; sie wurden erst gleichzeitig mit den betreffenden Bathometerablesungen ermittelt und zwar dergestalt, daß letztere immer bei Bekanntwerden des Lotungsergebnisses bereits ausgeführt waren.

\*) Eine deutsche Ausgabe ist unter Mitwirkung des Verfassers 1878 bei *Jul Springer* in *Berlin* erschienen in der Schrift: „*Die Eisen- und Stahl-Industrie in England. Der Bathometer.*“ Vorträge von Dr. C. Will. Siemens. — Auf dem Schiffe befanden sich zwei Bathometer, ein großes und ein kleines. „Beide Instrumente wurden sorgfältig beobachtet.“ Die Tabelle giebt die Resultate „dieser Beobachtungen“. Hierbei ist aber auffallend, da beide Instrumente sicherlich etwas verschiedene Skalen gehabt haben, daß sonach Mittelwerte aus nicht unmittelbar vergleichbaren Ablesungen gebildet sein müßten!



Wegen der Veränderung der Schwerkraft mit der Breite ist keine Korrektur angebracht: Die Bathometerablesungen folgen bereits ohne eine solche den Tiefen in Faden unabhängig von der Breite so regelmässig, daß das Bedürfnis nach einer solchen Korrektur gar nicht entsteht. Auch einige Messungen auf dem englischen Festlande zeigten nur einen sehr geringen Einfluß der Breite.

Wenn man nun aber bedenkt, daß in den geographischen Breiten, auf welche sich die Beobachtungen erstrecken, eine Breitendifferenz von  $3^\circ$  die Schwerkraft ebenso sehr beeinflusst, wie ein 2000 Faden =  $3658^m$  starker, unterhalb des Beobachtungsortes allseitig plattenförmig ausgehnter Massendefekt von der Dichtigkeit 1,8, so muß man es geradezu rätselhaft finden, daß die vorstehende Beobachtungsreihe keinen Einfluß der Breite verrät — um so mehr, als starke Änderungen der Breite nicht nur ein Mal, sondern mehrere Male stattfinden. Die Beobachtungsreihe ist hiernach jedenfalls an irgendwelche abnorme und seltsame Umstände geknüpft, und es wäre gewagt, aus ihr irgend einen Schluß auf das Verhalten der Schwerkraft auf dem Meere im Vergleiche zum Festlande zu ziehen.

Zu der Anschauung, daß die sichtbaren Massenanhäufungen der Erdkruste durch unsichtbare kompensiert seien, gelangte schon *Pratt* auf grund seiner Diskussion der Lotablenkungen und Schwerebeobachtungen in Ostindien und dem Himalaya (vergl. auch *Clarke, Geodesy* p. 98). Er denkt sich, daß die erkaltende Erdrinde sich in vertikaler Richtung ungleich zusammenzog und an den Stellen Hervorragungen entstanden, wo die geringere Zusammenziehung stattfand.

Seine Untersuchungen finden sich außer an dem S. 114 angegebenen Orte in den *Philosophical Transactions* 1855, 59 und 71. Besonders ist die letzte Abhandlung zu vergleichen: *On the Constitution of the Solid Crust of the Earth*, p. 335–357. Erst hier gelangt *Pratt* an der Hand der Schwerebeobachtungen zu sicheren Ergebnissen (p. 335 bespricht er auch ältere Anschauungen). Wenn *Pratt* allerdings annimmt (1859 vol. 149 p. 747), daß in jeder Vertikalen der Erdrinde sozusagen die Masse konstant ist, abgesehen von lokalen Störungen, so dürfte dies vielleicht etwas zu weit gegangen sein. Für Ostindien und den Himalaya gelangt er aber mit dieser Annahme zu recht befriedigenden Ergebnissen (p. 355–356). Die Tiefe, bis zu welcher die Ausgleichung der Massen erfolgt, wird etwa 200 miles, d. i. ca.  $300^{km}$  oder 40 Mln.

Nach *G. H. Darwin, American Journ.* 1882 Bd. 24, hat *Stokes* ebenfalls die Ansicht, daß unterhalb jedes Kontinents ein Massendefekt sei.

Auch *Faye* ist zu dieser Ansicht gelangt, vergl. seine Abhandlungen in den *Comptes rendus* 1880 Bd. 90 S. 1185 und S. 1444. Er macht darauf aufmerksam, daß in  $4000^m$  Tiefe unter den Kontinenten eine sehr hohe Temperatur bestehe, am Meeresboden in dieser Tiefe aber nur eine niedrige Temperatur vorhanden sei. Dies allein bedingt schon einen Dichtigkeitsunterschied. Außerdem nimmt er an, daß unterhalb des Meeres die Abkühlung des Erdkörpers viel rascher erfolgte, als an den Kontinenten.

Wir haben hier auch der Untersuchungen von *Ph. Fischer* in seinem Werke: *Untersuchungen über die Gestalt der Erde*. Darmstadt 1868, zu gedenken.

*Ph. Fischer* betrachtet zunächst die Störungen der Lotrichtung und der Schwerkraft in einem bestimmten Punkte; er findet jene sehr groß, diese klein, im Gegensatz zu den Erfahrungen bei der Ausgleichung der Gradmessungen und Pendelbeobachtungen. Bei den Gradmessungen findet er den Widerspruch erklärt durch die Eigenschaft der Rechnungsmethode,



bei welcher sich die absoluten Lotstörungen verstecken können (vergl. hierzu Bd. 1 S. 609 § 11). Bei den Pendelbeobachtungen findet er die Erklärung des Widerspruchs darin, daß durch die Anziehung der Kontinente die Meeresfläche sich über das ungestörte Niveau hebt und daß dieser Erhebung eine Abnahme der Schwerkraft im Meeresniveau entspricht, daß man es also nicht mehr mit Störungen der Schwerkraft für einen bestimmten Punkt zu thun hat, sondern zugleich noch mit Störungen wegen Verschiebung des Niveaus. Diese Erhebung der Meeresfläche nahebei und unterhalb der Kontinente bzw. die Senkung der Meeresfläche entlang des Oceans entsprechen nach seiner Meinung der beobachteten Thatsache, daß die Schwerkraft auf den Kontinenten gegen die bekannte Interpolationsformel zu kleine, auf den oceanischen Inseln zu große Werte giebt.

Hier ist nun *Ph. Fischer* offenbar in seinen Untersuchungen nicht weit genug gegangen. Ganz abgesehen davon, daß die Vergleichung der Beobachtungen mit der Interpolationsformel nur Sinn hat, wenn man als normales Niveausphäroid ein solches nimmt, welches konzentrisch zum gestörten Erdschwerpunkt ist, hat er nicht eingehend genug die gestörte Schwerkraft im gestörten Meeresniveau untersucht, sonst müßte er bemerkt haben, daß ein Widerspruch mit der Erfahrung besteht.

Durch die wenig kritische Auffassung der Resultate *Ph. Fischers* durch andere Gelehrte ist die Ansicht von der allgemeinen Depression des Meeres weit verbreitet worden (*A. Fischer, Astronom. Nachr.* 1876 Bd. 88 Nr. 2094, 2095 und 2104 teilt sie indessen nicht; doch sind seine Ansichten nicht hinreichend motiviert und, wie uns scheint, z. T. unzutreffend).

Man hält sich von dieser allgemeinen Depression um so mehr überzeugt, als die im dritten Kapitel § 45 S. 262 erwähnten Näherungsformeln die Existenz derselben mit Rücksicht auf die Anomalieen der Schwerkraft anscheinend bestätigten. Die Wertlosigkeit dieser Formeln zeigt aber beispielsweise die Tabelle von S. 363 sehr drastisch: hier entsprechen  $h'$  und  $G'$  den Symbolen  $N$  und  $\gamma$  in (1) S. 262; aber es stimmen nicht einmal die Vorzeichen von  $h'$  und  $-\frac{2R}{3G'} \Delta g$  überein.

**§ 39. Berechnung des Einflusses der lokalen Massenordnung auf die Lotrichtung.** Wir sehen von der Krümmung der Niveauflächen ab und betrachten demgemäß die Niveaufläche des Punktes  $P'$ , für welchen die Anziehung berechnet werden soll, als Ebene. In derselben denken wir uns konzentrisch zu  $P'$  ein System von Kreisen angenommen, welche durch ein System von radialen Strahlen in krummlinige Vierecke zerlegt werden, innerhalb welcher die Erhebung  $h$  des Terrains über die Niveaufläche von  $P'$  als konstant betrachtet werden kann. Vergl. § 18 im 3. Kap. S. 169 u. ff.

Setzen wir nun konstante Dichtigkeit  $\Theta_0$  in der ganzen in betracht zu ziehenden Umgebung von  $P'$  voraus, so würde von Lokalanziehung keine Rede sein, wenn das Terrain innerhalb derselben eben wäre. Es kommt daher als störend nur die Anziehung derjenigen Massen zur Geltung, die über einer beliebigen Niveaufläche liegen oder unterhalb derselben fehlen. Von dieser Anziehung wird vielfach nur die nordsüdliche, oftmals aber auch die ostwestliche Komponente zu berechnen sein.

Um für ein Viereck zwischen den Kreisen vom Radius  $a_i$  und  $a_k$ , sowie den Strahlen  $l$  und  $m$ , die unter  $\varphi_i$  und  $\varphi_m$  gegen die Nordrichtung geneigt sind, Fig. 59, diese Anziehungskomponenten zu erhalten, berechnen wir zunächst die horizontale Anziehung des über dem Flächenelement  $dq$  der Horizontalebene (Niveaufläche) von  $P'$  liegenden prismatischen, bis zum Terrain in der Höhe  $h$  reichenden Massenelementes. Werden vertikale Erhebungen über der Horizontalebene im allgemeinen mit  $z$  bezeichnet, so ist diese horizontale Anziehung gleich

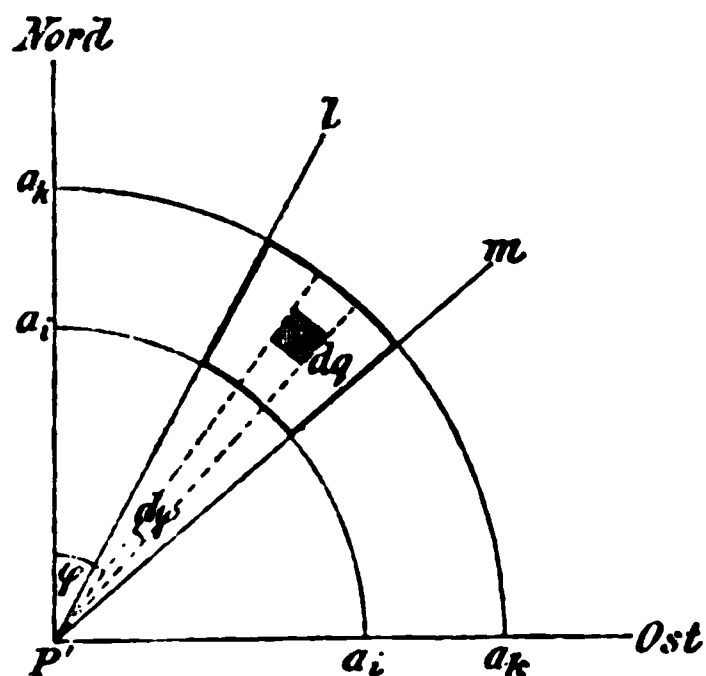


Fig. 59.

$$k^2 \Theta_0 dq \int \frac{a dz}{\sqrt{a^2 + z^2}^3}.$$

Dieses Integral, welches von  $z$  gleich null bis  $z = h$  zu erstrecken ist, wird gleich

$$k^2 \Theta_0 \frac{h dq}{a \sqrt{a^2 + h^2}}, \quad \text{d. i.} \quad k^2 \Theta_0 h d\varphi \frac{da}{\sqrt{a^2 + h^2}},$$

wenn  $dq = a d\varphi da$  gesetzt wird. Denselben Ausdruck findet man für die Anziehung einer unterhalb der Horizontalebene fehlenden Masse und zwar mit richtigem Zeichen, wenn  $h$  wie üblich für eine unterhalb des angenommenen Horizontes gelegene Terrainstelle negativ genommen wird.

Es folgt nun als Horizontalanziehung aller im Winkelraum  $d\varphi$  des betrachteten Vierecks, also zwischen  $a_i$  und  $a_k$  liegenden Masse:

$$k^2 \Theta_0 h d\varphi \int_{a_i}^{a_k} \frac{da}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad \text{d. i.} \quad k^2 \Theta_0 h d\varphi \log \text{nat} \frac{a_k + \sqrt{a_k^2 + h^2}}{a_i + \sqrt{a_i^2 + h^2}}.$$

Multipliziert man dies mit  $\cos \varphi$  und integriert von  $\varphi = \varphi_i$  bis  $\varphi_m$ , so ergibt sich die nach Norden gerichtete Horizontalanziehung des betreffenden Vierecks; dasselbe mit  $\sin \varphi$  gibt die nach Osten gerichtete Komponente. Bei der Integration ist der Faktor von  $d\varphi$  im letzten Ausdruck konstant. Indem wir das Resultat derselben noch mit der Schwerebeschleunigung  $G = \frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R$  dividieren und mit  $\rho'' = 206265$  multiplizieren, erhalten wir die Anteile an der nördlichen bzw. östlichen Ablenkung des aufgehängten Lotes, welche das betreffende Viereck giebt, in Sekunden.

Ihre Summe für alle Vierecke der Umgebung bezeichnen wir mit  $\xi$  und  $\eta$ . Es ist dann wie in Bd. 1 S. 516:



Die erste Formel (4) empfiehlt sich für Radian, deren Beträge in geometrischer Progression wachsen. Es eignet sich diese Art der Zunahme aber nicht in der nächsten Umgebung, sondern erst in größeren Abständen. Für die nähere Umgebung empfiehlt sich eine Zunahme in arithmetischer Progression und damit die zweite Formel (4).

In der näheren Umgebung wird man auch am ersten noch Veranlassung haben, die genauere Formel (5) oder sogar (3) herbeizuziehen. Den Radius  $a_1$  wird man immer so klein wählen können, daß der Einfluß der eingeschlossenen Masse verschwindet. Wie schon eingangs erwähnt, kommt es dabei nicht auf den ganzen Betrag von  $h$  an, sondern auf die Schwankungen. Ist deren Amplitude  $\Delta h$ , so kann die Gesamtwirkung der betreffenden Masse auf  $\xi$  z. B. nur ein Bruchteil der Anziehung der nördlichen oder südlichen Hälfte eines Cylinders vom Radius  $a_1$  und der Höhe  $\Delta h$  sein, d. i. für  $\Theta_0 = \frac{1}{2} \Theta_m$

$$0,0077'' \Delta h \log \text{nat} \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + \Delta h^2}}{\Delta h},$$

also für  $\Delta h = 1^m$  und  $a_1 = 25^m$  nur ein Bruchteil von  $0,03''$ .

Wenn es sich darum handelt, *ungleiche Dichtigkeiten* bis zu einer Tiefe  $H'$  unterhalb  $P'$  zu berücksichtigen, so wird man in obiger Rechnung für jedes Viereck eine mittlere Dichtigkeit  $\Theta$  anstatt  $\Theta_0$  einzuführen haben. Die Annahme einer mittleren Dichtigkeit für alle zu einem Viereck bis zur Tiefe  $H'$  gehörende Masse reicht wohl immer aus, da im allgemeinen der Betrag der Anziehung von der Tiefe nicht wesentlich abhängt.

Durch die bisherige Rechnung aber wird zunächst nur die Anziehung der positiven und negativen Masse zwischen der Niveaufläche von  $P'$  und dem Terrain berücksichtigt. Jetzt ist noch die Anziehung des zwischen dieser Niveaufläche und der um  $H'$  tieferen zu ermitteln. Dazu dienen wieder die Formeln (1) und (2). In denselben ist aber für  $\Theta_0$  zu setzen die besondere Dichtigkeit  $\Theta$  oder

$$\Delta \Theta = \Theta - \Theta_0, \quad (6)$$

wobei man  $\Theta_0$  den nächstgelegenen Massen entsprechend annehmen kann, damit diese aus der Rechnung verschwinden. Ferner ist für  $h$  durchaus der konstante absolute Wert von  $H'$  zu setzen.

Zu den Ausdrücken (1) und (2), in denen aber, wie bemerkt,  $\Theta$  anstatt  $\Theta_0$  zu schreiben ist, welches Symbol nummehr unter das Summenzeichen gehört, treten dann noch folgende Teile für  $\xi$  und  $\eta$ :

$$\xi_{\text{in Sek.}} = \frac{3 \varphi'' H'}{4 \Theta_m \pi R} \sum (\sin \varphi_m - \sin \varphi_l) \Delta \Theta \cdot F' \quad (7)$$

$$\eta_{\text{in Sek.}} = \frac{3 \varphi'' H'}{4 \Theta_m \pi R} \sum (\cos \varphi_l - \cos \varphi_m) \Delta \Theta \cdot F' \quad (8)$$

mit

$$F' = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{H'^2}{\left( \frac{a_k + a_i}{2} \right)^2} \right\} \times \log \text{nat} \frac{a_k}{a_i} \text{ oder } \frac{a_k - a_i}{\frac{1}{2} (a_k + a_i)} . \quad (9)$$

Die Anwendbarkeit dieser Formeln ist an die Bedingung gebunden, daß man  $\Delta \Theta$  bis zu einem Umkreis  $a_i$  als konstant ansehen darf, für welchen der Quotient  $H' : \left( \frac{a_k + a_i}{2} \right)$  bereits ein kleiner Bruch ist.

§ 40. Fortsetzung: Die Ausführung der Rechnung. Zahlreiche Berechnungen von Lokalanziehungen finden sich in dem Hauptwerke der englischen Vermessung\*). Hierbei wurde  $\Theta_0 = \frac{1}{2} \Theta_m$  gesetzt und  $a$  in der Regel der Reihe nach gleich 100, 200, 300, 400, 500 Fufs engl. genommen (1. Gruppe), sodann wachsend von 500 zu 500 Fufs bis 5000 Fufs (2. Gruppe), endlich weiter in geometrischer Progression mit dem Verhältnis 7:6 bis  $a_{17}$  oder  $a_{25}$  (3. Gruppe). Unter Umständen fand für außerhalb der 3. Gruppe liegende Massen bis zu 12 geogr. Meilen und mehr Abstand eine Schätzung statt. Die normale Berechnung ging aber nach den angegebenen Daten nur bis etwa  $15^{\text{km}}$  oder 2 geogr. Meilen.

Da man nur  $\xi$  zu berechnen hatte, nahm man nach dem Vorgange von *Hutton* die Werte  $\varphi$  dergestalt, daß die Sinusdifferenz für Formel (1) stets 0,1 betrug. Man setzte also im 1. Quadranten  $\varphi$  der Reihe nach gleich

0°	0'	30°	0'
5	44	36	52
11	32	44	26
17	27	53	8
23	35	64	9
30	0	90	0.

Es erleichtert diese Wahl die Rechnung einigermaßen, indem man damit den Faktor  $(\sin \varphi_m - \sin \varphi_i)$  konstant gleich 0,1 erhält. Aber es scheint uns doch, als sei wenigstens das Intervall von  $64^0 9'$

\*) *Ordnance Trigonometrical Survey of Great Britain and Ireland. Principal Triangulation.* London 1858. Seite 583, 606 und 624 bis 664. Es dürfte jedem, der sich mit dergleichen Arbeiten beschäftigen will, das Studium des trefflichen Werkes auch an den betreffenden Stellen anzuraten sein.

Man findet hier S. 576 auch die Anziehung eines *rechtwinkligen Parallelepiped*s behandelt (für Tafelländer brauchbar).

Auch *C. A. F. Peters* giebt eine Formel für die Anziehung des rechtwinkligen Parallelepipedes, *Astronom. Nachr.*, 1855 Bd. 40, Nr. 939, S. 46, sowie für eine *Pyramide*, *Bulletin de la Classe physico-mathém. de l'Académie de St. Pétersbourg*, t. III, p. 219.

Vergl. auch *Dahlander, Poggendorffs Annalen*, Bd. 117, 1862.

bis  $90^{\circ}0'$  zu groß. Innerhalb dieses Intervalls geht  $\cos \varphi$  von 0,44 auf null herab, sodaß die Rechnung mit einem Mittelwerte von  $h$  bei einigermaßen unebenem Terrain für den betreffenden Anteil in § keine genügende Annäherung geben kann.

Bei der Einteilung in Vierecke ist nämlich offenbar darauf zu achten, daß die der Annahme eines konstanten  $h$  entsprechende Planierung des Terrains die Anziehung bezw. deren Komponente nicht merklich ändert, daß mithin Verschiebungen der Ausgleichsmassen von einem Rand zum andern keinen erheblichen Einfluß haben. Da aber die Anteile in § dem  $\cos \varphi$  proportional sind, so darf dessen Änderung in jedem Vierecke nur eine mäßig große sein. Wir würden daher im Falle praktischer Rechnung das letzte Intervall über  $64^{\circ}9'$  hinaus noch weiter unterteilen.

Um sich praktisch eine Vorstellung von der Unsicherheit zu verschaffen, welche im Endresultat durch die Schwankungen von  $h$  innerhalb je einer Abteilung entsteht, kann man einzelne besonders beachtenswerte Vierecke halbieren und ihren Einfluß nochmals berechnen u. s. f. Dabei ist zu erinnern, daß die betreffenden Fehler für größere Gruppen benachbarter Vierecke sich anhäufen können.

In dem Werke über die bayerische Landesvermessung finden sich Ermittlungen der Lokalanziehungen für 2 Stationen\*). Hier wurden § und  $\eta$  berechnet und  $\varphi$  demnach in arithmetischer Progression fortschreitend angenommen. Ebenso die  $a$ , wenn auch für mehrere Gruppen mit verschiedenem Intervall. Die äußersten Kreise erstreckten sich bis zu etwa 45 Meilen, alle Massen umfassend, die beide Stationen merklich verschieden beeinflussten. Auch hier fand man die Annahme  $\Theta_0 - \frac{1}{2} \Theta_m$  ausreichend. Die größere Ausdehnung des benutzten Gebietes in Bayern gegenüber England erklärt sich durch die Absicht, die naheliegenden Alpen zu berücksichtigen.

Um  $h$  für ein Viereck zu finden, bedient man sich in der Regel mit Vorteil der äquidistanten Horizontalkurven. Denken wir uns ein Viereck von mehreren solchen durchschnitten, Fig. 60, so ergibt sich  $h$ , indem man die im Viereck enthaltene Masse durch die Grundfläche dividiert. Man wird am besten so vorgehen, daß man, wie Fig. 60 zeigt, das betreffende Viereck

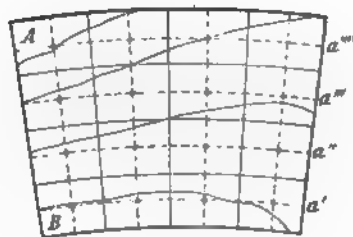


Fig. 60.

\*) Die bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage. München 1873. S. 768 bis 768. Auch dieses Werk ist für Details der Berechnung nachzusehen.

durch äquidistante Linien in kleinere Vierecke zerteilt, für die Mitte eines jeden die Höhe interpoliert (wobei eben die Horizontalkurven sehr nützlich sind) und dann zunächst für die Werte, die zu gleichem Radius gehören, Mittel bildet. Im Falle der Figur ist sodann zu setzen, wenn  $h' \dots h''''$  die Mittelwerte und  $a' \dots a''''$  die zugehörigen Radien sind:

$$h = \frac{a'h' + a''h'' + a'''h''' + a''''h''''}{a' + a'' + a''' + a''''}. \quad (1)$$

Dieses Verfahren scheint uns wenigstens bei kleinen, nur durch wenige Kurven zerlegten Vierecken richtiger und zweckmäßiger als dasjenige, mit Hilfe der Inhalte der Horizontalschnitte (welche sich allerdings mit dem Planimeter leicht ermitteln lassen) die Kubizierung zu bewerkstelligen. Denn bei letzterem zeigt sich als Übelstand, daß Teile z. B. bei  $A$  und  $B$  übrigbleiben, auf welche die Formeln der mechanischen Quadratur nicht recht passen. Dieser Übelstand kann jedoch von unerheblichem Einfluß sein, wenn die Teile von der Art  $A$  und  $B$  infolge eines relativ zu den Dimensionen des Vierecks sehr dichten Systems von Horizontalkurven verhältnismäßig klein sind. Dann kann man setzen (vergl. S. 337 Anm. u.)

$$h = h_0 + \frac{\Delta h}{y_0} \left( \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right). \quad (2)$$

Hierin bezeichnen  $y_0, y_1 \dots$  die Flächeninhalte der Horizontalschnitte in aufsteigender Reihe,  $h_0$  die Höhe des tiefsten Schnittes  $y_0$  und  $\Delta h$  das Höhenintervall. Als tiefster Schnitt  $y_0$  ist das Viereck selbst zu nehmen, als  $y_1$  der Inhalt der Schnittfläche zwischen der 1. Kurve und dem Viereckscontour.\*) Übrigbleibende, in der Formel nicht berücksichtigte Kuppen kommen bei der vorausgesetzten relativen Dichtigkeit der Kurven nicht in betracht.

Welches Verfahren man auch zur Ermittlung der Durchschnittshöhen  $h$  wählen mag, so ist stets der Umstand günstig, daß eine große Sorgfalt überhaupt nicht erforderlich, insoweit zufällige Fehler in den  $h$  in betracht kommen. Fassen wir z. B. die 3. Gruppe von Vierecken der *Ordnance Survey*, vielleicht an Zahl 400, ins Auge, so erhalten wir zunächst deren Beitrag zu  $\xi$  in Sekunden gleich

$$0,00039 \log \text{nat} \frac{a_k}{a_i} \cdot \Sigma h,$$

wobei  $\log \text{nat} \frac{a_k}{a_i} = \log \text{nat} \frac{7}{6} = 0,15$  ist. Beträgt der mittlere zufällige Fehler in  $h$  aber  $\mu_h$ , so wird der entsprechende mittlere zufällige Fehler in  $\xi$  gleich

\*) Die *Bayerische Landesvermessung* S. 764 wendet eine etwas andere Formel an; die unsrige ist vielleicht vorzuziehen.



$$0,00039.0,15.20 \mu_h, \text{ d. i. } 0,0012 \mu_h,$$

mithin für  $\mu_h = 100^m$  erst  $0,12''$ . Selbstredend wird für die 1. und 2. Gruppe die Genauigkeit etwas größer sein müssen, wofür wir aber die Schätzung übergehen.

Es mag noch erwähnt werden, daß die *Ordnance Survey* für die 1. Gruppe  $F$  nach Formel (5) berechnete; für die 2. Gruppe wurde ein Näherungsverfahren mit Benutzung dieser Formel angewandt, während für die 3. Gruppe die 1. Formel (4) zur Benutzung gelangte. In *Bayern* rechnete man nur mit der 2. Formel (4).

Hierbei muß nun noch darauf hingewiesen werden, daß in den Formeln (4) und (5) zwar  $h$  den Höhenunterschied mit dem angezogenen Punkte  $P'$  bedeutet, daß aber in (4) und dem 1. Gliede der Parenthese (5) für  $h$  auch die Höhe über einem beliebigen Horizont z. B. also die Meereshöhe  $H$  gesetzt werden darf, da sich die dadurch begangenen Fehler in der Summe der 4 Quadranten aufheben. Im 2. Gliede von (5) ist aber  $h$  in der ursprünglichen Bedeutung zu nehmen. Bei der 2. Gruppe von Vierecken setzte nun die *Ordnance Survey* für alle 20 Vierecke der nördlichen oder südlichen Hälfte eines Ringes

$$\sum h^3 = 20 \left( \frac{\sum H}{20} - H' \right)^3.$$

Genaue Berechnungen der Lokalanziehung führte zuerst *Hutton* aus gelegentlich der 1772—76 von *Maskelyne* unternommenen Bestimmung der Dichtigkeit  $\Theta_m$  der Erde aus der Lotablenkungsdifferenz für zwei bezw. nördlich und südlich des Berges *Shehallien* in *Pertshire* gelegenen Breitenstationen. Er berichtet darüber in den *Philosophical Transactions* 1778 (Ausgabe von 1809 Bd. 14 S. 408 u. ff.). Man vergl. auch 2 Abhandlungen in den *Phil. Transact.* 1775 von *Maskelyne*, betr. Auswahl der Berge und Beobachtungen am *Shehallien*. Für die Radien, an Zahl 20, und für  $\sin \varphi$  nahm er arithmetische Progression,  $\Delta \sin \varphi = \frac{1}{12}$ ,  $\Delta a = 666 \frac{2}{3}$  Fufs. Zur Interpolation der  $h$  fand er es bequem, zunächst Punkte gleicher Höhe durch Linien zu verbinden, er führte also faktisch *Horizontalkurven* ein.

Für  $F'$  nahm er wahrscheinlich den Ausdruck (5), d. h. er setzte eigentlich

$$F' = (a_k - a_i) \sin \arctan \frac{h}{\frac{1}{2}(a_k + a_i)},$$

berechnete aber den Sinus aus der Tangente nach einem einfachen (uns nicht näher bekannten) Verfahren, das sicher auf Anwendung von (5) hinauslief.

#### § 41. Erfolge der Berechnung von lokalen Lotablenkungen.

Bei der englischen Vermessung ergab sich folgende Zusammenstellung. In derselben enthält die Kolumne  $A$  den Wert von  $\xi$  aus der Ablenkung der Massen innerhalb eines Umkreises von ca. 2 geogr. Meilen (bei den ersten 4 Stationen der Insel *Wight* nur  $5^m$ ),  $B$  den Wert bei Berücksichtigung auch der entfernteren Massen,  $C$  die Verbesserung der geogr. Breite, welche das für das Vermessungsgebiet günstigste Referenzellipsoid erfordert



§ aus der Ordnance Survey, Principal Triangulation p. 699 und 700.

Name der Station	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>C</i> — <i>A</i>	<i>C</i> — <i>B</i>
Dunnose . . . . .	— 1,02"	— 0,54"	— 1,62"	— 0,60"	— 1,08"
Boniface . . . . .	+ 1,94	+ 2,42	+ 0,80	— 1,14	— 1,62
Week Down . . . . .	+ 1,50	+ 1,98	+ 0,58	— 0,92	— 1,40
Port Valley . . . . .	+ 2,81	+ 3,29	+ 1,61	— 1,20	— 1,68
Clifton . . . . .	— 0,90		— 2,56	— 1,66	
Burleigh Moor . . . . .	— 3,03	— 4,55	— 3,54	— 0,51	+ 1,01
Hungry Hill . . . . .	+ 3,85	+ 5,40	+ 2,92	— 0,93	— 2,48
Feaghman . . . . .	— 1,95		— 0,88	+ 1,07	
Forth . . . . .	— 0,17	+ 1,13	+ 0,26	+ 0,43	— 0,87
Tawnaghmore . . . . .	— 1,43	— 2,30	— 0,95	+ 0,48	+ 1,35
Lough Foyle . . . . .	— 2,15	— 4,02	— 4,48	— 2,33	— 0,46
Kellie Law . . . . .	+ 2,08		+ 1,82	— 0,26	
Monach . . . . .	+ 0,47		+ 1,36	+ 0,89	
Ben Hutig . . . . .	— 1,63	— 2,01	— 2,86	— 1,23	— 0,85
Calton Hill, Edinb. . . . .	— 2,43	— 3,57	— 5,30	— 2,87	— 1,73
Cowhythe . . . . .	— 2 :	— 5 :	— 9,55	— 7 :	— 4 :

Hiernach trägt offenbar im allgemeinen die Anziehung der umgebenden Massen in dominierender Weise zur Erzeugung der Abweichungen gegen das Referenzellipsoid bei. Immerhin bleiben erhebliche Reste. Die Erweiterung des in die Rechnung einbezogenen Terrains nutzt nicht immer, sondern schadet zum Teil. So wird bemerkt, daß für die 4 Insel-*Wight*-Stationen die Differenzen wachsen, wenn man die Südküste von England und einen entsprechenden Kanalteil mitberücksichtigt. Bei *Cowhythe* ist zwar wegen mangelnder Daten die Berechnung von *A* und *B* sehr unsicher; es soll aber *B* jedenfalls — 6" nicht erreichen, sodaß *C* — *B* mindestens — 4" betragen würde.

Günstiger war der Erfolg der Rechnungen der bayerischen Landesaufnahme. Hier ergab sich für die Differenz der geographischen Breiten beider Stationen, *Benediktbeuren* — *München*, mit *Bessels* Erdellipsoid:

9,00" astronom. — geodätisch,  
8,64 aus der Massenanziehung;

ferner ergab sich für das von *München* nach *Benediktbeuren* übertragene Azimut

- 5,83'' astronom. — geodätisch,
- 5,22 aus der Massenanziehung.

[Bei diesen Übertragungen kommen die Formeln (9) S. 536, Bd. 1, in Frage.]

Sehr günstige Resultate erzielte für die Alpen auch Oberst *Pechmann*\*) bei zwei Meridianbögen und drei ziemlich entfernten astronomischen Stationen in Breite und Azimut. Er suchte durch seine Rechnungen nachzuweisen, daß es Hypothesen über die Dichtigkeit der Massen unterhalb des Meeresniveaus nicht bedürfe, um die Abweichung zwischen geodätischen und astronomischen Beobachtungsergebnissen zu erklären.

Auch *Denzler* erzielte günstige Resultate; nur in der Amplitude *Mailand-Zürich* bleiben 5 bis 6'' unerklärt, und es vermutet daher *Ph. Fischer*, dem wir dies entlehnen, hier den Einfluß unterirdischer Massenstörungen\*\*).

Daß solche existieren, ist ja bereits bei *Moskau* unzweifelhaft konstatiert\*\*\*), nach *Pratt* für den *Himalaya* erwiesen und von *O. Struve*

\*) *E. Pechmann, Die Abweichungen der Lotlinie bei astronomischen Beobachtungsstationen und ihre Berechnung als Erfordernis einer Gradmessung.* Wien bei Gerold. 2 Teile. 1863—65. (Der 1. Teil ist auch in dem 22. Bde. der *Denkschriften der mathem. naturwiss. Classe der Wiener Akademie der Wissenschaften* enthalten.)

\*\*) *Denzler, Jahrbuch des schweizer Alpenklubs*, 3. Jahrg. 1866 (nach *Ph. Fischer, Gestalt der Erde*, S. 46).

\*\*\*) *G. Schweizer, Untersuchung über die in der Nähe von Moskau stattfindende Lokalattraktion.* Moskau 1863. Wir folgen Referaten von *C. A. F. Peters* und *O. Struve* in den *Astronom. Nachr.* vom Jahre 1864 Bd. 61 Nr. 1449 S. 142 bezw. in den *Monthly Notices of the Royal Astron. Society* Bd. 23 S. 185.

Für 90 Punkte innerhalb einer Zone, die sich bis 4 Meilen nördlich, 8 südlich, 5 östlich und 9 westlich erstreckt, wurde die Polhöhe beobachtet. Die 10 Minuten südlich von Moskau von *WSW* nach *ESE* laufende Linie hat keine nordsüdliche Ablenkung, aber auf den Parallelen beiderseits wächst sie bis ca. 8'' in etwa 1½ Meilen Abstand und nimmt dann wieder ab. Da größere oberirdische Massenstörungen fehlen, so mußte *Schweizer* die Lotstörungen auf eine unterirdische Ursache zurückführen. Es ließen sich durch verschiedene Annahmen befriedigende Darstellungen der Ablenkungen erzielen. Hervorgehoben wird die Hypothese, daß eine Erdschicht von ca. 500<sup>m</sup> Mächtigkeit und von der halben Dichtigkeit der Erdrinde (das wäre somit 1,4) in einer Breite von 3½ bis 4 Meilen sich in unbegrenzter Länge von Ost nach West quer zu dem Meridian von Moskau hinzieht, und daß sie im Norden und Süden von 5 Meilen breiten Schichten von 1½-facher Dichtigkeit der Erdrinde (also 4,2) begleitet wird.

Etwas anders referiert *Franz Klein* (in der Schrift *Zweck und Aufgabe der europ. Gradmessung.* Wien 1882). Darnach fand sich als Ursache eine Höhlung von elliptischer Form, 1½ Kubikmeilen fassend, langgestreckt in Richtung *EW*. Nach den *Verhandlungen der 6. allgem. Konf. der europ. Gradmessung zu München* 1880, S. 35 des Generalberichts, wird gegenwärtig die Umgegend von Moskau auch mit einem Reversionspendel untersucht.

am *Kaukasus* ebenfalls bestätigt gefunden worden. Hier ist in einer vulkanischen Gegend eine Berücksichtigung der oberirdischen Massen zum Teil in solchem Maße schädlich, daß sich dadurch die astronomisch-geodätische Differenz von ca. 24 auf ca. 40" steigert\*).

Auch im Harze\*\*) und in Nordamerika\*\*\*) wurde man auf unterirdische Massenstörungen hingewiesen und *Petit* fand, daß die Pyrenäen bei *Toulouse* scheinbar das Lot nicht ablenken†). Vergl. übrigens im 3. Kap. S. 228 und im 4. Kap. S. 364 § 38.

Hiernach wird man, ohne den Berechnungen der Anziehung durch sichtbare Massenunregelmäßigkeiten ein hohes Interesse abzusprechen zu wollen, sich doch andererseits sagen müssen, daß es bedenklich ist, für Gradmessungszwecke, wie *Schubert*, *Pechmann* u. a. wollen, die astronomischen Beobachtungsergebnisse an der Hand solcher Berechnungen *verbessern* zu wollen. Es wird immer fraglich sein, ob eine Verbesserung eintritt. Man darf mindestens nicht weiter als bis zu einer solchen Grenze die Massen in betracht ziehen, bei welcher die Wahrscheinlichkeit erheblich wird, daß ober- und unterirdische Massenstörungseinflüsse von gleicher Ordnung sind. Auch würde es unerläßlich sein, durch Pendelbeobachtungen die Massenverteilung zu prüfen. Besser ist es jedenfalls, anstatt die Elimination lokaler Einflüsse durch Berechnung erzielen zu wollen, nach der Örtlichkeit verdächtige Stationen aus der Rechnung wegzulassen oder die Zahl der astronomischen Stationen in solchen Bezirken, wo man Störungen vermutet, zu vermehren und zwar in der Weise, daß der Wahrscheinlichkeit nach dadurch eine Kompensation der Einflüsse in den Gradmessungsergebnissen erzielt wird. (Bd. 1 § 11 S. 611.)

Die *Krümmung der Niveauflächen* kann bei Berechnungen der Massenanziehung nur dann in frage kommen, wenn es sich lediglich um Studien über die Wirkung kontinentaler Massenstörungen handelt, wie in den §§ 18 u. ff. dieses Kapitels, insbesondere in § 24 S. 327. Dieser Fall bietet nach unseren Ergebnissen über die Massenverteilung in der Erdrinde S. 364 so wenig Interesse, daß wir darauf nicht weiter eingehen, umsomehr als selbst bei Entfernungen von 1 Million Meter der Einfluß der Krümmung noch nicht erheblich ist; vergl. Formel (13) S. 328.

Erwähnt mag werden, daß *Lamont* magnetische Anomalieen und Anomalieen der Lotrichtung auf Unregelmäßigkeiten des magnetischen,

---

\*) *Bericht über die Verhandlungen der 3. allgem. Konferenz der europäischen Gradmessung zu Wien* S. 13 und *Generalbericht* für 1871 S. 50.

\*\*) *Publikation des kön. preuss. geodät. Instituts*. Astronomisch-geodätische Arbeiten im Jahre 1875; publ. 1876 durch Prof. *Albrecht*; S. 157. — 1881 war die Anzahl der in Polhöhe beobachteten Punkte auf 39 gestiegen.

\*\*\*) Nach *Bruns*, *Figur der Erde* S. 29.

†) *Annales de l'Observatoire de Toulouse*, t. I p. 86. (Vom Verf. dieses nicht selbst gelesen.)

metallischen Erdkernes zurückführt, gestützt darauf, daß beide Anomalieen meist gleichzeitig auftreten. (*Meteorologische Wochenberichte der Münchener Sternwarte* Nr. 29—34 von 1866 [nur metallographiert] und *Sitzungsberichte der bayer. Akademie der Wissenschaften* 1865.)

**§ 42. Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde aus Lotablenkungen.** Denkt man sich, daß nördlich und südlich eines Berges oder überhaupt einer bekannten Masse im gleichen Meridian und in nahezu gleicher Höhe astronomisch die geogr. Breite bestimmt wird und daß man außerdem geodätisch den Meridianbogen zwischen beiden Stationen ermittelt, so läßt sich berechnen, wieviel die astronomisch bestimmte Amplitude von der geodätisch in Bezug auf gewisse Dimensionen eines Referenzellipsoids bestimmten abweicht. Unter der Voraussetzung nun, daß lediglich die in Rede stehende Masse störend aufs Lot wirkt und ohne dieselbe die Differenz der Lotrichtungen dem gewählten Referenzellipsoid entspricht, wird man die mittlere Dichtigkeit der Erde aus der Differenz der astronomisch und geodätisch berechneten Breitenamplituden finden können. Denn ist die Dichtigkeit der betreffenden Masse genau bekannt, so hat man nur nach den angegebenen Regeln die Anziehung derselben auf jede der beiden Stationen zu berechnen und mittelst des theoretischen Ausdruckes für die normale Schwerkraft in der in § 39 angegebenen Weise die nördliche Lotablenkung  $\xi$  zu bilden. Die mittlere Dichtigkeit  $\Theta_m$  erscheint alsdann in der Gleichung, welche die beobachtete Differenz beider  $\xi$  darstellt, als Unbekannte.

Zu dem in § 39 benutzten Rechnungsgange ist zu bemerken, daß daselbst für die normale Schwerkraft nur der Näherungsausdruck  $\frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R$  gesetzt ist. Dies reicht eigentlich mit Rücksicht auf sonstige Fehlerquellen auch gegenwärtig aus. Will man aber strenger rechnen, so hat man die Formel (17) mit (18) S. 97 anzuwenden und darin die Erdmasse  $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \Theta_m$  zu setzen. (Über die Berücksichtigung der Anziehung der Erdschichten über dem Meeresniveau bis zum Niveau der Stationen vergl. im 3. Kap. § 37 S. 244).

Das vorstehend geschilderte Verfahren leidet hauptsächlich an dem Übelstande, daß sich mit den Anziehungen der bekannten Massen leicht diejenigen unbekannter Massen mischen. Heutzutage, wo es mehrere gut ausgebildete physikalische Methoden giebt, um  $\Theta_m$  zu ermitteln (vergl. das 6. Kap.), wird man daher derartigen Bestimmungen nur einen untergeordneten Wert beilegen.

Den ersten Versuch einer solchen Bestimmung von  $\Theta_m$  unternahmen gelegentlich der Gradmessung in *Péru Bouguer* und *de la Condamine* am *Chimborasso*, jedoch wegen mangelhafter Hilfsmittel ohne Erfolg (vergl. das Werk beider Gelehrten *La Figure de la Terre* etc. 1749; einige Details hieraus — sowie über das weiter folgende — teilen auch das Haupt-

werk der englischen Vermessung, *Principal Triangulation* S. 597—609, und *Todhunter, History of Attraction*, Bd. 1 S. 244 und 248 mit).

Aus den bereits S. 375 erwähnten, am *Shehallien* angestellten Beobachtungen *Maskelynes* berechnete *Hutton* 1778 und 1821  $\Theta_m = 5$ . Dabei setzte er die Dichtigkeit der Bergmasse gleich 2,7, oder genauer, dem Werte  $\Theta_m = 5$  entsprechend, gleich 2,778. Zufolge nachträglicher Ermittlungen, die von *Playfair* auf Anregung *Huttons* gemacht wurden, vergl. *Phil. Transact.* 1811 und 1821 S. 276—292, schwankte sie eigentlich von 2,64 bis 3,2; *Playfair* nahm nach seinen Ermittlungen  $\Theta_m = 4,7$ . Wegen der Schwierigkeit der genauen Dichtigkeitsaufnahmen der Bergmassen schlug *Hutton* 1821 vor, eine große ägyptische Pyramide als ablenkende Masse zu benutzen, wobei er bemerkt, daß das Maximum der Ablenkung in  $\frac{1}{4}$  der Höhe stattfindet.

Es mag gleich hier erwähnt werden, daß später *C. A. F. Peters* in seiner Abhandlung über die kleinen Ablenkungen des Lotes, *Bull. de la Cl. phys.-math. de l'Ac. de St. Pét.* Bd. III S. 217, den gleichen Vorschlag macht, wobei er die einseitige Ablenkung am Fusse bei 73' Höhe und 116' Seite zu 0,6'' angiebt. Er gedenkt hierbei des Vorschlags von *W. Struve*,  $\Theta_m$  durch Beobachtungen an gegenüberliegenden Stellen der Ufer des Kanals von *Bristol* zu bestimmen. In diesem Kanal steigt nämlich die Flut auf 30' engl. Immerhin beträgt bei 8 geogr. Mln. Länge und 4 Mln. Breite die Anziehung des Lotes durch die Flutmasse nur 0,2'', sodaß eine genaue Bestimmung selbst mit dem Passageninstrument im 1. Vertikal Schwierigkeiten bereitet.

Eine sehr eingehende Untersuchung unternahm 1855 *James* am Berge *Arthurs Seat* bei *Edinburg*. Die nächste Veranlassung bot allerdings das Auftreten einer lokalen Abweichung bei einem nahegelegenen Punkte und der Wunsch, die lokalen Lotanziehungen zu studieren. Außer der nördlichen und südlichen Station hatte man noch eine auf der Spitze des Berges, dessen  $\Theta$  nach vielen Bestimmungen zu 2,75 angenommen wurde. Es gaben die 3 Stationen, wenn  $c$  eine Konstante bedeutet und  $\Theta : \Theta_m = q$  gesetzt wird, die Gleichungen

$$\begin{aligned} - 2,70 q + 2,81'' + c &= 0 \\ + 2,40 q \quad \cdot \quad + c &= 0 \\ + 5,24 q - 1,26'' + c &= 0, \end{aligned}$$

welche sich bis auf  $+ 0,04''$ ,  $- 0,13''$  und  $+ 0,08''$  durch  $q = 0,517$  mit  $\Theta_m = 5,32$  darstellen lassen. (Außer in der *Ordnance Survey, Princ. Triang.*, auch in den *Phil. Transact.* Bd. 146 mitgeteilt).

*Pechmann* fand gelegentlich seiner Lotablenkungsstudien in den Alpen, vergl. S. 377, mit  $\Theta = 2,75$  auch 2 Werte für  $\Theta_m$ , von denen allerdings nur der erste, nämlich 6,13, genügende Sicherheit bietet, um mit anderen derartigen guten Bestimmungen konkurrieren zu können.

Das arithmetische Mittel der drei Bestimmungen 4,7 (oder 5), 5,32 und 6,13 ist rund 5,4.

§ 43. Ph. v. Jollys Bestimmung von  $\Theta_m$  aus Wägungen\*). Für eine Quecksilberkugel im Gewicht von 5009450<sup>mg</sup> fand sich

\*) *Ph. v. Jolly, die Anwendung der Wage auf Probleme der Gravitation.* 2. Abhandl. München 1881. Aus den *Abh. der kön. bayer. Ak. der Wissenschaften*, II. Cl., 14. Bd. 2. Abt. [die 1. Abh. Bd. 13 enthält nur vorläufige Versuche].

durch Wägungen in einem Turme mit einer feinen, zweiarmigen Wage, welche auſser mit den üblichen Wagschalen noch mit einem zweiten Paare 21,005<sup>m</sup> tiefer versehen war, eine Gewichtszunahme von 31,686<sup>mg</sup>, wenn sie in die tiefere Schale gebracht wurde. Befand sich aber unterhalb der betr. unteren Wagschale eine Bleikugel von 1<sup>m</sup> Durchmesser, so stieg die Gewichtszunahme auf 32,275<sup>mg</sup>, betrug also 0,589<sup>mg</sup> mehr.

Der Radius der Bleikugel war 0,4975<sup>m</sup>, ihr spez. Gewicht 11,186, ihr Abstand vom Mittelpunkt des unten befindlichen Quecksilbergewichts 0,5686<sup>m</sup>.

Nennt man die Schwerebeschleunigung ohne Wirkung der Bleikugel oben  $g_1$ , unten  $g_2$ , so ist sie mit Wirkung der Bleikugel

$$\text{oben gleich } g_1 + k^2 m \cdot \frac{1}{e_1^2},$$

$$\text{unten „ } g_2 + k^2 m \cdot \frac{1}{e_2^2},$$

wenn  $m$  die Masse der Bleikugel ist, und  $e_1$  und  $e_2$  ihre Abstände vom oben bzw. unten liegenden Gewicht sind. Man hat nun offenbar

$$\frac{g_2 - g_1}{g_1} = \frac{31,686}{5\,009\,450}, \quad (1)$$

ferner mit einer unerheblichen Vernachlässigung im Nenner linker Hand

$$\frac{g_2 - g_1 + k^2 m \left( \frac{1}{e_2^2} - \frac{1}{e_1^2} \right)}{g_1} = \frac{31,686 + 0,589}{5009450},$$

also

$$\frac{k^2 m \left( \frac{1}{e_2^2} - \frac{1}{e_1^2} \right)}{g_1} = \frac{0,589}{5009450}. \quad (2)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} e_2 &= 0,5686^m, & e_1 &= 21,5736^m, \\ m &= \frac{4}{3} \pi (0,4975)^3 \cdot 11,186. \end{aligned} \quad (2^*)$$

Was  $g_1$  anbetrifft, so ist nach S. 97 (17), (18) und (23) dessen normaler Teil gleich

$$\frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m R \left( 1 - \frac{2H}{R} \right) \left( 1 + \frac{1}{3} a - \frac{3}{2} r + b \sin^2 B \right) \quad (3)$$

anzunehmen, wenn  $H$  die Meereshöhe und  $B$  die geogr. Breite der Station ist. Die geogr. Breite kann genau genug  $= 48^\circ 8'$  gesetzt werden.  $H$  wird für München zu 515<sup>m</sup> angegeben; wie hieraus  $H$  für die Beobachtungsorte sich berechnet, wird aber nicht gesagt. Die hierdurch entstehende Unsicherheit ist jedoch geringfügig, namentlich mit Rücksicht auf die Anomalieen infolge der unregelmäßigen Massen-



lagerung in der Erdrinde. Es könnte allerdings noch die Anziehung der Terrainschicht bis zum Meeresniveau durch Beifügung des Faktors  $\frac{5}{8}$  zu  $\frac{2H}{R}$  in (3) berücksichtigt werden, aber der Nutzen davon ist zweifelhaft, vergl. S. 244 § 37.

Mit Rücksicht auf (2\*) und (3) findet sich aus (2):

$$\Theta_m = \frac{11,186}{0,589} (0,4975)^3 \left( \frac{1}{0,5686^2} - \frac{1}{21,57^2} \right) \frac{5009450}{6370300} 1,0013,$$

also

$$\Theta_m = 5,691.$$

*Jolly*, welcher einen anderen, weniger strengen Ausdruck für  $g$ , benutzt, und das zweite Glied der Parenthese vernachlässiget, findet 5,692. Der wahrscheinliche Fehler des Resultates folgt aus der Übereinstimmung der Einzelwerte zu  $\pm 0,068$ ; er kann aber recht wohl etwas größer sein\*).

*Jolly* bemerkt, daß der beobachteten Gewichtsabnahme von  $31,686^{mg}$  eine theoretische im Betrage von  $33,059^{mg}$  gegenüberstehe, und er findet die Erklärung darin, daß nahegelegene hohe Gebäude den Turm, wo beobachtet wurde, überragen. Übrigens erhalten wir einen etwas anderen theoretischen Wert. Nach Formel (17) S. 97 ergibt sich für die normale Schwerkraft:

$$\frac{g_2 - g_1}{g_1} = \frac{2 \cdot 21,005 \left( 1 + \frac{2}{3} \alpha + \epsilon - 2 \alpha \sin^2 B \right)}{R \left\{ 1 - \frac{2H_1}{R} \right\}},$$

worin  $B = 48^\circ 8'$  und  $H_1$  gleich ca.  $530^m$  zu setzen ist. Die Erdschicht unterhalb des Beobachtungsturmes bis zum Meeresniveau berücksichtigen wir nach § 37 S. 244 nicht.

Berechnen wir nun nach Maßgabe der angegebenen Formel  $(g_2 - g_1):g_1$  und multiplizieren mit 5009450, so folgt

$$33,108^{mg},$$

ein Wert, der durch die Unsicherheit des Nenners der Formel (d. h. der Annahme über  $g_1$ ) kaum über  $1/5000$  irrig sein dürfte. Die Differenz mit dem beobachteten Werte muß daher wesentlich durch die verschiedene Anziehung benachbarter Massen auf beide Orte des Quecksilbergewichtes erklärt werden. Vergl. hierzu noch § 3 S. 275 und 276.

---

\*) Wenn *Jolly* angiebt, daß die Differenz seines Wertes für  $\Theta_m$  von dem Werte aus Drehwagenversuchen (6. Kap.) eventuell z. T. aus lokalen Anomalieen in  $g$  erklärlich sei, so scheint uns, daß er darin irrt, denn Anomalieen in  $g_1$  im Betrage von 1 bis 2% sind erfahrungsmäßig nicht annehmbar.

## Fünftes Kapitel.

### Zeitliche Änderungen der Niveauflächen.

§ 1. Die Störungen in der Schwerkraft durch Sonne und Mond. Bei Betrachtung der Schwerkraft ist bisher von der Anziehung der Himmelskörper abgesehen worden; vergl. im 1. Kap. § 5 S. 7. Es sind auch nur die Anziehungen von Sonne und Mond merklich, und selbst diese sind sehr klein. Die Wirkung ist eine mit der Zeit veränderliche, da diese Gestirne zu irgend einem Erdorte eine mit der Zeit veränderliche Stellung haben. Nach dem 1. Kap. § 3 S. 5 erhält man den Einfluß der Anziehung eines Himmelskörpers auf die Schwerkraft dadurch, daß man von den Komponenten der Anziehung in Bezug auf einen betrachteten Punkt  $P'$  die entsprechenden, aus (6) S. 3 zu entnehmenden Komponenten für den Schwerpunkt der Erde abzieht. Die Masse des Himmelskörpers denken wir uns dabei genügend genau in ihrem Schwerpunkt konzentriert und die Niveauflächen der Erde ebenso genau genug als Kugelflächen, konzentrisch zum Erdschwerpunkt  $M$ . Die Bewegung des letzteren entspricht alsdann der Anziehung des Himmelskörpers auf eine in demselben gelagerte Masseneinheit.

In Fig. 61 stellt  $\mathcal{M}$  Sonne oder Mond vor,  $\zeta'$  ist die wirkliche Zenithdistanz von  $\mathcal{M}$  in  $P'$  und  $\zeta$  die geozentrische Zenithdistanz. Die Anziehung der Masse  $\mathcal{M}$  auf  $P'$  kann in eine in  $P'$  horizontale und vertikale Komponente zerlegt werden, ebenso die Anziehung von  $\mathcal{M}$  auf Punkt  $M$  in entsprechender Weise. Zu der Schwerebeschleunigung in  $P'$  tritt demnach eine horizontale Komponente in Richtung nach  $\mathcal{M}$  gleich

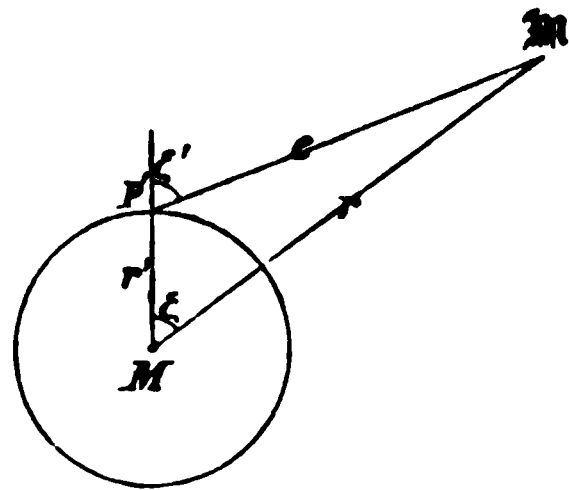


Fig. 61.

$$k^2 \mathcal{M} \left\{ \frac{\sin \zeta'}{e^2} - \frac{\sin \zeta}{r^2} \right\} \quad (1)$$

und eine vertikale Komponente in Richtung nach außen gleich

$$k^2 \mathcal{M} \left\{ \frac{\cos \zeta'}{e^2} - \frac{\cos \zeta}{r^2} \right\}. \quad (2)$$

Wir formen zunächst den Ausdruck (1) um, indem wir dafür schreiben

$$k^2 \mathcal{M} \left\{ \frac{e \sin \zeta'}{e^3} - \frac{r \sin \zeta}{r^3} \right\} \quad (3)$$

und beachten, daß  $e \sin \zeta' = r \sin \zeta$  ist, sowie gesetzt werden kann:  $e = r - r' \cos \zeta$ , woraus in hinreichender Annäherung folgt:

$$\frac{1}{e^3} = \frac{1}{r^3} \left\{ 1 + 3 \frac{r'}{r} \cos \zeta \right\}.$$



Damit giebt (3):

$$\frac{3}{2} k^2 \frac{r'}{r^3} \sin 2\xi. \quad (4)$$

Wir setzen nun für  $r'$  den mittleren Erdradius  $R$  und führen die Horizontalparallaxe  $p$  des Gestirns, d. h. den Winkel ein, unter welchem Radius  $MP'$  von  $M$  aus erscheint, wenn  $M$  im Horizont von  $P'$  liegt. Es ist aber

$$\sin p = \frac{r'}{r}. \quad (5)$$

Hiermit erhalten wir aus (4) mit Rücksicht auf den Näherungswert  $G$  der Schwerebeschleunigung an der Erdoberfläche behufs Elimination von  $k^2$ , nämlich

$$G = \frac{k^2 M}{R^2}, \quad (6)$$

die nach  $M$  zu gerichtete horizontale Komponente der Schwere-  
störung gleich

$$\frac{3}{2} G \frac{M}{M} \sin^3 p \sin 2\xi. \quad (7)$$

Dividiert man diesen Ausdruck mit  $G$  und multipliziert mit  $\varphi''$ , so erhält man endlich die Lotstörung und zwar im Sinne einer Anziehung des aufgehängten Lotes gegen  $M$  hin.

Die meridionale und ostwestliche Komponente der Lotstörung ergeben sich dann durch Multiplikation mit  $\cos A$  und  $\sin A$ , wenn  $A$  das Azimut des Gestirns ist. Zählen wir  $A$  wie üblich südwestlich und bezeichnen mit  $\xi$  die südliche Abweichung des gestörten Zeniths, mit  $\eta$  die westliche, so wird

$$\begin{aligned} \xi &= - P \sin 2\xi \cos A & \eta &= - P \sin 2\xi \sin A \\ \text{in Sek.} & & \text{in Sek.} & \end{aligned} \quad (8)$$

mit

$$P = \frac{3}{2} \varphi'' \frac{M}{M} \sin^3 p.$$

$$\text{Für den Mond ist } \frac{M}{M} = \frac{1}{81\frac{1}{4}}, \quad p = 57' 2,8'', \quad P = 0,0174''; \quad (8^*)$$

$$\text{für die Sonne ist } \frac{M}{M} = 329\,000, \quad p = 8,83'', \quad P = 0,0080''.$$

Diese Werte sind so klein, daß sie bei den geographischen Koordinaten der zugänglichen Teile der Erdoberfläche nicht in betracht kommen.

Auch die Störung der Schwerebeschleunigung selbst ist unerheblich. Die horizontale Komponente (1) hat jedenfalls gar keinen in betracht kommenden Einfluß; was die vertikale (2) anbetrifft, so beachten wir, daß

$$c \cos \xi' = r \cos \xi - r'$$

und wie früher:

$$\frac{1}{c^3} = \frac{1}{r^3} \left\{ 1 + \frac{3r'}{r} \cos \xi \right\}.$$

Damit geht (2) über in

$$k^2 \mathfrak{M} \frac{r'}{r^3} \left\{ -1 + 3 \cos^2 \xi - \frac{3r'}{r} \cos \xi \right\}.$$

Führen wir noch  $\sin p$  mittelst (5), sowie  $G$  mittelst (6) ein und vernachlässigen das 3. Glied der Parenthese, so folgt die Störung der Schwerebeschleunigung gleich

$$G \cdot \frac{\mathfrak{M}}{M} \sin^3 p (3 \cos^2 \xi - 1). \quad (9)$$

Für den *Mond* ist  $\frac{\mathfrak{M}}{M} \sin^3 p = 1/17\,800\,000$ ;

für die *Sonne* ist  $\frac{\mathfrak{M}}{M} \sin^3 p = 1/38\,800\,000$ .

Die Störung der Schwerkraft ist hiernach verschwindend klein.

Die Störungen der Richtung und Gröfse der Schwerkraft bedingen aber eine Änderung der *Gestalt der Niveauflächen*. Um dieselbe zu ermitteln, bilden wir das Potential  $\mathfrak{V}$  des Einflusses der Mond- und Sonnenanziehung für Punkte einer ungestörten Niveaufläche.

Dasselbe ist mit Rücksicht auf den Ausdruck (7) für die horizontale Komponente dieser Anziehungen für den Mond sowie für die Sonne von der Form

$$\mathfrak{V} = + \frac{3}{2} G R \frac{\mathfrak{M}}{M} \sin^3 p \cos^2 \xi. \quad (10)$$

Denn verschieben wir den angezogenen Punkt  $P$  horizontal gegen das Gestirn hin um  $-R\partial\xi$  und bilden dementsprechend

$$- \frac{\partial \mathfrak{V}}{R \partial \xi},$$

so ergibt sich wieder die horizontale Komponente übereinstimmend mit (7). Verschieben wir dagegen rechtwinkelig zur Vertikalebene des Gestirnes, in welcher Richtung die Anziehung null ist, so wird, wie es sein muß,  $\partial V = \text{null}$ .

Damit nun eine neue Fläche konstanten Potentials entsteht, und zwar desselben Potentialwertes wie ohne die Störung, muß das ungestörte Niveau am Punkte  $P$  um

$$+ \frac{3}{2} R \frac{\mathfrak{M}}{M} \sin^3 p \cos^2 \xi, \text{ d. i. } R \text{ arc } P \cos^2 \xi, \quad (11)$$

gehoben werden. Diese Hebung ist ein Maximum in der Richtung vom anziehenden Körper nach dem Erdschwerpunkt, null in der zu dieser Richtung normalen Ebene durch letzteren. Unter dem Einfluß des Mondes oder der Sonne ändert sich somit die Gestalt der Niveauflächen im Sinne des Überganges einer Kugel in ein längliches Rotationsellipsoid mit der relativen Axenverlängerung

$$\text{arc } P,$$

$$\begin{aligned} \text{d. i. für den Mond } \frac{1}{12\,000\,000}, \text{ wobei } R \text{ arc } P &= 0,54^m \text{ ist,} \\ \text{für die Sonne } \frac{1}{26\,000\,000}, \text{ „ „ } &= 0,25^m \text{ „ .} \end{aligned} \quad (12)$$

Die große Axe des Ellipsoids liegt in der Richtung nach dem störenden Körper.

Die Kräfte, welche die Gestalt der Niveauflächen ändern, bewirken auch eine Bewegung des Meerwassers, welche als Flut und Ebbe bekannt ist. Die Veränderung der Gestalt der Meeresfläche entspricht jedoch nicht der Veränderung der Niveauflächen, welche wir eben ermittelt haben. Es würde das nur der Fall sein, wenn die Erde sich nicht um ihre Axe drehte und Mond und Sonne die gleiche Stellung zur Erde dauernd beibehielten. Wegen der Axendrehung der Erde und der Bewegung von Mond und Sonne kann aber das Wasser den Gleichgewichtszustand nicht annehmen, welcher den gestörten Niveauflächen entspricht.

Die Flutbewegung des Meerwassers bedingt im allgemeinen eine kleine Änderung der oben ermittelten Werte, die davon herrührt, daß eben die Meeresfläche eine geänderte Gestalt und das Potential der Anziehung der Erde auf Punkte ihrer Oberfläche einen geänderten Wert hat. Diese *sekundären* Störungen sind jedoch im allgemeinen noch weit geringer, als die primären. Nur an gewissen Meeresküsten, wo besonders hohe Fluten eintreten, können sie durch deren Einfluß nennenswerte lokale Beträge erreichen, die nach den Störungsformeln für horizontale, unendlich lange Prismen im 4. Kap. sich leicht schätzen lassen.

Die Störung des Lotes wurde bereits um 1845 richtig dargestellt von C. A. F. Peters in der Abh.: *Von den kleinen Ablenkungen der Lotlinie und des Niveaus* (Bull. de la Cl. physico-mathém. de l'Ac. de St. Pétersb. t. III p. 219\*). Peters fand dieselben Koeffizienten zu (8) wie wir, obgleich er etwas andere Werte für  $\mu$  und  $p$  ansetzte.

Auf die sekundären Lotstörungen haben nach Thomson und Tait, Handbuch Bd. 1, 2. T. S. 379, schon Robison 1804 und Forbes 1849 hingewiesen; ersterer mit Bezug auf die 20<sup>m</sup> hohen Fluten der Fundy-Bay.

**§ 2. Bewegung der Erde um ihren Schwerpunkt.** Bisher wurde angenommen, daß die Erde sich mit konstanter Geschwindigkeit um eine in ihr feste Schweraxe dreht, die im Raume unverändert ihre Richtung beibehält. Wir untersuchen jetzt, was die Theorie an der Hand der Erfahrung zu dieser Annahme sagt und beginnen mit der Aufstellung der allgemeinen Gleichungen für die Drehbewegung der Erde um ihren Schwerpunkt. Nach dem 1. Kapitel § 3 S. 5 nimmt *d'Alemberts* Prinzip für diese Bewegung (mit Weglassung der Striche behufs Vereinfachung) die nachstehende Form an:

\*) Die uns nicht genau bekannte Jahreszahl 1845 ist mit Rücksicht darauf angegeben, daß t. I 1843 erschien.

$$\sum \left\{ \begin{aligned} &\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right) dm \cdot \delta x \\ &+ \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2}\right) dm \cdot \delta y \\ &+ \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2}\right) dm \cdot \delta z \end{aligned} \right\} = 0. \quad (1)$$

Hierin erstreckt sich die Summierung über alle Massenteile  $dm$  der Erde;  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  sind die Komponenten der beschleunigenden Kräfte (der Kräfte für die Masseneinheit) im Punkte  $(xyz)$ , wo  $dm$  lagert, mit oder ohne Abzug der entsprechenden Komponenten für den Schwerpunkt. Die rechtwinkligen Koordinatenachsen, welche durch letzteren gelegt sind, haben eine beliebige, aber konstante Richtung, und wir nennen daher dieses System das *feste Axensystem*, wobei die nicht weiter in betracht kommende Parallelverschiebung der ganzen Erde ignoriert ist.

Um nun zu Gleichungen zu gelangen, welche die Drehbewegung charakterisieren, nehmen wir der Reihe nach um die  $z$ -,  $x$ - und  $y$ -Axe virtuelle Drehbewegungen vor. Ist die virtuelle Drehung um die  $z$ -Axe gleich  $\delta\alpha$ , so wird

$$\delta x = -y\delta\alpha \quad \delta y = x\delta\alpha \quad \delta z = 0,$$

womit (1) ergibt

$$\left. \begin{aligned} \sum \left( x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) dm &= \sum (xY - yX) dm. \\ \text{Entsprechend erhält man aus den anderen virtuellen} \\ \text{Drehungen:} \\ \sum \left( y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) dm &= \sum (yZ - zY) dm, \\ \text{und} \\ \sum \left( z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) dm &= \sum (zX - xZ) dm. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Rechter Hand stehen die Drehungsmomente der Kräfte. Bei Berechnung derselben kann man die inneren Kräfte weglassen. Betrachten wir z. B. das Aggregat  $xY - yX$  für eine einzelne Kraft, deren Komponente parallel zur  $xy$ -Ebene gleich  $R$  sei, so wird  $xY - yX = Rr \sin(\gamma - \alpha)$ , wenn  $R$  gegen die  $x$ -Axe um  $\gamma$  und der Radiusvektor  $r$  des Angriffspunktes gegen dieselbe um  $\alpha$  geneigt ist.  $r \sin(\gamma - \alpha)$  giebt aber auch den normalen Abstand von  $R$  und der  $z$ -Axe oder den kürzesten Abstand der Kraft von der  $z$ -Axe an. Ist nun die Kraft eine innere, zu welcher immer eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete existiert, so hat offenbar für beide Kräfte  $r \sin(\gamma - \alpha)$  denselben Wert, das Drehungsmoment  $Rr \sin(\gamma - \alpha)$  aber denselben Wert mit entgegengesetztem Zeichen, sodaß in der Summe die Wirkung beider Kräfte verschwindet. Wir schreiben nun anstatt (2):

$$\begin{aligned}
\sum \left( x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) dm &= N \\
\sum \left( y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) dm &= L \\
\sum \left( z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) dm &= M ;
\end{aligned} \tag{3}$$

hierin bezeichnen  $LMN$  die Summen der Drehungsmomente der äusseren, *bewegenden* Kräfte in Bezug auf die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Axe.

Die Gleichungen (3) schreiben wir endlich noch anders mit Benutzung der Flächengeschwindigkeiten. Es ist nämlich

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)}{dt} = 2 \frac{df_{xy}}{dt},$$

wenn

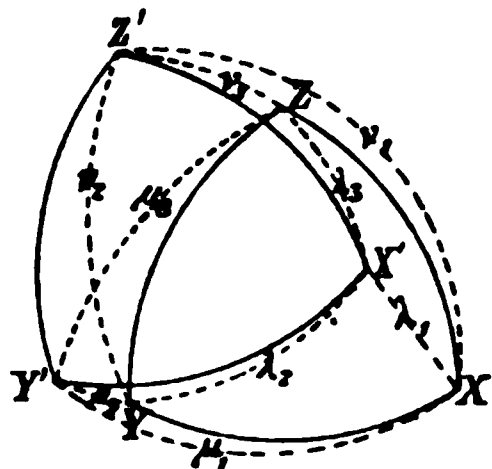
$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = 2f_{xy} \tag{4}$$

gesetzt wird. Wie man leicht durch Anschauung findet, ist  $x dy - y dx$  die doppelte Fläche, welche die in die  $xy$ -Ebene fallende Projektion des Radiusvektors des Punktes  $(xyz)$  in der Zeit  $dt$  überstreicht;  $f_{xy}$  hat daher die Bedeutung der Flächengeschwindigkeit in der  $xy$ -Ebene.

Hiermit erhalten wir aus (3), wenn  $f_{xy}$ ,  $f_{yz}$  und  $f_{zx}$  diese Flächengeschwindigkeiten in den Ebenen  $xy$ ,  $yz$  und  $zx$ , d. h. um die  $z$ -,  $x$ - und  $y$ -Axe bezeichnen:

$$\begin{aligned}
2 \sum \frac{df_{xy}}{dt} dm &= N \\
2 \sum \frac{df_{yz}}{dt} dm &= L \\
2 \sum \frac{df_{zx}}{dt} dm &= M .
\end{aligned} \tag{5}$$

### § 3. Beziehung auf ein bewegtes Koordinatenaxensystem. Um



Die Fig. zeigt die positiven Pole der Axen auf einer Kugelfläche um den Erdschwerpunkt.

Fig. 63.

die Bewegung der Erde um ihren Schwerpunkt zu studieren, führt man nun anstatt der festen Axen ein zunächst beliebig *bewegtes* System von drei zu einander rechtwinkligen Schweraxen ein. Die Winkel, welche letztere mit den Axen der  $xyz$  einschliessen, seien bezw. (vergl. die schematische Fig. 62):

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \quad \mu_1 \mu_2 \mu_3, \quad \nu_1 \nu_2 \nu_3$$

und die Flächengeschwindigkeiten um diese Axen bezw.

$$f'_{yz}, \quad f'_{zx}, \quad f'_{xy} .$$

Dann hat man nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie über die Projektion von Flächen:

$$\begin{aligned} f_{yz} &= f'_{yz} \cos \lambda_1 + f'_{zx} \cos \mu_1 + f'_{xy} \cos \nu_1 \\ f_{zx} &= f'_{yz} \cos \lambda_2 + f'_{zx} \cos \mu_2 + f'_{xy} \cos \nu_2 \\ f_{xy} &= f'_{yz} \cos \lambda_3 + f'_{zx} \cos \mu_3 + f'_{xy} \cos \nu_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Insbesondere folgt aus letzterer Gleichung

$$\frac{df_{xy}}{dt} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{df'_{yz}}{dt} \cos \lambda_3 + \frac{df'_{zx}}{dt} \cos \mu_3 + \frac{df'_{xy}}{dt} \cos \nu_3 \\ &- f'_{yz} \sin \lambda_3 \frac{d\lambda_3}{dt} - f'_{zx} \sin \mu_3 \frac{d\mu_3}{dt} - f'_{xy} \sin \nu_3 \frac{d\nu_3}{dt} \end{aligned} \right\}.$$

Denken wir uns aber zur Zeit  $t$  die festen Axen mit den entsprechenden bewegten zusammenfallend, so ist

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 & \lambda_2 &= \frac{\pi}{2} & \lambda_3 &= \frac{\pi}{2} \\ \mu_1 &= \frac{\pi}{2} & \mu_2 &= 0 & \mu_3 &= \frac{\pi}{2} \\ \nu_1 &= \frac{\pi}{2} & \nu_2 &= \frac{\pi}{2} & \nu_3 &= 0; \end{aligned}$$

es wird daher

$$\frac{df_{xy}}{dt} = \frac{df'_{xy}}{dt} - f'_{yz} \frac{d\lambda_3}{dt} - f'_{zx} \frac{d\mu_3}{dt}$$

und ganz ähnlich für  $f_{yz}$  und  $f_{zx}$ .

Bezeichnen wir nun die Winkelgeschwindigkeiten des bewegten Systems um die festen Axen der  $x$ ,  $y$  und  $z$  zur Zeit  $t$  bzw. mit

$p$ ,  $q$  und  $r$ ,

so ist augenscheinlich, vergl. Fig. 62 und 63:

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = +q; \quad \frac{d\mu_3}{dt} = -p.$$

Man erhält hiermit

$$\frac{df_{xy}}{dt} = \frac{df'_{xy}}{dt} - qf'_{yz} + pf'_{zx}$$

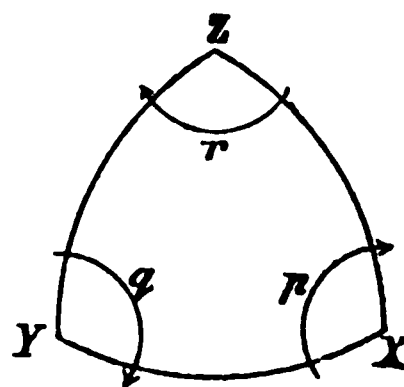


Fig. 63.

und somit aus (5) des vorigen Paragraphen:

$$\begin{aligned} 2 \sum \frac{df'_{xy}}{dt} dm - 2q \sum f'_{yz} dm + 2p \sum f'_{zx} dm &= N \\ 2 \sum \frac{df'_{yz}}{dt} dm - 2r \sum f'_{zx} dm + 2q \sum f'_{xy} dm &= L \\ 2 \sum \frac{df'_{zx}}{dt} dm - 2p \sum f'_{xy} dm + 2r \sum f'_{yz} dm &= M. \end{aligned} \quad (2)$$

Bei Anwendung dieser Gleichungen ist zu beachten, daß immer

die augenblickliche Lage des bewegten Systems als festes System dient. Die  $f'$  sind, wie aus der Aufstellung der (1) hervorgeht, so zu verstehen, als wäre das bewegte Axensystem für den Augenblick fest. Im übrigen bestehen keine Bedingungen, insbesondere ist die Lage des beweglichen Systems noch ganz willkürlich.

§ 4. **Drehbewegung der als fester Körper betrachteten Erde um ihren Schwerpunkt.** Wir nehmen jetzt an, daß die Erde ein fester Körper ist oder doch wie ein solcher rotiert, und wir denken uns ferner das bewegte Axensystem fest mit dem Erdkörper verbunden. Dann sind zur Zeit  $t$  die Größen  $p$ ,  $q$  und  $r$  nicht nur die Winkelgeschwindigkeiten, mit welchen sich das bewegte System gegen das feste Axensystem dreht, sondern auch die Winkelgeschwindigkeiten, mit denen sich der Körper selbst um die festen Axen dreht.

Dreht sich aber der Körper im Zeitintervall  $dt$  um die  $x$ -Axe mit der Winkelgeschwindigkeit  $p$ , so ändern sich die Koordinaten  $y$  und  $z$ , wie man leicht durch Betrachtung der  $yz$ -Ebene erkennt, um bezw.  $-pzdt$  und  $+pydt$ , während  $x$  konstant bleibt. Ermittelt man in dieser Weise die partiellen Koordinatenänderungen, welche den Drehungen um die 3 Axen entsprechen, so wird erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \quad + qz - ry \\ \frac{dy}{dt} &= -pz \quad + rx \\ \frac{dz}{dt} &= +py - qx\end{aligned}\quad (1)$$

Bilden wir hiermit nach Maßgabe von (4) S. 388 § 2 den Ausdruck für  $2f_{xy}$ , so folgt

$$2f_{xy} = 2f'_{xy} = r(x^2 + y^2) - pzx - qyz$$

und

$$2 \sum f'_{xy} dm = r \sum (x^2 + y^2) dm - p \sum zx dm - q \sum yz dm. \quad (2)$$

Da wir es jetzt mit einem festen Körper zu thun haben, würde es angemessener sein, die Summenzeichen durch Integrale zu ersetzen. Jedoch behalten wir sie der Kürze halber bei, da ohnehin demnächst neue Symbole auftreten.

Verlegen wir nun die mit dem Körper fest verbundenen Axen in seine 3 Hauptaxen, so sind die Ausdrücke

$$\sum yz dm, \quad \sum zx dm, \quad \sum xy dm \quad (3)$$

gleich null. Ferner werden die Ausdrücke

$$\begin{aligned}\sum (y^2 + z^2) dm &= A \\ \sum (z^2 + x^2) dm &= B \\ \sum (x^2 + y^2) dm &= C\end{aligned}\tag{4}$$

die drei Hauptträgheitsmomente. Aus (2) erhält man also

$$\text{und entsprechend wird } \left. \begin{aligned} 2 \sum f'_{xy} dm &= r C, \\ 2 \sum f'_{yz} dm &= p A, \\ 2 \sum f'_{zx} dm &= q B. \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

Hiermit gehen die (2) des vorigen Paragraphen über in:

$$\begin{aligned} C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq &= N \\ A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr &= L \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) rp &= M. \end{aligned}\tag{6}$$

§ 5. Drehbewegung mit Vernachlässigung der äußeren Kräfte und für  $A = B$ . Die äußeren Kräfte, von denen die Drehungsmomente  $N$ ,  $L$  und  $M$  herrühren, wollen wir zunächst vernachlässigen. Wir werden weiterhin erkennen, daß dieser Vorgang bereits einen guten Einblick giebt. Wir setzen ferner mit Rücksicht auf das Ergebnis der Pendelbeobachtungen S. 74 zunächst  $A = B$  und erhalten so aus dem Gleichungssystem (6) des vorigen Paragraphen das einfachere:

$$\begin{aligned} C \frac{dr}{dt} &= 0 \\ A \frac{dp}{dt} + (C - A) qr &= 0 \\ A \frac{dq}{dt} - (C - A) pr &= 0. \end{aligned}\tag{1}$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, daß  $r$  von der Zeit unabhängig ist. Nennen wir die Winkelgeschwindigkeiten  $p$ ,  $q$  und  $r$  zur Zeit  $t = \text{null}$  bzw.  $p_0$ ,  $q_0$  und  $r_0$ , so ist also

$$r = r_0. \tag{2}$$

Setzen wir jetzt

$$\frac{C - A}{A} r_0 = \lambda, \tag{3}$$

so gehen die 2. und 3. Gleichung (1) über in



$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} + \lambda q &= 0 \\ \frac{dq}{dt} - \lambda p &= 0,\end{aligned}\tag{4}$$

deren Integral nach bekannten Regeln der Lehre von den Differentialgleichungen die Form hat

$$\begin{aligned}p &= a \cos(\lambda t + \mu) \\ q &= a \sin(\lambda t + \mu),\end{aligned}\tag{5}$$

für  $a$  und  $\mu$  als Konstanten, die vom Anfangszustande abhängen mittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned}p_0 &= a \cos \mu \\ q_0 &= a \sin \mu.\end{aligned}\tag{5*}$$

(Auf diese Ausdrücke (5) kommt man u. a. dadurch, daß man die erste der (4) differenziert, mittelst der zweiten (4)  $dq : dt$  eliminiert und die entstehende Differentialgleichung 2. Ordnung für  $p$  integriert). Die (5\*) geben zwei Wertsysteme  $(a, \mu)$ , indem das Vorzeichen von  $a$  nicht bestimmt ist. Beide Systeme führen aber mittelst der (5) zu denselben Werten  $p$  und  $q$ .

Um die erhaltenen Integralausdrücke zu deuten, erinnern wir daran, daß den Drehbewegungen  $p$ ,  $q$  und  $r$  um die drei Axen immer

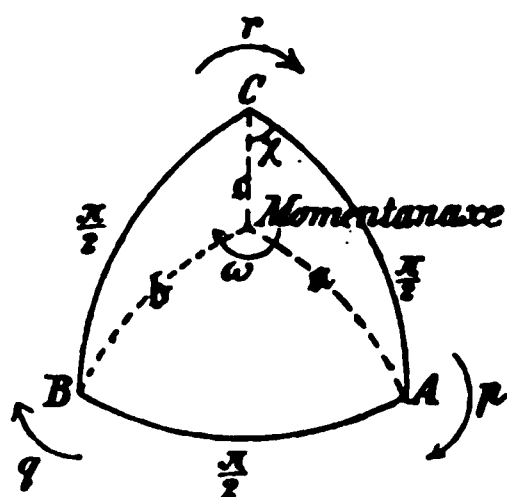


Fig. 64.

eine einzige Bewegung um die Momentanaxe substituiert werden kann, und zwar hat man nach einem bekannten Satze über die Zerlegung einer Drehbewegung nach den drei Axen, wenn  $\omega$  die Drehgeschwindigkeit um die Momentanaxe,  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  ihre Stellungswinkel sind, Fig. 64:

$$p = \omega \cos \alpha, \quad q = \omega \cos \beta, \quad r = \omega \cos \gamma.$$

Hierbei ist mit Rücksicht auf die vorausgesetzte Gleichheit der kleineren Trägheitsmomente  $A$  und  $B$  zu bemerken, daß infolge dessen das Trägheitsmoment für alle zur  $C$ -Axe normalen Schweraxen denselben Wert hat und daher für die beiden zur  $C$ -Axe normalen Axen des mit der Erde fest verbundenen Koordinatenaxensystems nun irgend zwei zur  $C$ -Axe normale Schweraxen zu nehmen sind.

Die sphärischen Relationen der Fig. 64 zeigen aber, daß

$$\cos \alpha = \sin \gamma \cos \chi, \quad \cos \beta = \sin \gamma \sin \chi$$

ist, womit

$$\begin{aligned}r &= \omega \cos \gamma \\ p &= \omega \sin \gamma \cos \chi \\ q &= \omega \sin \gamma \sin \chi\end{aligned}\tag{6}$$

wird. Hieraus folgt einerseits

$$\omega^2 = r^2 + p^2 + q^2;$$

andererseits ist nach (2), (5) und (5\*)

$$r^2 + p^2 + q^2 = r_0^2 + p_0^2 + q_0^2.$$

Mithin ist die *Rotationsgeschwindigkeit der Erde um die Momentandrehaxe konstant*, nämlich gleich

$$\omega = \sqrt{r_0^2 + p_0^2 + q_0^2}, \quad (7)$$

was mit den Erfahrungen im wesentlichen übereinstimmt.

Die 1. Gleichung (6) zeigt jetzt, daß auch  $\tau$  konstant ist, d. h. *die Momentandrehaxe beschreibt um die Axe des größten Trägheitsmoments einen Kreiskegel vom halben Öffnungswinkel  $\tau$* , wobei zufolge der Vergleichung von (5) und (6), für  $\mu$  das Symbol  $\chi_0$  gesetzt, die Lage des sphärischen Radius  $\tau$  auf der Kugel vom Radius 1 gegeben ist durch

$$\chi = \lambda t + \chi_0, \quad (8)$$

die Geschwindigkeit der Rotation des Radius  $\tau$  aber durch

$$\frac{d\chi}{dt} = \lambda, \quad (9)$$

die *Umlaufszeit der Momentanaxe* um die *C-Axe* also endlich durch

$$T = \text{val. abs. } \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (10)$$

Wenn die Momentandrehaxe, welche die Lage der Himmelspole bestimmt, sich im Erdkörper verschiebt, so müssen geogr. Breite, geogr. Längendifferenzen und Azimute veränderlich sein und zwar im vorliegenden Falle periodisch veränderlich. Man hat namentlich die Beträge der Polhöhe einzelner Orte studiert und dabei überhaupt nur Unterschiede von Zehntelsekunden bemerkt, die zum Teil periodische Veränderungen zu sein scheinen und vielleicht von der Rotation der Momentandrehaxe im Erdkörper herrühren können. Die Dauer  $T$  der Periode aber läßt sich zunächst nur aus anderen Erscheinungen mit Sicherheit erkennen, die ebenfalls wie  $\lambda$  von  $(C - A) : A$  abhängen. Dieses ist insbesondere die sehr merkbare Bewegung der Momentanaxe im Raume unter der Einwirkung von Sonne und Mond, wie wir weiterhin noch etwas näher ausführen werden. Die Lunisolarpraezession, ein wesentlicher Teil der erwähnten Bewegung, giebt

$$\frac{C - A}{C} = 0,003272,$$

woraus folgt

$$\frac{C - A}{A} = 0,003283. \quad (11)$$

Da nun erfahrungsmässig  $\tau$  sehr klein sein muß, so kann man nach (6) mit grofser Genauigkeit  $r_0 = \omega$  setzen und erhält aus (3):

$$\lambda = \frac{C - A}{A} \omega = 0,003283 \omega. \quad (12)$$

Mittelst (10) wird somit, wenn man noch beachtet, daß der Absolutwert von  $2\pi : \omega$  die Rotationsdauer der Erde um ihre Axe, d. h. ein Sterntag ist:

$$T' = \text{val. abs. } \frac{2\pi}{\omega} : 0,003283 = 304,6 \text{ Sterntage}. \quad (13)$$

Da aber ein tropisches Jahr (Zeit des scheinbaren Sonnenumlaufs gegen den Frühlings-Tag- und Nachtgleichenpunkt) 366,242 Sterntage und 365,242 mittlere Sonnentage hat, so folgt auch

$$T = 303,8 \text{ mittlere Tage}. \quad (14)$$

Andererseits beschreibt die Momentanaxe in einem Jahre um die Hauptaxe  $C$  einen Winkel gleich  $360^\circ \cdot 366,242 : 304,6$  d. i.

$$432,8^\circ. \quad (15)$$

§ 6. Die Polhöhe von Pulkowa nach C. A. F. Peters. Eine genaue Untersuchung über die Bewegung der Momentandrehaxe der Erde führte zuerst *Peters* 1842–43 mittelst einer Reihe von 279 Bestimmungen des Polarsterns in Zenithdistanz, deren jede eine Gleichung für die Polhöhe (geogr. Breite) des Beobachtungsortes Pulkowa gab\*). In folgender Tabelle (s. nächste Seite) sind die Mittelwerte der Beobachtungen für 18 Zeitintervalle behufs Erlangung einer Übersicht zusammengestellt. Fig. 65 giebt dieselbe graphisch. In jedem Intervall war die Lage des Fernrohres konstant.

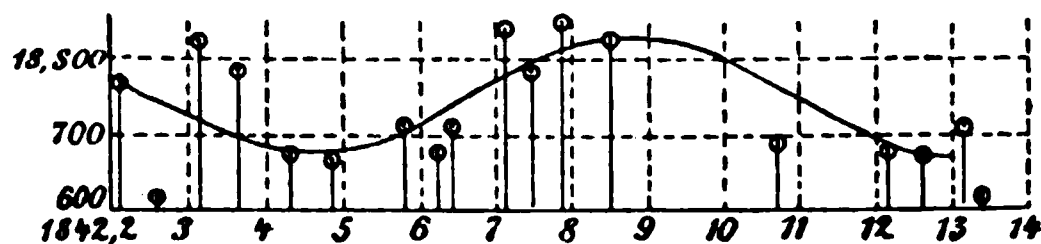


Fig. 65.

In den Ausdrücken für die beobachtete Polhöhe bezieht sich  $\Delta w$  auf eine Verbesserung des Ausdehnungskoeffizienten der Luft, für welchen *Peters* den Ausdruck

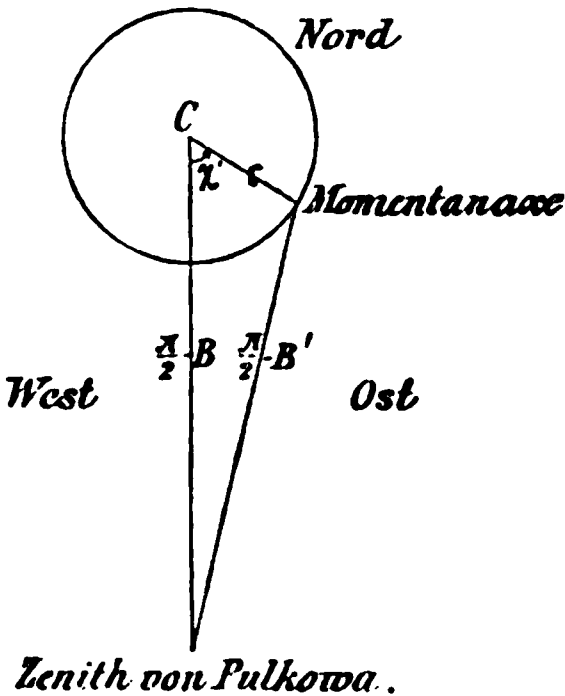
$$0,0046254 + \frac{\Delta w}{326,4} \text{ für } 1^\circ R$$

eingührt.  $\Delta w$  wird gleichzeitig mit der Polhöhe, der Biegung des Fernrohres und zwei Konstanten, welche die Bewegung der Momentanaxe

\*) „Resultate aus den Beobachtungen des Polarsterns am *Ertelschen* Vertikalkreise der Pulkowaer Sternwarte.“ *Bulletin de la Classe physico-mathém. de l'Ac. imp. des sc. de St. Pétersbourg* 1844 t. II p. 305.

Nach *Nyrén* hat auch *Bessel* einen Versuch gemacht, durch Beobachtung eines Meridianzeichens die Lage der Rotationsaxe zu untersuchen.

charakterisieren, aus einer Ausgleichung ermittelt. Als normalen Wert  $B$  der Polhöhe wird man das Komplement des Winkels zwischen dem Zenith des Beobachtungsortes und dem durch die Hauptaxe  $C$  markierten, festen nördlichen Himmelspol ansehen, während sich die Beobachtung  $B'$  auf das Komplement des Winkels zwischen dem Zenith und dem durch die Momentanaxe markierten wirklichen Pol bezieht, Fig. 66. Da die Erde von Norden gesehen entgegen dem Uhrzeiger rotiert, führen wir anstatt  $\chi$  die mit der Zeit wachsende Variable  $\chi'$  ein, indem wir für  $\chi$ , Fig. 64, setzen  $-\chi'$ .



Man hat nach der Figur mit Rücksicht auf den geringen Wert von  $\tau$ ,  $t$  in Jahren gerechnet:

$$B' = B + \tau \cos \chi' = B + \tau \cos (\chi_0' + 432,8^{\circ} t) .$$

Lage	Zeit	Zeit in Jahresbruch	Beobachtete Polhöhe	Anzahl der Beobacht.	59° 46'
1	1842 März 11/22	1842,21	59°46' 18,766" — 0,46 <i>Aw</i>	12	18,771"
2	April 2/11	27	613 — 0,40	12	617
1	April 11/Mai 1	31	824 — 0,05	17	824
2	Mai 2/26	37	789 + 0,76	23	781
1	Mai 27/Juni 13	43	686 + 1,20	25	674
2	Juni 14/Juli 9	49	678 + 1,07	24	667
1	Juli 13/Aug. 9	58	723 + 1,22	26	711
2	Aug. 10/18	62	687 + 1,25	14	675
1	Aug. 19/Sept. 2	64	723 + 1,16	9	711
2	Sept. 5/20	71	848 + 0,72	13	841
1	Sept. 21/Okt. 8	75	789 + 0,39	12	785
2	Okt. 10/19	79	871 — 0,02	13	871
1	Okt. 21/Dez. 7	1842,85	829 — 0,26	11	832
2	Dez. 17/Febr.23	1843,07	689 — 0,67	17	696
1	1843 März 4/26	21	675 — 0,85	19	684
2	März 28/Apr.11	26	671 — 0,65	10	678
1	April 13/28	31	710 + 0,02	20	710
2	April 28/30	33	615 + 0,52	3	610

Indem  $t$  von 1842,0 ab gezählt wird, findet sich

$$\begin{aligned} B &= 59^{\circ} 46' 18,755'' \pm 0,011'' \\ \tau &= + 0,079'' \pm 0,017'' \\ \chi_0' &= 341,6^{\circ} \pm 14,0^{\circ} \\ \Delta w &= - 0,017 \pm 0,018 \\ \beta &= - 0,010'' \pm 0,009''. \end{aligned}$$

$\beta$  ist die Verbesserung des angenommenen Näherungswertes der Biegung des Fernrohrs in oberer Kulmination; die Unsicherheiten sind wahrscheinliche Fehler. *Peters* führt bei der Ausgleichung Gewichte mit Rücksicht auf den Luftzustand ein; als w. F. seiner Gewichtseinheit folgt aus den 279 Fehlergleichungen  $\pm 0,229''$ , und da durchschnittlich das Gewicht einer solchen 2,7 ist, so ist der w. F. einer Fehlergleichung (Beobachtung) gleich  $\pm 0,14''$ .

In unserer Tabelle sind nur die Anzahlen der Beobachtungen aufgeschrieben, da die Mittelwerte einfache Mittel ohne Rücksicht auf Gewichte sind. Diese Anzahlen sind aus der später zu erwähnenden Schrift von *Nyrén* entnommen (ihre Summe giebt aus nicht aufgeklärtem Grunde 280 anstatt 279).

Mit  $\Delta w = - 0,017$  folgt der Ausdehnungskoeffizient der Luft für 1 Centigrad gleich 0,003659 (für  $1^{\circ} R$  gleich 0,004573), ein Wert welcher dem Ausdehnungskoeffizienten 0,003670 trockener Luft nach neueren Untersuchungen sehr nahe kommt. Die letzte Rubrik unserer Tabelle ist mit  $\Delta w = - 0,01$  berechnet, welcher Wert zu 0,003676 gehört und durch Abrundung aus dem zu 0,003670 gehörenden Wert entstanden ist. Bekanntlich unterscheiden sich das Brechungsvermögen trockener und feuchter Luft bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur nur sehr wenig, dagegen ist noch nicht ausgemacht, daß die Änderung des Refraktionskoeffizienten mit der Temperatur genau nach dem Ausdehnungskoeffizienten der Luft erfolgt, wie die gebräuchliche Theorie lehrt. Es war also einerseits von *Peters* eine nützliche Vorsicht,  $\Delta w$  als Unbekannte einzuführen, andererseits durften wir  $\Delta w$ , von 0,003670 ausgehend, etwas abrunden.

Die graphische Darstellung, Fig. 65, zeigt die Werte der letzten Kolumne und die Ausgleichungslinie nach *Peters*. Der Anblick zeigt, daß trotz des geringen w. Fehlers in  $\tau$  und  $\chi_0'$  die Bestimmung dieser Größen unsicher ist und daß, wie *Peters* erwähnt, recht wohl ein Einfluß von jährlicher Periode (wie z. B. eine Refraktionsanomalie) in  $\tau$  und  $\chi_0$  zur Darstellung gelangen kann.

§ 7. Die Polhöhe von Pulkowa nach *Nyrén*. *Peters* sah selbst ein, daß seine Beobachtungsreihe trotz der großen Schärfe der Messungen zu kurz sei, um andere periodische Einflüsse von der zehnmonatlichen Periode zu trennen. Er setzte deshalb die Beob-

achtungen fort und erhielt schliesslich 1842—44 im ganzen 371 Beobachtungen. 1863—70 beobachtete *Gylden* im ganzen 236 mal, 1871—73 *Nyrén* 155 mal mit demselben Instrument. Alle diese Messungen hat *Nyrén* einer äusserst sorgfältigen Bearbeitung unterworfen.\*)

Er rechnet mit der jährlichen Veränderung  $428,9^\circ$  in  $\chi$  und findet mit Angabe wahrscheinlicher Fehler aus den Messungen von *Peters*:

$$\tau = 0,101'' \pm 0,014'' \quad \chi_0' = 52,7^\circ \pm 6,2^\circ \text{ für } 1843,0;$$

aus den Messungen von *Gylden*:

$$\tau = 0,125'' \pm 0,017'' \quad \chi_0' = 290,6^\circ \pm 8,7^\circ \text{ für } 1868,0;$$

aus seinen eigenen Messungen:

$$\tau = 0,058'' \pm 0,015'' \quad \chi_0' = 85,1^\circ \pm 19,3^\circ \text{ für } 1868,0.$$

Die Übereinstimmung der  $\chi_0'$  ist aber eine möglichst schlechte. Denn fügt man zu  $\chi_0'$  für 1843,0 den Betrag 25 mal  $428,9^\circ$  hinzu, so folgt nach den Messungen von *Peters*:

$$\chi_0' = 335,2^\circ \text{ für } 1868,0.$$

*Nyrén* bemerkt nun, dass eine Vergrößerung des angewandten Wertes der jährlichen Veränderung von  $\chi'$  eine bessere Übereinstimmung für  $\chi_0$  hervorbringt. Mit 430,3 wird bezw. erhalten:

$$\chi_0' = 10,2^\circ, \quad 293,6^\circ, \quad 79,1^\circ.$$

Gelegentlich seiner Bestimmung der Nutationskonstante aus Beobachtungen von *W. Struve* am Passageninstrument im ersten Vertikal hat *Nyrén* aber erhalten:

$$\tau = 0,040'' \pm 0,010'' \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi_0' = 24,0^\circ \text{ mit } 428,9^\circ \\ \chi_0' = 63,4^\circ \text{ mit } 430,3^\circ \end{array} \right\} \text{ für } 1868,0.$$

Nehmen wir an, dass die Änderungen in  $\chi_0'$  für einen anderen Zuwachs in der jährlichen Veränderung von  $\chi'$  gleich  $1,4^\circ$  dieselben sind, wie bei dem ersten Zuwachs, was allerdings nicht ganz richtig ist, so werden die vier Werte von  $\chi_0'$  reduziert auf 1868,0:

für	<i>Peters</i>	<i>Gylden</i>	<i>Nyrén</i>	<i>Struve</i>
428,9 <sup>0</sup>	335,2 <sup>0</sup>	290,6 <sup>0</sup>	85,1 <sup>0</sup>	24,0 <sup>0</sup>
430,3	10,2	293,6	79,1	63,4
431,7	45,2	296,6	73,1	102,8
433,1	80,2	299,6	67,1	142,2

\*) „Die Polhöhe von Pulkowa von *Dr. M. Nyrén*.“ (*Mémoires de l'Ac. imp. des sc. de St. Pétersbourg*, 7. sér. t. 19 1873 No. 10.)

Hiernach scheint der Übereinstimmung ein Wert der jährlichen Veränderung in  $\chi'$  von 431 bis 432 am günstigsten zu sein, wenn man von dem Wert  $\chi_0'$  absieht, der aus *Gyldéns* Messungen folgt.\*\*) Diese sind zur Ableitung von  $\tau$  und  $\chi_0'$  wenig günstig, da sie wesentlich auf die Monate März bis Mai, September und Oktober fallen. Das Auftreten unerkannter systematischer Fehler ist auch bei dieser Reihe ganz besonders auffallend, da weit öfter als bei den anderen beiden Reihen benachbarte Fehlergleichungen übrigbleibende Fehler mit gleichen Vorzeichen haben.\*\*\*) Es ist hiernach nicht unmöglich, daß bei *Gyldéns* Reihe in  $\tau$  und  $\chi_0'$  vorherrschend Einflüsse anderer Art zum Ausdruck gelangen, trotz des geringen wahrscheinlichen Fehlers der Resultate, der wie bei allen drei Reihen, besonders aber bei dieser, eben wegen des systematischen Charakters der übrig bleibenden Fehler ganz und gar keinen Genauigkeitsmaßstab abgibt.

*Nyrén* erwähnt, daß eine Kombination aller drei Reihen zu einer gemeinsamen Bestimmung von  $\tau$  und  $\chi_0'$  unausführbar ist wegen zu

\*) Zu demselben Resultat führen die Beobachtungen dreier Sterne für die Bestimmung der Nutationskonstante, die *Nyrén* S. 38 anführt.  $\chi_0'$  wurde für 1850 etwa gleich  $253^\circ$  und hiernach für 1868 mit  $431,5^\circ$  j. V. gleich  $100^\circ$ .

\*\*) Eine flüchtige Übersicht führte uns zu Folgendem. Es kommen Fehler mit gleichen Zeichen hinter einander vor bei

<i>Peters</i>	<i>Gyldén</i>	<i>Nyrén</i>
4 $\times$ + 5	2 $\times$ + 5	1 $\times$ + 5
2 $\times$ - 5	3 $\times$ - 5	2 $\times$ - 5
3 $\times$ - 6	1 $\times$ + 6	2 $\times$ + 7
2 $\times$ + 8	3 $\times$ - 8	1 $\times$ - 8
2 $\times$ - 8	1 $\times$ - 9	1 $\times$ - 12
1 $\times$ - 10	2 $\times$ - 11	bei 155
bei 371	1 $\times$ - 12	Beobachtungen
Beobachtungen	1 $\times$ - 15	
	1 $\times$ + 27	
	bei 236	
	Beobachtungen	
Sa. 90 Fehler	Sa. 140 Fehler	Sa. 49 Fehler
oder 24%;	oder 59%;	oder 32%;
Durchschnitt	Durchschnitt	Durchschnitt
6,4	9,3	7,0

In dieser Tabelle bedeutet z. B. in der ersten Rubrik 4  $\times$  + 5: es kommen viermal fünf positive Fehler hintereinander; ferner der Schluß der ersten Rubrik: 24% aller Fehler treten als Gruppen von fünf und mehr mit gleichen Zeichen auf; die durchschnittliche Anzahl der Fehler von gleichem Zeichen ist 6,4 (abgesehen von den Gruppen mit weniger als fünf Fehlern von gleichem Zeichen).



ungenauer Kenntniss der jährlichen Veränderung von  $\chi'$ . In der That würde auch der Versuch, eine Verbesserung des angenommenen Wertes der jährlichen Veränderung von  $\chi'$  mit unter die Unbekannten aufzunehmen, nur wenig Erfolg versprechen, da bereits  $1^\circ$  Änderung dieser Gröfse in 30 Jahren schon  $30^\circ$  giebt, und dieser Wert kaum noch als kleine Gröfse, deren Quadrat verschwindet, angesehen werden kann, wie es die Ausgleichungsrechnung erfordert.

Immerhin kann man auch die jährliche Veränderung von  $\chi'$  aus den zu einer Reihe kombinierten drei Reihen bestimmen, indem man nämlich etwa für die jährliche Veränderung von  $\chi' = 430, 431, 432$  u. s. f. je eine Ausgleichung ausführt, die Quadratsumme der übrigbleibenden Fehler für jeden Fall ermittelt und durch Interpolation denjenigen Wert von  $\chi'$  bestimmt, welcher den besten Anschluß giebt.

Eine gründliche Untersuchung würde indessen vorher zu überlegen haben, ob nicht  $\tau$  und  $\chi_0'$  überhaupt so veränderlich sind, daß eine solche Rechnung ganz wertlos sein muß.\*) Wenn allem Vermuten nach meteorologische Vorgänge die wesentlichste Ursache von Veränderungen in  $\tau$  und  $\chi_0'$  sind, so dürfte sich zeigen, daß  $\tau$  und  $\chi_0'$  hauptsächlich periodischen Veränderungen unterliegen, herrührend von den periodischen Veränderungen der meteorologischen Verhältnisse, während die säkularen Veränderungen der letzteren einflußlos bleiben. Es ist dann die Frage, ob gegenüber den Schwankungen in  $\chi_0'$  noch von einem Mittelwert für diese Gröfse die Rede sein kann.

Einstweilen scheint es uns ganz angemessen, der Veränderlichkeit von  $\tau$  und  $\chi_0'$  nicht allzuviel Bedeutung beizulegen und nach *Peters* und *Nyrén* anzusetzen\*\*):

$$\tau = \frac{1}{15}''$$

$$\chi_0' = 70^\circ \text{ für } 1868,0 \text{ und den Meridian von Pulkowa.}$$

Die entsprechende jährliche Veränderung  $431,5^\circ$  paßt sehr gut zu dem Wert  $(C - A) : C$  auf S. 393 unter (11) und giebt denselben nur zehn Einheiten der sechsten Decimalstelle kleiner.

\*) *William Thomson* hält die Resultate *Nyréns* in der That für solche, welche die Veränderlichkeit von  $\tau$  und  $\chi_0'$  beweisen; als Ursache genügen ihm lediglich meteorologische Prozesse (*American J. of Sc. a. A.* Bd. 12 1876, S. 351). Wir kommen weiterhin (§ 16) auf Entwicklungen, welche gestatten, Schätzungen dieser Art anzustellen.

\*\*) Nach *Oppolzer*, *Bahnbestimmung* 2. Aufl. S. 151, hat *Downing* aus der Diskussion zehnjähriger Greenwicher Beobachtungen (1868–77) ähnliche Resultate wie *Peters* und *Nyrén* erhalten.



... ~~aus~~ **aus** einer Ungleichheit von  $A$  und  $B$ . Wir  
... die Gleichungen (6) S. 391 unter Vernachlässigung  
... ~~der~~ **der** ~~Störung~~ <sup>\*)</sup>:

$$\begin{aligned} C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq &= 0 \\ A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr &= 0 \\ B \frac{dq}{dt} - (C - A) pr &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

wobei wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$C > B > A$$

annehmen dürfen.

Differentialgleichungen dieser Form kann man mittelst der elliptischen Funktionen herleiten. Ist nämlich  $\psi$  als Funktion von  $u$  definiert durch die Gleichung

$$u = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \psi}}, \quad (2)$$

so hat man, wenn

$$\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \psi} = \Delta \psi \quad (3)$$

gesetzt wird, aus (2):

$$\frac{du}{d\psi} = \frac{1}{\Delta \psi} \quad (4)$$

und daher:

$$\begin{aligned} \frac{d \Delta \psi}{du} &= - \frac{\kappa^2 \sin \psi \cos \psi}{\Delta \psi} \frac{d\psi}{du} = - \kappa^2 \sin \psi \cos \psi \\ \frac{d \cos \psi}{du} &= - \sin \psi \frac{d\psi}{du} = - \sin \psi \Delta \psi \\ \frac{d \sin \psi}{du} &= \cos \psi \frac{d\psi}{du} = \cos \psi \Delta \psi. \end{aligned} \quad (5)$$

Vergleicht man mit (1), so leuchtet die Möglichkeit ein, daß denselben genügt wird durch

\*) Im wesentlichen bis Gleichung (14\*) nach *Kirchhoff*, *Vorlesungen über mathemat. Physik, Mechanik*, 2. Aufl. 1877 S. 64. Es mag hierbei Folgendes bemerkt werden:

Schon *Euler* behandelte die Drehung eines festen Körpers, und zwar führte er  $p$ ,  $q$  und  $r$  ein und stellte die Gleichungen (6) S. 391 auf. Für den Fall  $A = B$  weist er die zehnmönatliche Umdrehungsdauer der Momentanaxe nach.

*Laplace* behandelt die Drehung in der *Méc. cél.* t. I, l. 1, p. 70–90.

*Poisson* behandelt das Problem u. a. in der zweiten Ausgabe der *Traité de méc.* t. II p. 194.

*Jacobi* führte die elliptischen Funktionen in die Behandlung des Problems ein. Neuere Arbeiten sind namentlich von *J. Somoff* in den *Bull. phys.-math. de St. Pétersbourg* 1856 Bd. 14 S. 153 und *E. Matthieu* in *Liouvilles Journal* 1876, die uns aber nicht zur Hand waren.

$$p = a \cos \psi \quad q = b \sin \psi \quad r = c \Delta \psi, \quad (6)$$

worin  $a$ ,  $b$  und  $c$  noch unbestimmte Konstanten bezeichnen. Außerdem wird man  $du$  gleich einem Vielfachen von  $dt$ , d. h.  $du = \lambda dt$  und also

$$u = \lambda t + \mu \quad (7)$$

setzen,  $\mu$  eine Konstante. Hiermit geben die (5) das System:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\lambda} \frac{dr}{dt} + \kappa^2 \frac{pq}{ab} &= 0 \\ \frac{1}{a\lambda} \frac{dp}{dt} + \frac{qr}{bc} &= 0 \\ \frac{1}{b\lambda} \frac{dq}{dt} - \frac{pr}{ac} &= 0, \end{aligned}$$

welches mit (1) zur Übereinstimmung gelangt, wenn man  $abc\lambda\kappa^2$  mit Rücksicht auf die nachstehenden Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2 \lambda c}{ab} &= \frac{B - A}{C} \\ \frac{\lambda a}{bc} &= \frac{C - B}{A} \\ \frac{\lambda b}{ac} &= \frac{C - A}{B}. \end{aligned} \quad (8)$$

Zwei von den genannten fünf Konstanten bleiben unbestimmt; dazu tritt noch  $\mu$ , sodaß die Lösung drei unbestimmte Konstanten enthält, wodurch sie zur allgemeinen Lösung wird. Auch diese drei bestimmen sich, wenn der Anfangszustand bekannt ist. Sind zur Zeit  $t = \text{null}$  die Werte von  $p$ ,  $q$  und  $r$  bekannt und gleich  $p_0$ ,  $q_0$  und  $r_0$ , so wird aus den (6) mit Rücksicht auf (2) und (7):

$$p_0 = a \cos \text{am } \mu \quad q_0 = b \sin \text{am } \mu \quad r_0 = c \Delta \text{am } \mu, \quad (9)$$

wenn allgemein  $\psi$  die Amplitude von  $u$  genannt wird.

Verbindet man die (8) paarweise durch Multiplikation, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2 \lambda^2}{a^2} &= \frac{(B - A)(C - A)}{BC} \\ \frac{\kappa^2 \lambda^2}{b^2} &= \frac{(B - A)(C - B)}{AC} \\ \frac{\lambda^2}{c^2} &= \frac{(C - A)(C - B)}{AB}. \end{aligned} \quad (10)$$

Aus den (9) aber folgt durch Elimination von  $\text{am } \mu$ :

$$\frac{p_0^2}{a^2} + \frac{q_0^2}{b^2} = 1 \quad \frac{r_0^2}{c^2} + \frac{\kappa^2 q_0^2}{b^2} = 1. \quad (11)$$

Bestimmt man aus den beiden ersten (10)  $a^2 : b^2$  und aus den beiden letzten (10)  $b^2 : c^2$  und eliminiert damit  $b^2$  aus der ersten und zweiten Gleichung (11), so folgt zur Bestimmung von  $a^2$  und  $c^2$ :

$$\begin{aligned}
 a^2 &= p_0^2 + \frac{C-B}{C-A} \frac{B}{A} q_0^2 \\
 c^2 &= r_0^2 + \frac{B-A}{C-A} \frac{B}{C} q_0^2
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

und zur Bestimmung von  $b^2$ ,  $\lambda^2$  und  $\kappa^2$  aus den (10):

$$\begin{aligned}
 b^2 &= a^2 \frac{C-A}{C-B} \frac{A}{B} \\
 \lambda^2 &= c^2 \frac{(C-A)(C-B)}{AB} \\
 \kappa^2 &= \frac{a^2}{c^2} \frac{B-A}{C-B} \frac{A}{C} .
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Mittelst dieser Gleichungen (12) und (13) und einer der (9) ist das System der Konstanten  $abc \lambda \mu \kappa^2$  aus den Trägheitsmomenten und dem Anfangszustande abgeleitet. Es ist indes noch zu bemerken, daß die (12) und (13) die Vorzeichen von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $\lambda$  unbestimmt lassen; jedoch bestimmen die (8) und (9) die Vorzeichen zum Teil. Da  $\angle$  am  $\mu$  positiv ist, so hat nach der dritten Gleichung (9)  $c$  dasselbe Vorzeichen wie  $r_0$ ; jede der Gleichungen (8) verlangt ferner, daß das Produkt  $\lambda abc$  positiv sei. Für zwei der drei Größen  $\lambda ab$  ist somit das Vorzeichen beliebig. Die verschiedenen Annahmen führen jedoch mittelst der (6) und (7) zu denselben Werten von  $p$ ,  $q$  und  $r$ , wie man erkennt, wenn man noch die Bestimmung von  $\mu$  aus den ersten beiden Gleichungen (9) in betracht zieht. Es ist nicht nötig, dieses hier weiter auszuführen.

Wie bemerkt, bestimmen sich  $p$ ,  $q$  und  $r$  mittelst der (6) und (7), wobei noch (2) und (3) zu beachten sind. Mit Einführung der Bezeichnung  $\psi = \text{am } u$  in die (6) ergibt sich zur Ermittlung von  $p$ ,  $q$  und  $r$  das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 p &= a \cos \text{am } u \\
 q &= b \sin \text{am } u
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

$$r = c \angle \text{am } u$$

$$u = \lambda t + \mu , \tag{14^*}$$

worin die drei Faktoren von  $a$ ,  $b$  und  $c$  als elliptische Funktionen bezeichnet werden.

Zur Bestimmung der Lage der Momentanaxe und der augenblicklichen Drehgeschwindigkeit ist wie in § 5 S. 392 zu setzen:

$$\begin{aligned}
 p &= \omega \sin \tau \cos \chi \\
 q &= \omega \sin \tau \sin \chi \\
 r &= \omega \cos \tau .
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Hieraus und aus den (14) folgt  $\omega^2 = a^2 \cos^2 \text{am } u + b^2 \sin^2 \text{am } u + c^2 \angle^2 \text{am } u$  oder

$$\omega^2 = a^2 + c^2 - (a^2 - b^2 + c^2 \kappa^2) \sin^2 \text{am } u ; \tag{16}$$

da  $u$  aber von der Zeit abhängt, so ist  $\omega$  jetzt veränderlich — nicht mehr konstant wie für  $A = B$ .

Betrachten wir nun ferner die (14), so ist klar, daß ein Wachstum von  $u$  um  $2\pi$  wieder dieselben Werte  $p$ ,  $q$  und  $r$ , und also nach (16) und (15) dieselbe Lage der Momentanaxe ergibt. Wächst dagegen  $u$  nur um  $\pi$ , so wechseln  $p$  und  $q$  ihr Vorzeichen und die Lage der Momentanaxe wird bezüglich der Axe  $C$  die entgegengesetzte. Hieraus erhellt, daß die Momentanaxe um letztere eine geschlossene Kegelfläche beschreibt. Die Umlaufszeit ergibt sich aus der Betrachtung von  $\mu$  nach der Definition durch Ausdruck (2).

Geht nämlich am  $u = \psi$  von  $\psi_1$  in  $\psi_2 = \psi_1 + 2\pi$  über, so wird

$$u_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\Delta\psi} + \int_{2\pi}^{2\pi + \psi_1} \frac{d\psi}{\Delta\psi}.$$

Im zweiten Teil rechter Hand setzen wir  $\psi = 2\pi + \psi'$ ; dadurch geht er in

$$\int_0^{\psi_1} \frac{d\psi'}{\Delta\psi'}$$

über; das ist aber  $u_1$ . Für den ersten Teil beachten wir, daß derselbe viermal so groß ist als

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\Delta\psi}, \quad (17)$$

da das Integral von  $d\psi : \Delta\psi$  augenscheinlich für alle vier Quadranten denselben Wert erhält. Damit wird

$$u_2 = u_1 + 4K.$$

Setzen wir nun die Änderung der Zeit  $t$  von  $t_1$  bis  $t_2$  absolut genommen gleich  $T$ , so folgt mit Rücksicht auf (7) die Umlaufszeit

$$T = \text{val. abs.} \frac{4K}{\lambda}. \quad (18)$$

Man erkennt, daß sie für alle Umläufe denselben Wert behält.

Aus den beiden ersten (15) sowie aus (14) folgt ferner mit Rücksicht auf (16):

$$\sin^2 \epsilon = \frac{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \text{am } u}{a^2 + c^2 - (a^2 - b^2 + c^2 x^2) \sin^2 \text{am } u}. \quad (19)$$

Hieraus ergibt sich durch Differentiation

$$d \sin^2 \epsilon = \frac{c^2 (b^2 - a^2 + a^2 x^2) d \sin^2 \text{am } u}{[a^2 + c^2 - (a^2 - b^2 + c^2 x^2) \sin^2 \text{am } u]^2}.$$

Da  $b^2 > a^2$  ist, wie die erste Gleichung (13) zeigt, so ändern sich hiernach  $\sin^2 \epsilon$  und  $\sin^2 \alpha$  in demselben Sinne: Ihre Maxima und Minima fallen zusammen.

Das Maximum von  $\sin^2 \epsilon$  fällt auf am  $u = \frac{\pi}{2}$  bzw.  $\frac{3\pi}{2}$  u. s. f., und zwar ist

$$\sin^2 \epsilon_{\max} = \frac{b^2}{b^2 + c^2 - c^2 \kappa^2} = \frac{a^2 \frac{C-A}{C-B} \frac{A}{B}}{c^2 + a^2 \frac{A(C+B-A)}{BC}} \quad (20)$$

Das Minimum fällt auf am  $u = \text{null}$  bzw.  $\pi$  u. s. f., und zwar ist

$$\sin^2 \epsilon_{\min} = \frac{a^2}{c^2 + a^2} \quad (21)$$

Hieraus folgt noch

$$\sin^2 \epsilon_{\max} - \sin^2 \epsilon_{\min} = \frac{a^2 \frac{B-A}{C-B} \left( c^2 \frac{A+B-C}{B} + a^2 \frac{A}{C} \right)}{(c^2 + a^2) \left( c^2 + a^2 \frac{A(C+B-A)}{BC} \right)} \quad (22)$$

Die Maxima und Minima von  $\sin^2 \epsilon$  teilen die Umlaufszeit  $T$  in vier gleiche Teile, denn wenn am  $u = \psi$  von null aus um  $\frac{\pi}{2}$  wächst, so wächst  $u$  um  $K$  und  $t$  absolut genommen um  $K : \lambda$ , d. i.  $\frac{T}{4}$ , u. s. f.

§ 9. Fortsetzung:  $B - A$  sehr klein. Für die Erde ist  $\frac{B-A}{C-A}$  jedenfalls ein kleiner Bruch, etwa von derselben Ordnung wie  $1/100$ . In diesem Falle ist nach (22) des vorigen Paragraphen angenähert:

$$\sin^2 \epsilon_{\max} - \sin^2 \epsilon_{\min} = \frac{a^2}{c^2 + a^2} \frac{B-A}{C-A} = \sin^2 \epsilon \frac{B-A}{C-A}$$

und hieraus:

$$\sin \epsilon_{\max} - \sin \epsilon_{\min} = \frac{1}{2} \sin \epsilon \frac{B-A}{C-A}, \quad (1)$$

wenn  $\sin \epsilon$  rechter Hand irgend einen mittleren Wert von  $\sin \epsilon$  bezeichnet. Die Schwankungen in  $\epsilon$  sind somit auch sehr klein und bei der Erde ganz unmerkbar.

Auch  $\omega$  ist für die Erde als konstant anzusehen. Denn es wird nach (16), sowie mit Rücksicht auf (12) und (13) des vorigen Paragraphen:

$$\omega^2 = p_0^2 + q_0^2 + r_0^2 + \frac{B-A}{C-A} \cdot \frac{(C-B)(C-A)}{AC} (q_0^2 - q^2)$$

und somit angenähert, wenn  $q = \omega \sin \epsilon \sin \chi$  und  $q_0 = \omega \sin \epsilon \sin \chi_0$  gesetzt wird:

$$\omega = \sqrt{p_0^2 + q_0^2 + r_0^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{B-A}{C-A} \left( \frac{C-A}{A} \right)^2 \sin^2 \epsilon (\sin^2 \chi - \sin^2 \chi_0) \right\}.$$

Für  $\epsilon = 1''$  schwankt die Abweichung des Wertes der großen Parenthese gegen die Einheit nur um rund

$$\frac{B-A}{C-A} : 8\,000\,000\,000\,000\,000.$$

§ 10. Der Satz von der unveränderlichen Ebene. Wenn wir von äußeren Kräften absehen, so gilt für die Bewegung der Teile der Erde um ihren Schwerpunkt — auch wenn die Erde kein fester Körper ist — der Satz von der unveränderlichen Ebene. Diesen Satz wollen wir hier ableiten.

Bezogen auf das System der festen Koordinatenachsen der  $x$ ,  $y$  und  $z$  ist nach (5) S. 388:

$$\begin{aligned} 2 \sum \frac{df_{xy}}{dt} dm &= 0 \\ 2 \sum \frac{df_{yz}}{dt} dm &= 0 \\ 2 \sum \frac{df_{zx}}{dt} dm &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

woraus durch Integration folgt, wenn  $P$ ,  $Q$  und  $R$  drei Konstanten bezeichnen:

$$\begin{aligned} 2 \sum f_{xy} dm &= R \\ 2 \sum f_{yz} dm &= P \\ 2 \sum f_{zx} dm &= Q. \end{aligned} \quad (2)$$

$R$ ,  $P$  und  $Q$  kann man als Projektionen einer Größe  $K$  ansehen, dergestalt, daß

$$\begin{aligned} R &= K \cos \epsilon' \\ P &= K \cos \alpha' \\ Q &= K \cos \beta' \end{aligned} \quad (3)$$

und also

$$P^2 + Q^2 + R^2 = K^2$$

ist. Die Winkel  $\alpha'$ ,  $\beta'$  und  $\epsilon'$  legen als Stellungswinkel eine Ebene durch den Schwerpunkt von konstanter Lage fest, die wir sogleich die unveränderliche nennen wollen und die sich, wie wir sehen werden, auch ohne Bezug auf ein festes Koordinatenaxensystem charakterisieren läßt.

Wir erinnern nun daran, daß  $f_{xy}$ ,  $f_{yz}$  und  $f_{zx}$  die Flächengeschwindigkeiten der Projektionen des Radiusvektors eines Teilchens  $dm$  bzw. in der Ebene  $xy$ ,  $yz$  und  $zx$  sind. Bezeichnet man mit  $f$  die wirkliche Flächengeschwindigkeit des (vom Erdschwerpunkt ausgehenden) Radiusvektors und sind die Stellungswinkel des Flächenelementes  $f dt$  bzw. zur  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Axe  $u$ ,  $v$  und  $w$ , so hat man

$$f_{xy} = f \cos w \quad f_{yz} = f \cos u \quad f_{zx} = f \cos v.$$

Projiziert man nun  $f$  auf eine andere Ebene mit den Stellungswinkeln  $a$ ,  $b$  und  $c$ , so ist die Projektion gleich  $f \cos n$ , wenn  $n$  der Neigungswinkel von  $f dt$  gegen die Ebene  $(abc)$  ist. Nun ist aber

$$\cos n = \cos a \cos u + \cos b \cos v + \cos c \cos w,$$

folglich wird

$$f \cos n = f_y \cos a + f_{xz} \cos b + f_{xy} \cos c$$

und

$$2 \sum f \cos n \, dm = I' \cos a + Q \cos b + R \cos c,$$

oder mit Rücksicht auf die (3):

$$2 \sum f \cos n \, dm = K (\cos a \cos \alpha' + \cos b \cos \beta' + \cos c \cos \gamma').$$

Der Ausdruck rechter Hand ist ein Maximum für den Fall, daß die Ebene  $(abc)$  in die unveränderliche Ebene fällt oder mit ihr parallel ist. Alsdann wird

$$2 \sum f \cos n \, dm = K. \quad (4)$$

Die unveränderliche Ebene ist also dadurch charakterisiert, daß für sie die Summe der Projektionen der auf gleich große Massenteilchen bezogenen Flächengeschwindigkeiten  $f$  der Radienvektoren ein konstantes Maximum ist — oder anders ausgedrückt:

Es hat die Ebene der konstanten größten Projektionssumme der Flächengeschwindigkeiten eine konstante Lage im Raume.

$K$  ist eine von der Wahl des Koordinatensystems unabhängige, dem Massensystem eigentümliche Konstante.

§ 11. Die Bewegung der Momentanaxe im Raume, abgesehen von äußeren Kräften. Nehmen wir zur Zeit  $t$  als Axen der  $x$ ,  $y$  und  $z$  die Hauptaxen  $A$ ,  $B$  und  $C$ , so ist wie S. 391 (5):

$$\begin{aligned} 2 \sum f_{xy} \, dm &= R = r C \\ 2 \sum f_y \, dm &= P = p A \\ 2 \sum f_{xz} \, dm &= Q = q B. \end{aligned} \quad (1)$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf die (3) des vorigen Paragraphen sofort für die Neigungswinkel  $\alpha'$ ,  $\beta'$  und  $\gamma'$  der Normale der unveränderlichen Ebene zu den drei Hauptaxen  $A$ ,  $B$  und  $C$ :

$$\begin{aligned} \cos \alpha' &= \frac{p A}{K} \quad \cos \beta' = \frac{q B}{K} \quad \cos \gamma' = \frac{r C}{K} \\ K^2 &= p^2 A^2 + q^2 B^2 + r^2 C^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Dafs  $K$  konstant ist, wissen wir aus dem vorigen Paragraphen; man erkennt es aber auch leicht aus dem System (1) S. 400, indem man dessen Gleichungen bezw. mit  $r$ ,  $p$  und  $q$  multipliziert, addiert und integriert.

Nach S. 392 (6) haben wir für die gleichzeitigen Stellungswinkel der Momentanaxe

$$\cos \alpha = \frac{p}{\omega} \quad \cos \beta = \frac{q}{\omega} \quad \cos \gamma = \frac{r}{\omega} \quad (3)$$

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2.$$

Mithin ist der Neigungswinkel  $\pi$  der Momentanaxe gegen die Normale der unveränderlichen Ebene zufolge der Gleichung

$$\cos \pi = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'$$

gegeben durch die Relation

$$\cos \pi = \frac{p^2 A + q^2 B + r^2 C}{K \omega} \quad (4)$$

Da  $p$  und  $q$  gegen  $r$  sehr klein sind, so bemerkt man leicht, dafs  $\cos \pi$  sehr nahe gleich 1 ist. Wir berechnen daher

$$\sin^2 \pi = \frac{K^2 \omega^2 - (p^2 A + q^2 B + r^2 C)^2}{K^2 \omega^2}$$

und finden

$$\sin^2 \pi = \frac{r^2 p^2 (C - A)^2 + r^2 q^2 (C - B)^2 + p^2 q^2 (B - A)^2}{(p^2 + q^2 + r^2) (p^2 A^2 + q^2 B^2 + r^2 C^2)}.$$

Mit Rücksicht auf den geringen Betrag von  $p$  und  $q$  gegen  $r$ , sowie von  $B - A$  gegen  $C - A$  können wir in gröfser Annäherung dafür setzen

$$\sin^2 \pi = \frac{p^2 + q^2}{r^2} \left( \frac{C - A}{C} \right)^2,$$

oder unter Beachtung von (6) S. 392, wonach  $p^2 + q^2 = \omega^2 \sin^2 \gamma$  ist:

$$\sin \pi = \sin \gamma \frac{C - A}{C}.$$

Nach S. 393 und 399 ist also zufolge der Beobachtungen angenähert

$$\pi = 0,003272 \times \frac{1}{15}'' = 0,0002''.$$

Um uns eine genaue Vorstellung von der gegenseitigen Lage der Hauptaxe  $C$ , der Momentanaxe  $M$  und der Normale  $N$  der unveränderlichen Ebene zu machen, denken wir uns um den Erdschwerpunkt eine Kugelfläche vom Radius 1 gelegt. Die Koordinaten  $x$  und  $y$  des positiven Poles  $M$  der Momentanaxe sind alsdann bezw.:

$$\xi = \cos \alpha = \frac{p}{\omega} \quad \eta = \cos \beta = \frac{q}{\omega};$$



diejenigen des positiven Poles  $N$  der Normale der unveränderlichen Ebene sind:

$$\xi' = \cos \alpha' = \frac{pA}{K} \quad \eta' = \cos \beta' = \frac{qB}{K}.$$

Hieraus folgt  $\xi = \xi' \frac{K}{A\omega} \quad \eta = \eta' \frac{K}{B\omega}.$

$\xi'$  und  $\eta'$  sind also wesentlich konstante Bruchteile von  $\xi$  und  $\eta$ . Nehmen wir insbesondere  $A = B$ , so wird genau  $\xi : \xi' = \eta : \eta'$ , d. h.  $C$ ,  $N$  und  $M$  liegen stets auf einem größten Kreis.

Die Situation der drei Pole ist nun, wenn wir sie im Norden annehmen, die der Figur 67, nur ist  $M$  daselbst irrtümlich linker Hand von  $N$  anstatt rechter Hand von  $N$  eingetragen.  $N$  liegt absolut fest,  $M$  und  $C$  rotieren in gleichen Zeiten einmal entgegengesetzt der Richtung des Uhrzeigers um  $N$  herum. Dabei ist

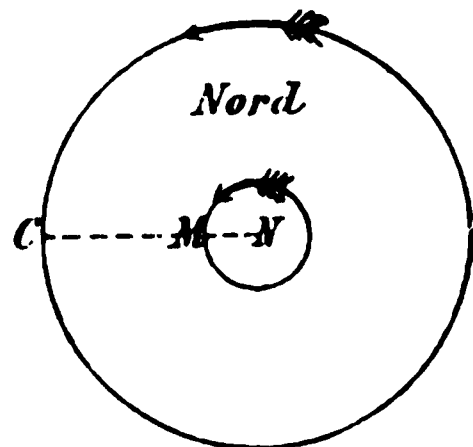


Fig. 67.

$$CN = 1/15'' \quad \text{und} \quad NM = 1/5000''.$$

Übrigens ist der letztere Betrag ganz und gar unmerklich. Abgesehen von äußeren Kräften hat daher die Rotationsaxe des festen Erdkörpers eine als unveränderlich zu betrachtende Richtung im Raume; nur im Erdkörper verschiebt sie sich um kleine, jedoch auch nicht sehr merkliche Beträge.

§ 12. Grundgleichungen für die Drehbewegung des nicht festen Erdkörpers.\*) Zur Entwicklung dieser Gleichungen können wir von den Gleichungen (2) S. 389 ausgehen. In diesen Gleichungen ist Bezug genommen auf ein bewegliches Koordinatenaxensystem, das gegen seine augenblickliche Lage mit den Winkelgeschwindigkeiten  $p$ ,  $q$  und  $r$  bezw. um die  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Axe gedreht wird. Denken wir uns nun zunächst wie in § 4 S. 390 die Erde als festen Körper und das bewegte Axensystem fest damit verbunden, so gelten die (1) S. 390. Zu den rechten Seiten dieser Gleichungen treten aber noch Glieder, wenn wir jetzt annehmen, daß die Teile der Erde sich gegen das bewegte System verschieben. Es wird nämlich zur Zeit  $t$ :

\*) Die Entwicklungen der Paragraphen 12—16 sind erfolgt mit Benutzung der Abhandlungen:

*Gylden, Recherches sur la Rotation de la Terre*; présenté à la Société Royale des Sciences d'Upsal. 1871. [Ref. in der Vierteljahrsschrift der Astronom. Gesellschaft 1874 IX S. 199.]

*G. H. Darwin, On the Influence of Geological Changes on the Earth's Axis of Rotation* [Phil. Transact. 1877 Bd. 167 I; Auszug im American Journal of Science and Arts 1877 Bd. 13 S. 444; Ref. in der Vierteljahrsschrift der Astronom. Gesellschaft 1878 XIII 309.] Dieser Abhandlung folgt ein Anhang von *Will. Thomson*, dessen Methode in § 14 benutzt ist.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{dx_1}{dt} + qz - ry \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy_1}{dt} - pz + rx \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dz_1}{dt} + py - qx\end{aligned}\quad (1)$$

wobei wir also annehmen, daß zur Zeit  $t$  die Erde sich mit dem bewegten System gegen dessen augenblickliche Lage mit den Winkelgeschwindigkeiten  $p, q$  und  $r$  verschiebt und die Teile der Erde außer dieser Drehbewegung im Zeitintervall  $dt$  noch gegen das bewegte Koordinatenaxensystem die Verschiebungen  $dx_1, dy_1$  und  $dz_1$  erleiden. Wie man sieht, bleiben  $p, q$  und  $r$  jetzt noch ganz willkürlich, denn sie bezeichnen vorläufig nur einen nicht näher definierten Teil der Bewegung der Erdteile gegen das feste Koordinatenaxensystem, der zur Zeit  $t$  stattfindenden Lage des willkürlich nach Maßgabe von  $p, q, r$  bewegten Axensystems.

Mittelst der (1) folgt jetzt aus (4) S. 388:

$$2 f'_{xy} = 2 f_{xy} = r(x^2 + y^2) - pzx - qyz + \left(x \frac{dy_1}{dt} - y \frac{dx_1}{dt}\right).$$

Es wird daher

$$\begin{aligned}2 \sum f'_{xy} dm &= r \sum (x^2 + y^2) dm - p \sum zx dm - q \sum yz dm \\ &\quad + \sum \left(x \frac{dy_1}{dt} - y \frac{dx_1}{dt}\right) dm,\end{aligned}$$

oder

$$2 \sum f'_{xy} dm = r C_1 - p B' - q A' + H_3, \quad (2)$$

wenn gesetzt wird:

$$\begin{aligned}\sum (x^2 + y^2) dm &= C_1 \\ \sum zx dm &= B' \\ \sum yz dm &= A' \\ \sum \left(x \frac{dy_1}{dt} - y \frac{dx_1}{dt}\right) dm &= H_3.\end{aligned}\quad (3)$$

Ebenso erhalten wir

$$2 \sum f'_{yz} dm = p A_1 - q C' - r B' + H_1, \quad (4)$$

wenn ferner gesetzt wird:

$$\begin{aligned}\sum (y^2 + z^2) dm &= A_1 \\ \sum xy dm &= C' \\ \sum \left(y \frac{dz_1}{dt} - z \frac{dy_1}{dt}\right) dm &= H_1;\end{aligned}\quad (5)$$

endlich  $2 \sum f_m dm = q B_1 - r A' - p C' + H_2,$  (6)

wenn noch gesetzt wird:

$$\sum (z^2 + x^2) dm = B_1$$

$$\sum \left( z \frac{dx_1}{dt} - x \frac{dz_1}{dt} \right) dm = H_2. \quad (7)$$

Hiermit nehmen die Gleichungen (2) S. 389 folgende Form an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(r C_1 - p B' - q A' + H_2)}{dt} + p q (B_1 - A_1) + (q^2 - p^2) C' \\ - p r A' + q r B' - q H_1 + p H_2 \end{aligned} \right\} = N$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(p A_1 - q C' - r B' + H_1)}{dt} + q r (C_1 - B_1) + (r^2 - q^2) A' \\ - q p B' + r p C' - r H_2 + q H_3 \end{aligned} \right\} = L \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(q B_1 - r A' - p C' + H_2)}{dt} + r p (A_1 - C_1) + (p^2 - r^2) B' \\ - r q C' + p q A' - p H_3 + r H_1 \end{aligned} \right\} = M.$$

Bei der Anwendung dieser Gleichungen ist man verschieden vorgegangen. Man hat das bewegte Koordinatenaxensystem so angenommen (*Gylden*), daß es eine mittlere Bewegung aller Körperteile hat, indem man die  $H$  null setzte; man hat es auch so angenommen (*G. H. Darwin*), daß es mit den veränderlichen Hauptaxen zusammenfällt. Beide Methoden geben eine Vereinfachung der (8) und führen zum Ziele, solange nur die Bewegung der Erdteile nicht von der Rotation selbst abhängig vorausgesetzt wird. Auf letzteren Fall gehen wir hier nicht ein.\*)

§ 13. Fortsetzung: Modifikation der Gleichungen. Wir nehmen die veränderlichen Hauptaxen  $ABC$  als bewegtes Koordinatenaxensystem; außerdem aber zur Zeit  $t$  dieselben Axen als festes System  $xyz$ , sodaß in den Gleichungen (2) S. 389, von denen wir wieder ausgehen,  $p, q, r$  die Winkelgeschwindigkeiten bezeichnen,

\*) Nach *Gylden*, *Astronom. Nachrichten* 1878 Bd. 93 Nr. 2226 S. 278, sind die Gleichungen (8) von *Liouville* in seinem Journal, sér. II t. III, aufgestellt; indessen war uns diese Zeitschrift nicht zur Hand. *Gylden* knüpft an diese Gleichungen eine interessante Untersuchung über die Bewegung der Momentanaxe in dem Erdkörper, wobei derselbe als aus einem festen Teile, dem Kern, und einem beweglichen, der Masse des Weltmeeres, zusammengesetzt gedacht und Rücksicht darauf genommen wird, daß die Oberfläche des Weltmeeres durch die Rotation beeinflusst ist. Für diese Untersuchung ist es deshalb nötig, das Koordinatenaxensystem mit dem Erdkern fest zu verbinden, denn jedes der beiden oben erwähnten Systeme ist in diesem Falle in Bezug auf seine Lage zum Erdkern unbekannt und erst aus der Bewegung herzuleiten. Die Untersuchung hat aber nur ein Interesse für die Entwicklungsgeschichte des Erdkörpers; gegenwärtig ist die Stabilität der Momentanaxe im Erdkörper wegen des erfahrungsmäßig starken Überwiegens des Trägheitsmomentes  $C$  über  $A$  und  $B$  eine so große, daß die Verschiebung des Meeres nicht in betracht kommt.

mit welchen zur Zeit  $t$  das System der Hauptaxen sich um sich selbst verdreht. Die Bewegung der Erde aber beziehen wir nunmehr nicht wie im vorigen Paragraphen auf dasselbe bewegte Axensystem, sondern auf ein anderes. Wir nehmen nämlich an, daß in dem Zeitintervall  $t$  bis  $t + dt$  die Erde sich im allgemeinen mit den Winkelgeschwindigkeiten  $p - \alpha$ ,  $q - \beta$ ,  $r - \gamma$  gegen die festen Axen drehe und ein einzelner Punkt  $(xyz)$  gegen drei rechtwinkelige Axen, die zur Zeit  $t$  mit den festen Axen zusammenfallen, aber im Intervall  $dt$  die allgemeine Drehung mitmachen, außerdem um  $dx_2$ ,  $dy_2$  und  $dz_2$  sich verschiebe. Dann wird nach Analogie von (1) des vorigen Paragraphen:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{dx_2}{dt} + (q - \beta)z - (r - \gamma)y \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy_2}{dt} - (p - \alpha)z + (r - \gamma)x \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dz_2}{dt} + (p - \alpha)y - (q - \beta)x\end{aligned}\quad (1)$$

und hieraus ähnlich wie im Beginn des vorigen Paragraphen:

$$\begin{aligned}2 \sum f_{xy} dm &= (r - \gamma) \sum (x^2 + y^2) dm \\ &\quad - (p - \alpha) \sum zx dm - (q - \beta) \sum yz dm \\ &\quad + \sum \left( x \frac{dy_2}{dt} - y \frac{dx_2}{dt} \right) dm.\end{aligned}$$

Da wir nun zur Zeit  $t$  als festes Koordinatenaxensystem der  $x$ ,  $y$  und  $z$  die Hauptaxen nehmen, verschwinden die Summen

$$\sum zx dm \quad \sum yz dm \quad \sum xy dm; \quad (2)$$

außerdem können wir ohne Zweifel die drei Größen  $(p - \alpha)$ ,  $(q - \beta)$ ,  $(r - \gamma)$  so gewählt denken, daß sie die mittlere Drehbewegung des veränderlichen Erdkörpers vorstellen und somit auch die Summen

$$\begin{aligned}\sum \left( x \frac{dy_2}{dt} - y \frac{dx_2}{dt} \right) dm \\ \sum \left( y \frac{dz_2}{dt} - z \frac{dy_2}{dt} \right) dm \\ \sum \left( z \frac{dx_2}{dt} - x \frac{dz_2}{dt} \right) dm\end{aligned}\quad (3)$$

verschwinden.\*) Bezeichnen wir alsdann die veränderlichen Hauptträgheitsmomente

\*) Daß diese Bestimmung möglich ist, geht aus den weiterhin folgenden (5) hervor. Denkt man sich die Bewegung der Erdteile gegen die festen Axen bekannt, so sind darin nur die drei Größen  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  unbekannt und diese lassen sich jedenfalls bestimmen.

$$\begin{aligned}
& \sum (x^2 + y^2) dm \text{ mit } \mathfrak{C} \\
& \sum (y^2 + z^2) dm \text{ mit } \mathfrak{A} \\
& \sum (z^2 + x^2) dm \text{ mit } \mathfrak{B},
\end{aligned} \tag{4}$$

so wird mit Rücksicht aufs Vorige und nach Analogie

$$\begin{aligned}
2 \sum f'_{xy} dm &= (r - \gamma) \mathfrak{C} = \omega_3 \mathfrak{C} \\
2 \sum f'_{yz} dm &= (p - \alpha) \mathfrak{A} = \omega_1 \mathfrak{A} \\
2 \sum f'_{zx} dm &= (q - \beta) \mathfrak{B} = \omega_2 \mathfrak{B},
\end{aligned} \tag{5}$$

wenn zur Abkürzung  $r - \gamma$ ,  $p - \alpha$ ,  $q - \beta$  mit  $\omega_3$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  bezeichnet werden.

Die Gleichungen (2) S. 389 geben nunmehr folgendes System:

$$\begin{aligned}
\frac{d(\omega_3 \mathfrak{C})}{dt} - (\omega_2 + \beta) \omega_1 \mathfrak{A} + (\omega_1 + \alpha) \omega_2 \mathfrak{B} &= N \\
\frac{d(\omega_1 \mathfrak{A})}{dt} - (\omega_3 + \gamma) \omega_2 \mathfrak{B} + (\omega_2 + \beta) \omega_3 \mathfrak{C} &= L \\
\frac{d(\omega_2 \mathfrak{B})}{dt} - (\omega_1 + \alpha) \omega_3 \mathfrak{C} + (\omega_3 + \gamma) \omega_1 \mathfrak{A} &= M.
\end{aligned} \tag{6}$$

Hierin sind also  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  die veränderlichen Hauptträgheitsmomente,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  die mittleren Drehgeschwindigkeiten der Erde um die für den Augenblick festgehaltenen Hauptachsen  $ABC$  und  $(\omega_1 + \alpha)$ ,  $(\omega_2 + \beta)$ ,  $(\omega_3 + \gamma)$  die Drehgeschwindigkeiten der veränderlichen Hauptachsen selbst gegen ihre augenblickliche Lage.

Die Hauptträgheitsmomente  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  und die Größen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , welche das Voraneilen der Hauptachsen gegen den Erdkörper markieren, müssen als Funktionen der Zeit gegeben sein, wenn die  $\omega$  aus den (6) ermittelt werden sollen.

Als Momentanaxe wird man bei einem veränderlichen Erdkörper eine Axe bezeichnen, deren Stellungswinkel  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{b}$  und  $\mathfrak{c}$  sich nach den Formeln

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \omega \cos \mathfrak{a} & \omega_2 &= \omega \cos \mathfrak{b} & \omega_3 &= \omega \cos \mathfrak{c} \\
\omega^2 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2
\end{aligned} \tag{7}$$

aus den Werten  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  berechnen, die mithin als Komponenten der augenblicklichen mittleren Drehgeschwindigkeit  $\omega$  der Erde um die Momentanaxe aufgefaßt werden.

Hierbei ist zu bemerken, daß  $\omega$  nicht notwendig mit der astronomisch beobachtbaren Rotationsdauer der Erde zusammenfällt, indem die einzelnen Teile der Erde sich eben nach der Voraussetzung etwas verschieden bewegen. Die Frage nach dem Grad der Verschieden-

heit hat übrigens nur bei Massenverschiebungen von der Art der Flut und Ebbe (auf der Oberfläche oder im Innern) eine praktische Bedeutung.

§ 14. Bewegung des veränderlichen Erdkörpers, abgesehen von äusseren Kräften. In diesem Falle geben die (6) des vorigen Paragraphen:

$$\begin{aligned} \frac{d(\omega_3 \mathfrak{C})}{dt} - (\omega_2 + \beta) \omega_1 \mathfrak{A} + (\omega_1 + \alpha) \omega_2 \mathfrak{B} &= 0 \\ \frac{d(\omega_1 \mathfrak{A})}{dt} - (\omega_3 + \gamma) \omega_2 \mathfrak{B} + (\omega_2 + \beta) \omega_3 \mathfrak{C} &= 0 \\ \frac{d(\omega_2 \mathfrak{B})}{dt} - (\omega_1 + \alpha) \omega_3 \mathfrak{C} + (\omega_3 + \gamma) \omega_1 \mathfrak{A} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Als Unbekannte nehmen wir  $\omega_1 \mathfrak{A}$ ,  $\omega_2 \mathfrak{B}$ ,  $\omega_3 \mathfrak{C}$ , weil dieses einfacher ist und weil ausserdem diese Größen auch eine besondere Bedeutung haben. Da wir von äusseren Kräften absehen, gilt nämlich jetzt der Satz von der unveränderlichen Ebene, § 10 S. 405. Zuzufolge der (5) des vorigen Paragraphen haben aber zur Zeit  $t$  die Größen  $P, Q, R$  des § 10 die Werte  $\omega_1 \mathfrak{A}$ ,  $\omega_2 \mathfrak{B}$ ,  $\omega_3 \mathfrak{C}$ , und es sind daher die Stellungswinkel der Normale der unveränderlichen Ebene gegen die Hauptachsen gegeben durch die Relationen:

$$\begin{aligned} \omega_1 \mathfrak{A} &= K \cos \alpha' & \omega_2 \mathfrak{B} &= K \cos \beta' & \omega_3 \mathfrak{C} &= K \cos \gamma' \\ \text{für} & & & & & \\ K^2 &= \omega_1^2 \mathfrak{A}^2 + \omega_2^2 \mathfrak{B}^2 + \omega_3^2 \mathfrak{C}^2. \end{aligned} \quad (2)$$

$K$  ist nach § 10 eine Konstante; man erkennt dies auch aus den (1), wenn man sie bezw. mit  $\omega_3 \mathfrak{C}$ ,  $\omega_1 \mathfrak{A}$ ,  $\omega_2 \mathfrak{B}$  multipliziert, addiert und integriert.

Legen wir um den Erdschwerpunkt eine Kugel vom Radius 1, so sind die Koordinaten des positiven Poles der Normale der unveränderlichen Ebene auf der Kugelfläche in Bezug auf die drei Hauptachsen  $A, B, C$  bezw.

$$\begin{aligned} \xi' &= \cos \alpha' = \frac{\omega_1 \mathfrak{A}}{K} \\ \eta' &= \cos \beta' = \frac{\omega_2 \mathfrak{B}}{K} \\ \zeta' &= \cos \gamma' = \frac{\omega_3 \mathfrak{C}}{K}. \end{aligned} \quad (3)$$

Dagegen sind die Koordinaten des positiven Poles der Momentanaxe mit Rücksicht auf (7) des vorigen Paragraphen:

$$\begin{aligned} \xi &= \cos \alpha = \frac{\omega_1}{\omega} = \xi' \frac{K}{\mathfrak{A} \omega} \\ \eta &= \cos \beta = \frac{\omega_2}{\omega} = \eta' \frac{K}{\mathfrak{B} \omega} \\ \zeta &= \cos \gamma = \frac{\omega_3}{\omega} = \zeta' \frac{K}{\mathfrak{C} \omega} \end{aligned} \quad (4)$$

Die Relationen (4) gestatten  $\xi$   $\eta$   $\zeta$  zu berechnen, wenn erst  $\xi'$   $\eta'$   $\zeta'$  ermittelt sind, was im Anschluß an die (1) zu geschehen hat. Wenn wir annehmen, daß wie gegenwärtig die Hauptträgheitsmomente  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  näherungsweise einander gleich bleiben, dann ist angenähert

$$K = \mathfrak{A} \omega = \mathfrak{B} \omega = \mathfrak{C} \omega,$$

d. h.  $\xi$  und  $\xi'$ ,  $\eta$  und  $\eta'$ ,  $\zeta$  und  $\zeta'$  unterscheiden sich nur um kleine Bruchteile ihres Wertes. Abgesehen von äußeren Kräften bleibt daher die *Momentanaxe* der Normale der unveränderlichen Ebene sehr nahe und hat somit im Raume angenähert eine konstante Richtung. *Die Abweichungen der Momentanaxe von der konstanten Richtung sind jedenfalls viel kleiner als die Verschiebungen des Erdkörpers gegen die Momentanaxe.*

Wir führen nun, wie beabsichtigt, in die (1) die Ausdrücke (3) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi'}{dt} + \xi' \eta' \left( \frac{K}{\mathfrak{A}} - \frac{K}{\mathfrak{B}} \right) - \beta \xi' + \alpha \eta' &= 0 \\ \frac{d\xi'}{dt} + \eta' \zeta' \left( \frac{K}{\mathfrak{B}} - \frac{K}{\mathfrak{C}} \right) - \gamma \eta' + \beta \zeta' &= 0 \\ \frac{d\eta'}{dt} + \zeta' \xi' \left( \frac{K}{\mathfrak{C}} - \frac{K}{\mathfrak{A}} \right) - \alpha \zeta' + \gamma \xi' &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Die bedeutenderen Massenverschiebungen, welche gegenwärtig erfahrungsmäßig stattfinden, erfolgen durch meteorologische Prozesse, durch Erdbeben und vulkanische Ausbrüche, durch langsame (säkulare) Hebungen und Senkungen der Erdkruste und endlich durch die Ebbe und Flut. Die Massen, welche hierbei in betracht kommen, sind jedenfalls wesentlich kleiner als diejenigen, durch deren Anhäufung in der Gegend des Äquators  $\mathfrak{C}$  über  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  dominiert. Es wird daher das gegenwärtige Verhältnis von  $\mathfrak{C}$  zu  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  nicht wesentlich gestört werden, ebenso wird die *C-Axe* und demgemäß voraussichtlich auch die *Momentanaxe* nur geringe Verschiebungen im Erdkörper erleiden. Dies letztere (nach der Anmerkung zu § 12 S. 410 eine notwendige Voraussetzung der Brauchbarkeit der Entwicklungen) kommt auf die Voraussetzung der Kleinheit von  $\xi'$  und  $\eta'$  hinaus, infolge welcher  $\zeta'$  von der Einheit nur sehr wenig abweicht. Mit Rücksicht auf diese Bemerkungen vereinfachen wir unter Annahme von  $\gamma = \text{null}$  das System in folgendes:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi'}{dt} + \eta' \left( \frac{K}{\mathfrak{A}} - \frac{K}{\mathfrak{C}} \right) + \beta &= 0 \\ \frac{d\eta'}{dt} - \xi' \left( \frac{K}{\mathfrak{A}} - \frac{K}{\mathfrak{C}} \right) - \alpha &= 0 \\ \frac{d\xi'}{dt} - \beta \xi' + \alpha \eta' &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

in welchem  $C$  und  $A$  Mittelwerte für  $\mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{A}$  nebst  $\mathfrak{B}$  bezeichnen.

Die Annahme  $\gamma = \text{null}$  reicht für unsere Zwecke aus, abgesehen von flutartigen Bewegungen der Massen. Denn das Wesentliche der anderen Fälle wird auch erkannt, wenn wir dabei die Axen  $A$  und  $B$  so zu den bewegten Massen gelegt denken, daß sie keine Verschiebung erleiden, welche aus einer Drehung um die  $C$ -Axe hervorgeht.

Bei flutartigen Massenbewegungen ist im System (6) zu setzen

$$\frac{K}{A} - \frac{K}{C} = \gamma \quad \text{anstatt} \quad \frac{K}{A} - \frac{K}{C}.$$

### § 15. Fortsetzung: Integration und spezielle Fälle.

Die erste und zweite der Gleichungen (6) des vorigen Paragraphen haben dieselbe Form wie die (4) S. 392, falls wir  $\alpha = \beta = \text{null}$  setzen; in diesem Falle würden wir demnach erhalten:

$$\xi' = a \cos(\lambda t + \mu) \quad \eta' = a \sin(\lambda t + \mu),$$

wenn der Faktor von  $\eta'$  in der ersten Gleichung (6) mit  $\lambda$  bezeichnet wird und  $a$  und  $\mu$  Konstanten bezeichnen. Lösen wir die trigonometrischen Funktionen in den Ausdrücken für  $\xi'$  und  $\eta'$  auf, so folgt:

$$\begin{aligned} \xi' &= f \cos \lambda t - g \sin \lambda t \\ \eta' &= f \sin \lambda t + g \cos \lambda t, \end{aligned} \tag{1}$$

worin  $f$  und  $g$  ebenfalls Konstanten sind, die aber von  $a$  und  $\mu$  abhängen.

Wir versuchen nun eine Lösung unserer beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\xi'}{dt} + \lambda \eta' + \beta &= 0 \\ \frac{d\eta'}{dt} - \lambda \xi' - \alpha &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

worin

$$\lambda = \frac{C - A}{A} \frac{K}{C} \tag{2*}$$

ist, dadurch zu erzielen, daß wir  $f$  und  $g$  als Funktionen der Zeit  $t$  betrachten, die noch zu bestimmen sind.

Aus (1) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi'}{dt} &= -\lambda f \sin \lambda t - \lambda g \cos \lambda t + \frac{df}{dt} \cos \lambda t - \frac{dg}{dt} \sin \lambda t \\ \frac{d\eta'}{dt} &= \lambda f \cos \lambda t - \lambda g \sin \lambda t + \frac{df}{dt} \sin \lambda t + \frac{dg}{dt} \cos \lambda t. \end{aligned}$$

Setzt man diese Differentialquotienten und die (1) in die (2) ein, so wird erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} \cos \lambda t - \frac{dg}{dt} \sin \lambda t &= -\beta \\ \frac{df}{dt} \sin \lambda t + \frac{dg}{dt} \cos \lambda t &= +\alpha, \end{aligned}$$



woraus durch Auflösung nach den Differentialquotienten hervorgeht:

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= -\beta \cos \lambda t + \alpha \sin \lambda t \\ \frac{dg}{dt} &= +\beta \sin \lambda t + \alpha \cos \lambda t,\end{aligned}$$

welche Gleichungen ergeben

$$\begin{aligned}f &= \int (-\beta \cos \lambda t + \alpha \sin \lambda t) dt \\ g &= \int (+\beta \sin \lambda t + \alpha \cos \lambda t) dt.\end{aligned}\tag{3}$$

Diese Gleichungen enthalten mit den (1) die Lösung der Aufgabe,  $\xi'$  und  $\eta'$  zu finden. Man kann zum besseren Verständnis der (3) bemerken, daß  $\lambda$  ungefähr  $\frac{1}{300}$  der Drehungsgeschwindigkeit der Erde um ihre Axe ist und wesentlich dieselbe Bedeutung hat wie die Drehungsgeschwindigkeit  $\lambda$  der Momentanaxe um die Hauptaxe  $C$  im festen Erdkörper, vergl. § 5 S. 394.

Schließlich giebt die 3. Gleichung (6) des vorigen Paragraphen  $\zeta'$ ; doch ist es einfacher, von der Relation  $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1$  auszugehen, womit sich für den vorliegenden Fall ausreichend genau findet:

$$\zeta' = 1 - \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{2}.\tag{4}$$

Wenn wir eine *stofsweise Massenverschiebung* (Erdbeben) annehmen, so ist das Zeitintervall, innerhalb dessen  $\alpha$  und  $\beta$  von null verschieden sind, so klein, daß in den Ausdrücken für  $f$  und  $g$   $\cos \lambda t = 1$ ,  $\sin \lambda t = 0$  gesetzt werden kann. Damit folgt:

$$f = f_0 - \int \beta dt \quad g = g_0 + \int \alpha dt,$$

wobei  $f_0$  und  $g_0$  die konstanten Werte von  $f$  und  $g$  vor dem Stosse sind und die Integration sich über das Zeitintervall des Stosses erstreckt. Es ist somit:

$$\begin{aligned}\xi' &= \left(f_0 - \int \beta dt\right) \cos \lambda t - \left(g_0 + \int \alpha dt\right) \sin \lambda t \\ \eta' &= \left(f_0 - \int \beta dt\right) \sin \lambda t + \left(g_0 + \int \alpha dt\right) \cos \lambda t.\end{aligned}\tag{5}$$

Rechnen wir  $t$  vom Moment des Stosses ab, so ist gleich nachher

$$\begin{aligned}\xi' &= f_0 - \int \beta dt \\ \eta' &= g_0 + \int \alpha dt,\end{aligned}\tag{5*}$$

also die Änderung in  $\xi'$  und  $\eta'$  bzw. gleich

$$-\int \beta dt \text{ und } +\int \alpha dt. \quad (6)$$

Vor und nach dem Stosse beschreiben auf der um den Erdschwerpunkt gelegten Kugel vom Radius 1 die Normale der unveränderlichen Ebene und die Momentanaxe Kreise um die Hauptaxe  $C$ . Der Radius, der für beide nahezu denselben Betrag hat, ist vorher gleich  $\sqrt{f_0^2 + g_0^2}$ , nachher gleich  $\sqrt{f^2 + g^2}$ , die Rotationsdauer 304 Tage.

Es ist noch zu beachten, daß während des Stosses der positive Pol der Hauptaxe  $C$  sich auf der Einheitskugel in Richtung der  $A$ -Axe um  $\int \beta dt$ , in Richtung der  $B$ -Axe um  $-\int \alpha dt$  verschiebt, da die Hauptaxen sich gegen die mittlere Drehbewegung der Erde mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\alpha, \beta, \gamma$  verschieben. Dieses sind gerade die entgegengesetzten Werte wie die, um welche sich die Koordinaten  $\xi'$  und  $\eta'$  nach (6) infolge des Stosses ändern, und man erkennt, daß die Normale der u. E. gegen die Anfangslage der  $C$ -Axe nach dem Stosse dieselbe Lage hat wie vor dem Stosse.

Die stoßweise Massenverschiebung äußert sich hiernach wesentlich nur darin, daß im Augenblick ihres Eintritts die Axe des größten Trägheitsmoments  $\mathbb{C}$  ihre Richtung ändert, wodurch der halbe Öffnungswinkel des Kegels, welchen die Axe der u. E. und die Momentanaxe in 304 Tagen um die  $C$ -Axe beschreiben, von  $\sqrt{f_0^2 + g_0^2}$  in  $\sqrt{f^2 + g^2}$  übergeht.

In den geographischen Koordinaten entstehen hierdurch Änderungen in der Amplitude der 304-tägigen Periode, sowie in den Mittelwerten (vergl. S. 395).

Wenn wir eine *säkulare Massenverschiebung* annehmen, so werden wir ein Bild der Veränderungen erhalten, indem wir  $\alpha$  und  $\beta$  konstant setzen. Die (3) geben zur Zeit  $t$ , wenn  $t$  vom Beginne der Verschiebung an gerechnet wird:

$$\begin{aligned} f &= f_0 - \frac{\beta}{\lambda} \sin \lambda t + \frac{\alpha}{\lambda} (1 - \cos \lambda t) \\ g &= g_0 + \frac{\beta}{\lambda} (1 - \cos \lambda t) + \frac{\alpha}{\lambda} \sin \lambda t, \end{aligned}$$

und hiermit wird zufolge (1):

$$\begin{aligned} \xi' &= -\frac{\alpha}{\lambda} + \left(f_0 + \frac{\alpha}{\lambda}\right) \cos \lambda t - \left(g_0 + \frac{\beta}{\lambda}\right) \sin \lambda t \\ \eta' &= -\frac{\beta}{\lambda} + \left(f_0 + \frac{\alpha}{\lambda}\right) \sin \lambda t + \left(g_0 + \frac{\beta}{\lambda}\right) \cos \lambda t. \end{aligned} \quad (7)$$

Beachtet man nun, daß  $\lambda$  die Bedeutung einer Winkelgeschwindigkeit hat, welche in 304 Tagen eine volle Umdrehung ergibt, so er-

kennt man leicht, daß in vorstehenden Ausdrücken die durch  $\lambda$  dividierten Glieder unerheblich sind. Denn selbst wenn, in Sekunden genommen,  $\alpha$  oder  $\beta$  in hundert Jahren  $10''$  betrügen, was erfahrungsmäßig gegenwärtig nicht zu erwarten ist, so würden in 304 Tagen  $\alpha$  oder  $\beta$  nur  $0,083''$  geben, sodaß mithin  $\alpha:\lambda$  oder  $\beta:\lambda$  den Betrag  $0,00000007$  oder  $0,013$  in Sek. erhalten würden, welcher so gut wie gänzlich verschwindet. Wir dürfen mithin setzen:

$$\begin{aligned}\xi' &= f_0 \cos \lambda t - g_0 \sin \lambda t \\ \eta' &= f_0 \sin \lambda t + g_0 \cos \lambda t.\end{aligned}\tag{7*}$$

Demnach behält die Normale der u. E. und somit auch die Momentanaxe zum veränderlichen Hauptaxensystem bei säkularen Änderungen des letzteren immer dieselbe relative Lage wie zu Anfang. Die Momentanaxe folgt also den Verschiebungen der Hauptaxe  $C$  in der Erde, wobei sie in 304 Tagen um dieselbe einen Umlauf von demselben Öffnungswinkel wie zu Anfang beschreibt.

Den säkularen Verschiebungen der Momentanaxe in der Erde entsprechen säkulare Änderungen der geographischen Koordinaten und Azimute von im allgemeinen gleicher Ordnung.

Der Unterschied der Wirkung stoßweiser und säkularer Massenbewegungen ist nach dem Vorigen der, daß erstere den Öffnungswinkel des Kegels ändern, welchen die Momentanaxe in 304 Tagen in der Erde um die Hauptaxe  $C$  beschreibt, letztere aber nicht. In beiden Fällen aber entsprechen die nichtperiodischen Teile der geographischen Koordinaten und Azimute der Lage der Hauptaxe  $C$  im Erdkörper.

Die entwickelten Fälle mögen hier genügen; allerdings kommen bei meteorologischen Prozessen noch periodische Verschiebungen der Hauptaxe  $C$  vor, insbesondere mit Perioden von 1 Jahr und 11 Jahren, deren Betrachtung recht interessant ist (namentlich weil Multiplikationen der Wirkungen eintreten können); aber das wesentliche Resultat läßt sich auch an der Hand der bereits entwickelten Formeln nachweisen. Es ist das Folgende: alle Verschiebungen der Hauptaxe  $C$ , welche nicht säkularen Charakter haben, wirken auf eine Veränderung des Abstandes von Momentanaxe und Hauptaxe, also auf eine Veränderung des Radius, mit welchem erstere um letztere in 304 Tagen rotiert. Für Wirkungen, welche nur kurze Zeit, bis zu etwa einer Woche im Maximum, andauern, zeigt dies das Formelpaar (5); für etwas längere Wirkungen das System (7). In letzterer Beziehung kann man sich recht wohl denken, daß bei meteorologischen Prozessen  $\alpha:\lambda$  und  $\beta:\lambda$  in den (7) nicht immer verschwindend sind, wie bei säkularen Wirkungen, mögen diese von meteorologischen Prozessen restieren oder anderer Natur sein. (Durch Auflösung in successive stoßweise Verschiebungen kann man übrigens mittelst der (6) graphisch jede Wirkung verfolgen.)

Betrachten wir zum Schlusse  $\zeta'$ , so finden wir mit Rücksicht auf (4) S. 416, daß es von eins sehr wenig abweicht, solange der Neigungswinkel der Hauptaxe  $C$  gegen die Normale der unveränderlichen Ebene nur einige Sekunden beträgt.

Nun ist nach S. 413 (3)  $\zeta = \frac{\omega_3 \mathfrak{C}}{K}$ , folglich wird unter Voraussetzung konstanten Wertes von  $\zeta$ :

$$\omega_3 \mathfrak{C} = \text{Konst.} \quad (8)$$

Genauer ist unter Einführung des Wertes von  $\zeta'$  aus (4) S. 416

$$\omega_3 \mathfrak{C} = K \left( 1 - \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{2} \right). \quad (8^*)$$

Die Gleichung (8\*) gestattet einen Schluß auf die Änderungen in der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  der Rotation um die Momentanaxe. Es war

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2,$$

also ist in hinreichender Annäherung

$$\omega = \omega_3 + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_3}, \quad (9)$$

wobei  $\omega_1$  und  $\omega_2$  durch die Relationen  $\frac{\omega_1 \mathfrak{A}}{K} = \xi'$  und  $\frac{\omega_2 \mathfrak{B}}{K} = \eta'$  bestimmt sind. Für  $K$  kann man hierin  $\omega_3 \mathfrak{C}$  setzen. Machen wir außerdem keinen Unterschied zwischen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ , so giebt (9) die Näherungsgleichung:

$$\omega = \omega_3 \left( 1 + \frac{\xi'^2 + \eta'^2}{2} \frac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{A}^2} \right). \quad (10)$$

Aus (8\*) und (10) folgt endlich

$$\omega \mathfrak{C} = K \left\{ 1 + \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}} (\xi'^2 + \eta'^2) \right\}.$$

Für  $\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}$  gleich  $\text{arc } 10''$  wird die Parenthese mit Rücksicht auf (11) S. 393 gleich  $1 + \frac{1}{120\,000\,000\,000}$ . Die Annahme  $\omega \mathfrak{C} = K$  enthält daher einen Fehler, der auf  $\omega$  reduziert in einem Jahre oder in rund 32 000 000 Sek. erst 0,0003 Zeitsek. beträgt.

Setzen wir hiernach

$$\omega \mathfrak{C} = \text{Konst.}, \quad (11)$$

so hängt nun die Änderung in  $\omega$  nur von derjenigen in  $\mathfrak{C}$  ab und zwar ist für eine Variation in  $\mathfrak{C}$  die entsprechende in  $\omega$ :

$$\frac{\delta \omega}{\omega} = - \frac{\delta \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}. \quad (12)$$

## § 16. Schätzung der Veränderung der Hauptträgheitsmomente.

Wir denken uns, daß das System der Hauptaxen nach Maßgabe der Winkelgeschwindigkeiten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  sich im Erdkörper gegen

sich selbst um ein Geringes verschiebt, wobei wir zur Vereinfachung das betreffende Zeitintervall als Zeiteinheit nehmen. Hat ein Punkt gegen die 1. Lage des Systems die Koordinaten  $x, y$  und  $z$ , gegen die 2. Lage die Koordinaten  $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$ , so ist:

$$\begin{aligned}\delta x &= \quad \quad - \beta z + \gamma y \\ \delta y &= + \alpha z \quad \quad - \gamma x \\ \delta z &= - \alpha y + \beta x \quad \quad .\end{aligned}\tag{1}$$

Bezeichnet man nun die Cosinus der Richtungswinkel einer vom Schwerpunkt nach dem Punkt  $(xyz)$  gezogenen Linie für die 1. Lage der Axen mit  $l, m$  und  $n$ , so ist für die 2. Lage die Variation in  $l, m$  und  $n$  bezw.:

$$\begin{aligned}\delta l &= \quad \quad - \beta n + \gamma m \\ \delta m &= + \alpha n \quad \quad - \gamma l \\ \delta n &= - \alpha m + \beta l \quad \quad .\end{aligned}\tag{2}$$

wie man aus (1) findet, indem man beachtet, daß z. B.  $l = x : r$ , mit  $r$  als Radiusvektor, ist.

Am Schlusse der Zeiteinheit ist das System in seiner 1. Lage nicht mehr System der Hauptaxen; das Trägheitsmoment in Bezug auf die Linie  $(l, m, n)$  hat daher alsdann für diese Lage des Systems die Form

$$A_1 l^2 + B_1 m^2 + C_1 n^2 - 2A' mn - 2B' ln - 2C' lm. \tag{3}$$

Dagegen ist dasselbe Trägheitsmoment für die 2. Lage des Systems der Hauptaxen von der Form

$$\mathfrak{A}(l + \delta l)^2 + \mathfrak{B}(m + \delta m)^2 + \mathfrak{C}(n + \delta n)^2,$$

d. i. für sehr kleine Variationen angenähert gleich

$$\mathfrak{A}l^2 + \mathfrak{B}m^2 + \mathfrak{C}n^2 + 2\mathfrak{A}l\delta l + 2\mathfrak{B}m\delta m + 2\mathfrak{C}n\delta n,$$

oder mit Benutzung der (2):

$$\mathfrak{A}l^2 + \mathfrak{B}m^2 + \mathfrak{C}n^2 + 2mn\alpha(\mathfrak{B} - \mathfrak{C}) + 2ln\beta(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) + 2lm\gamma(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}). \tag{4}$$

Da (3) und (4) bei beliebigen Werten von  $l, m$  und  $n$  übereinstimmen müssen, so zeigt sich, daß

$$A_1 = \mathfrak{A}, \quad B_1 = \mathfrak{B}, \quad C_1 = \mathfrak{C} \tag{5}$$

$$\alpha = \frac{A'}{C_1 - B_1}, \quad \beta = \frac{B'}{A_1 - C_1}, \quad \gamma = \frac{C'}{B_1 - A_1} \tag{6}$$

wird. Diese Formeln gestatten nicht nur eine Schätzung der  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$ , sondern auch der Änderungen der Hauptträgheitsmomente. Da nämlich am Ende der Zeiteinheit die Hauptträgheitsmomente  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  bezw. gleich  $A_1, B_1$  und  $C_1$ , den Trägheitsmomenten für die 1. Lage der Hauptaxen, sind, so sind die Variationen  $\delta\mathfrak{A}, \delta\mathfrak{B}$  und  $\delta\mathfrak{C}$  der Hauptträgheitsmomente gleich den Variationen der Träg-

heitsmomente für ein Axensystem, welches die 1. Lage der Hauptachsen hat. Zugleich erkennt man aus den Relationen

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum (y^2 + z^2) dm & A' &= \sum yz dm \\ B_1 &= \sum (z^2 + x^2) dm & B' &= \sum zx dm \\ C_1 &= \sum (x^2 + y^2) dm & C' &= \sum xy dm, \end{aligned} \quad (7)$$

daß Variationen in den  $A_1, B_1, C_1$  und den  $A', B', C'$  im allgemeinen von gleicher Ordnung sind.

Bei der Betrachtung von Massenverschiebungen reicht es zur Gewinnung einer rohen Vorstellung für unsere Zwecke aus, anzunehmen, daß eine über die ganze Erdoberfläche gleichmäßig verteilte Masse sich in einem Punkte zusammenzieht. Denn nur in diesem oder einem ähnlichen Falle kann eine verhältnismäßig kleine Masse infolge ihrer großen Verschiebung eine erhebliche Wirkung äußern; dagegen geben kleine Verschiebungen an der Erdoberfläche nur geringfügige Wirkungen — Verschiebungen aber, bei denen auch das Erdinnere zu berücksichtigen ist, können wir wegen ihrer relativ geringen Wahrscheinlichkeit außer acht lassen, solange zur Erklärung beobachteter Erscheinungen die Vorgänge auf der Erdoberfläche und in der Erdkruste genügen.

Indem wir die Erdoberfläche als Kugelfläche vom Radius  $R$  nehmen, verlegen wir zur Erlangung einer maximalen Drehung der Hauptaxe  $C$  den Konzentrationspunkt in  $45^\circ$  nördl. Breite und zugleich der Einfachheit halber in die  $zx$ -Ebene, sodaß von den drei Größen  $\alpha\beta\gamma$  nur  $\beta$  einen Wert erhält, der von null verschieden ist. Für den Konzentrationspunkt wird:

$$y = 0 \quad z = x = \frac{R}{\sqrt{2}} \quad zx = \frac{R^2}{2}; \quad (8)$$

es ergibt sich somit nach (7) der allein in betracht kommende Wert  $B' = \frac{1}{2} R^2 m$ , wenn  $m$  die konzentrierte Masse bezeichnet. Bei genauerer Rechnung wird stets eine Verkleinerung dieses Wertes dadurch stattfinden, daß die Konzentration in einer Fläche und nicht in einem Punkte erfolgt. Dagegen hat die mit der Konzentration verbundene Schwerpunktsverschiebung keinen Einfluß. Da es sich hier nur um eine Schätzung handelt, behalten wir den angegebenen Wert für  $B'$  bei.

Im 6. Kap. wird aber gezeigt, daß die Trägheitsmomente der Erde annähernd gleich  $\frac{1}{3} R^2 M$ , für  $M$  als Erdmasse, sind. Da nun  $C - A$  ungefähr  $\frac{1}{305}$  von  $C$  oder  $A$  ist, so folgt  $C - A = \frac{1}{900} R^2 M$

rund (vergl. hierzu auch (6) S. 127). Es ergibt sich daher aus der 2. Gleichung (6):

$$\beta = - 450 \frac{m}{M}. \quad (9)$$

Denken wir uns die Masse  $m$  ursprünglich als eine die ganze Erdoberfläche  $h^m$  hoch bedeckende Masse von der Dichtigkeit 1, so ist

$$m = 4\pi R^2 h;$$

aufserdem ist

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \varpi_m.$$

Mit  $\varpi_m = 5,6$  und  $R = 6370000^m$  folgt rund

$$\beta = - 8 \cdot h^m. \quad (9^*)$$

in Sek.

Hiernach kann man die maximalen Wirkungen von verschiedenen meteorologischen Prozessen und von Verbiegungen der Erdkruste, die mit Hebungen und Senkungen verbunden sein werden, schätzen.

Nehmen wir beispielsweise an, daß sich im Winter die Kontinente der nördlichen Erdhälfte nördlich von  $45^\circ$  Breite mit Schnee und Eis bedecken und zwar äquivalent mit  $0,1^m$  Regenhöhe, so ist damit  $0,01$  bis  $0,02''$  Verschiebung der Hauptaxe  $C$  verbunden. Die betreffende Masse bedeckt nämlich in Europa-Asien etwa  $\frac{1}{20}$  der Erdoberfläche, wovon durch die Gegenwirkung Nordamerikas indessen nur etwa die Hälfte wirksam bleibt, deren Einfluß wegen der geographischen Lage überdies kein maximaler ist. Reduzieren wir  $h = 0,1^m$  von  $\frac{1}{40}$  der Erdoberfläche auf die ganze Erdoberfläche, so wird  $h = 0,0025^m$  und nach  $(9^*)$  unter Voraussetzung der Maximalwirkung  $\beta = - 0,02''$ . In ähnlicher aber entgegengesetzter Weise wirkt in heißen Sommern eine Austrocknung der Kontinente. Wir unterlassen es auf weiteres hier einzugehen und bemerken nur noch, daß es uns immerhin nicht ganz leicht scheint, mehr wie einige Hundertelsekunden irreguläre Schwankungen aus meteorologischen Prozessen zu erklären.\*) Dagegen würde z. B. eine zunehmende Vereisung des Südpols recht wohl säkulare Bewegungen von merkbarem Betrage erklären; denn mit derselben ist teils eine Verminderung der Wassermenge des Oceans und infolge dessen ein Hervortreten der Kontinente verbunden, teils eine Verschiebung der Niveauflächen, welche wieder ein Hervortreten der nördlichen Kontinente bedingt.

Was die Formänderungen der Erdkruste anlangt, so findet *G. H. Darwin*, daß bei den gegenwärtigen Festigkeitsverhältnissen der Erde eine Kontinent- oder Meeresbildung nicht über  $3^\circ$  Ver-

---

\*) *Will. Thomson* allerdings nimmt irreguläre Schwankungen der Erdaxe infolge meteorologischer Prozesse bis zu  $\frac{1}{2}''$  an. Vergl. *American Journ. of Science and Arts* 1876 Bd. 12 S. 336—354, insbesondere S. 351.



schiebung der Hauptaxe  $C$  erzeugen werde. Selbstredend gehören dazu ausgedehnte Zeiträume.\*)

Die mit den Massenverschiebungen verbundenen Änderungen der Rotationsdauer sind am größten, wenn die Massen von den Polen nach äquatorialen Gegenden versetzt werden oder umgekehrt. Es ist alsdann  $\delta \mathfrak{C} = \pm R^2 m$ . Verteilt sich die vorher an den Polen befindliche Masse gleichmäßig über die Erdoberfläche, so ist  $\delta \mathfrak{C}$  vom vorigen Werte zwei Drittel. Behalten wir diesen Wert bei und setzen  $\mathfrak{C}$  wie vorher gleich  $\frac{1}{3} R^2 M$ ,  $m$  und  $M$  aber ebenfalls wie vorher, so folgt mit Rücksicht auf (12) des vorigen Paragraphen für eine Massenversetzung vom Pole nach dem Äquator rund:

$$\frac{\delta \omega}{\omega} = - \frac{h}{R}.$$

Damit sich  $\omega$  um  $\frac{1}{32\,000\,000}$  seines Betrages ändert, sodaß also das Jahr um 1' kürzer erscheint, müßte  $h$  etwa  $\frac{1}{5}^m$  betragen, oder reduziert auf  $\frac{1}{25}$  der Erdoberfläche als beiläufigen Flächeninhalt der etwa in betracht kommenden Umgebung der Pole:  $5^m$ . Das Schmelzen einer Eisschicht von  $5^m$  in der Umgebung der Pole würde also den angegebenen Erfolg haben.

**§ 17. Verschwindender Einfluss von Flut und Ebbe auf die Lage der Rotationsaxe.** Wir betrachten hier die Flut und Ebbe unter der Voraussetzung, daß die Erde gleichmäßig mit Wasser bedeckt sei. Wir nehmen zugleich an, daß ohne die Flutberge  $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$  sei und betrachten nur die Wirkung eines der beiden Himmelskörper, Mond oder Sonne, auf einmal.

Infolge der entstehenden Flutberge verschiebt sich die  $C$ -Axe, welche erfahrungsmäßig der Momentanaxe naheliegt, etwas in einer durch deren Scheitel gehenden Ebene und rotiert dann um ihre ungestörte Lage  $C_0$  mit dem störenden Körper und den Flutbergen. Die Axe des kleineren der beiden Hauptträgheitsmomente  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  liegt nun in jener Ebene und die des größeren in einer dazu senkrechten Ebene durch die Axe  $C$ . Da wir die jedesmalige Lage der Hauptaxen als Koordinatenaxen nehmen und  $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$  setzen, so geht also die  $zx$ -Ebene durch die Scheitel der Flutberge und die  $C$ -Axe.

In Fig. 68 ist die um den Erdschwerpunkt gelegte Kugelfläche vom Radius 1 in der Gegend des Durchschnitts mit der Hauptaxe  $C$  dargestellt:  $Z$  bezeichnet die  $z$ -Axe oder augenblickliche Lage der Axe  $C$ ,  $C_0$  deren ungestörte Lage;  $ZX$  und  $ZY$  sind die Durchschnittslinien mit der  $zx$ - und  $zy$ -Ebene. Da im Erdkörper das System der Hauptaxen gegen sich selbst im allgemeinen nach Maßgabe der

\*) Vergl. die S. 408 erwähnte Abhandlung.



Winkelgeschwindigkeiten  $\alpha\beta\gamma$  bewegt gedacht wird, wobei der Drehungssinn durch die Pfeile der Fig. 68 angedeutet ist, so sieht

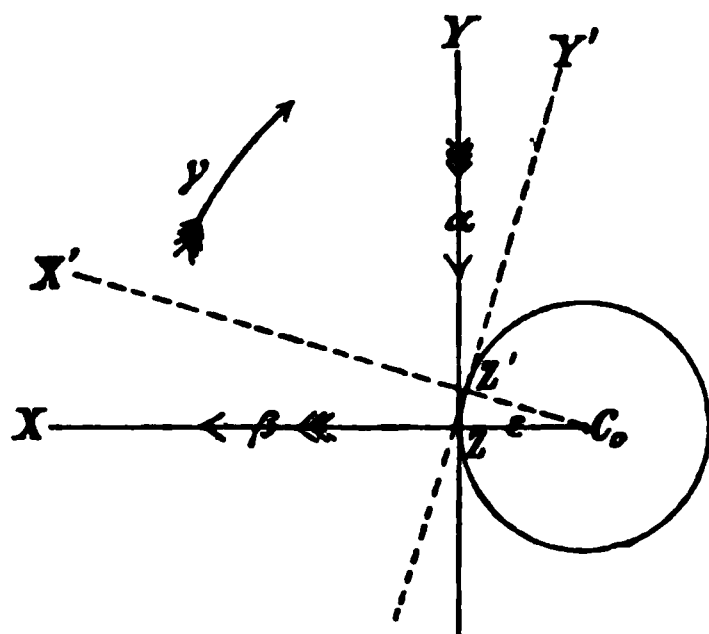


Fig. 68.

man sofort, daß beim Übergang des Systems in die Lage  $X'Y'Z'$  nur Rotationen um die  $z$ -Axe und  $x$ -Axe stattfinden; dabei ist für das Zeitintervall  $dt$

$$ZZ' = \varepsilon \gamma dt = -\alpha dt,$$

mithin

$$\alpha = -\varepsilon \gamma, \quad (1)$$

wenn  $\varepsilon$  den Winkelabstand der gestörten und ungestörten Lage der Hauptaxe  $C$  bedeutet.

Wie schon S. 415 am Schlusse des § 14 bemerkt wurde, ist jetzt in den Differentialgleichungen (6) S. 414 oder (2) S. 415 zu setzen anstatt

$$\lambda = \frac{C-A}{A} \frac{K}{C}$$

der Wert

$$\lambda - \gamma = \frac{C-A}{A} \frac{K}{C} - \gamma. \quad (2)$$

Damit werden die Endformeln nach S. 415 (1) und S. 416 (3):

$$\begin{aligned} \xi' &= f \cos(\lambda - \gamma)t - g \sin(\lambda - \gamma)t \\ \eta' &= f \sin(\lambda - \gamma)t + g \cos(\lambda - \gamma)t, \end{aligned} \quad (3)$$

wobei

$$\begin{aligned} f &= \int (-\beta \cos(\lambda - \gamma)t + \alpha \sin(\lambda - \gamma)t) dt \\ g &= \int (+\beta \sin(\lambda - \gamma)t + \alpha \cos(\lambda - \gamma)t) dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Hierin ist jetzt nach (1) zu setzen  $\alpha = -\varepsilon \gamma$  und  $\beta = \text{null}$ .  $\varepsilon$  selbst ist langsam veränderlich. Es beschreibt thatsächlich  $Z$  keinen Kreis um  $C_0$ , sondern eine Art Spirale, indem mit wechselndem Polabstande der störenden Körper die Flutberge ihren Äquatorabstand ändern.\*) Wir tragen dem Rechnung, indem wir

$$\varepsilon = E \sin \kappa t \quad (5)$$

setzen.  $E$  bezeichnet den Maximalabstand. Die Periode  $T$  in der Änderung von  $\varepsilon$  entspricht dem Mond- bzw. dem scheinbaren Sonnen-umlauf um die Erde;  $\kappa$  ist gegeben durch

$$\kappa T = 2\pi.$$

\*) Infolge dessen ist  $\beta$  nicht genau gleich null. Durch den Verlauf der Flut auf der wirklichen Erdoberfläche findet außerdem eine ungleichmäßige Änderung von  $\varepsilon$  und eine ungleichförmige Drehung um  $C_0$  statt. Diese Umstände ändern indessen das Resultat unserer Untersuchung nicht wesentlich.

Da  $T$  einem Monat bzw. Jahr entspricht (genauer  $27\frac{1}{3}^d$  bzw.  $365\frac{1}{4}^d$ ), so ist  $\kappa$  ein kleiner Bruchteil von  $2\pi$  und daher weit kleiner als  $\omega$ , welches bereits in einem Tage  $2\pi$  giebt. Da ferner  $\gamma$  für Mond und Sonne nahezu gleich  $\omega$  ist (im letzteren Falle erheblich genauer als im zweiten) so ist also  $\kappa$  von  $\gamma$  ein Bruchteil derselben Ordnung wie angenähert der Tag vom Monat bzw. Jahr.

Wir erhalten jetzt:

$$f = -E\gamma \int \sin(\lambda - \gamma)t \sin \kappa t \, dt$$

$$g = -E\gamma \int \cos(\lambda - \gamma)t \sin \kappa t \, dt$$

und hieraus, da

$$\sin(\lambda - \gamma)t \sin \kappa t = \frac{1}{2} (\cos(\lambda - \gamma - \kappa)t - \cos(\lambda - \gamma + \kappa)t)$$

$$\cos(\lambda - \gamma)t \sin \kappa t = \frac{1}{2} (\sin(\lambda - \gamma + \kappa)t - \sin(\lambda - \gamma - \kappa)t),$$

wenn der Einfachheit halber zunächst die Werte  $f_0$  und  $g_0$ , welche zur Zeit  $t = \text{null}$  stattfinden, gleich null angenommen werden:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} E\gamma \left( -\frac{\sin(\lambda - \gamma - \kappa)t}{\lambda - \gamma - \kappa} + \frac{\sin(\lambda - \gamma + \kappa)t}{\lambda - \gamma + \kappa} \right) \\ g &= \frac{1}{2} E\gamma \left( -\frac{\cos(\lambda - \gamma - \kappa)t}{\lambda - \gamma - \kappa} + \frac{\cos(\lambda - \gamma + \kappa)t}{\lambda - \gamma + \kappa} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} E\gamma \left( \frac{1}{\lambda - \gamma - \kappa} - \frac{1}{\lambda - \gamma + \kappa} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Das konstante Glied in  $g$  vernachlässigen wir, denn es giebt zusammengezogen

$$+ E \frac{\gamma \kappa}{(\lambda - \gamma)^2 - \kappa^2}; \quad (7)$$

da aber  $\lambda$  von  $\omega$  und  $\gamma$  nur etwa  $1/306$  ist und auch  $\kappa$  einen gegen  $\gamma$  kleinen Wert hat, so giebt dieses Glied angenähert

$$+ E \frac{\kappa}{\gamma}, \quad (7^*)$$

mithin selbst für den Mond nur einige Prozent von  $E$ . Nimmt man die Höhe der Mondflut auf dem offenen Ocean zu rund  $\frac{1}{2}^m$  an, so wird die behufs Anwendung der Formel (9\*) S. 422 auf die ganze Erdoberfläche reduzierte Höhe  $h$  den Betrag von  $\frac{1}{6}^m$  nicht erreichen und  $\beta$ , d. h. jetzt  $E$ , mit Rücksicht darauf, daß auch die Maximalwirkung nicht entsteht,  $< 1''$  sein. Mithin beträgt (7\*) kaum ein paar Hundertelsekunden.

Wir erhalten endlich durch Einführung der (6) in die (3) nach einiger Reduktion:

$$\begin{aligned} \xi' &= \frac{1}{2} E\gamma \left( \frac{\sin \kappa t}{\lambda - \gamma - \kappa} + \frac{\sin \kappa t}{\lambda - \gamma + \kappa} \right) = E \frac{\gamma(\lambda - \gamma) \sin \kappa t}{(\lambda - \gamma)^2 - \kappa^2} \\ \eta' &= \frac{1}{2} E\gamma \left( -\frac{\cos \kappa t}{\lambda - \gamma - \kappa} + \frac{\cos \kappa t}{\lambda - \gamma + \kappa} \right) = -E \frac{\gamma \kappa \cos \kappa t}{(\lambda - \gamma)^2 - \kappa^2}. \end{aligned}$$

Vernachlässigen wir wieder Größen von der Ordnung des Gliedes (7\*), so folgt

$$\xi' = -E \sin \kappa t = -\varepsilon, \quad \eta' = \text{null}, \quad (8)$$

und dies bedeutet, daß die Normale der u. E. und also auch die Momentanaxe immer bis auf Größen der Ordnung (7\*) mit der ungestörten Lage der Hauptaxe  $C$  zusammenfällt; denn in Fig. 68 liegt zufolge der (8) der Durchschnitt dieser Normalen mit der Kugelfläche konstant in  $C_0$ . An der wesentlichen Bedeutung dieses Resultates wird auch nichts geändert, wenn  $f_0$  und  $g_0$  sowie Bewegungen der Hauptaxe  $C$  aus früher erörterten Gründen mit in die Rechnung aufgenommen werden, wofür wir die Ausführung aber übergehen. Dagegen ist noch hervorzuheben, daß die Momentanaxe für die mittlere Drehbewegung des ganzen Erdkörpers auch eine solche für den festen Erdkörper allein ist, weil sie auch im wesentlichen als Drehaxe für die Flutberge auftritt.

Zu dem Resultate, daß die Flut und Ebbe (dynamisch und ohne Rücksicht auf Kontinente u. s. f. berechnet) keinen Einfluß auf die Lage der Rotationsaxe im Raume hat, gelangte schon *Laplace*, *Méc. cél.*, t. II, l. V, p. 325–339; p. 341–347 berücksichtigt er auch ungleiche Meerestiefe, Reibung u. a. m.

Man vergl. übrigens noch in der *Méc. cél.*, t. II, l. IV, p. 204–211 sowie t. V, l. XI, p. 16–17 und p. 57–71 über die Stabilität des Meeres. Flutartige Massenverschiebungen behandelt auch *Gylden* in der S. 408 genannten Abhandlung.

§ 18. Die Rotationsaxe im Erdkörper unter dem Einfluß des Mondes und der Sonne. Mond und Sonne sind die einzigen Himmelskörper, welche beachtenswerte Drehungsmomente  $L$ ,  $M$  und  $N$  erzeugen. Daß solche überhaupt entstehen, ist lediglich eine Folge der Ungleichheit der Hauptträgheitsmomente oder, wie man häufig weniger korrekt sagt: der ellipsoidischen Erdgestalt. Infolge dessen geht die Resultante der gegenseitigen Anziehungen der Erde und eines Himmelskörpers nicht durch den Erdschwerpunkt. Die Wirkung der so entstehenden Drehungsmomente ist allerdings unerheblich hinsichtlich der Verschiebung der Momentanaxe im Erdkörper, aber nicht verschwindend für die Bewegung der Momentanaxe im Raume. Wir werden hier ausführlich nur die Bewegung im Erdkörper betrachten, dagegen über die Bewegung im Raume nur berichten, weil diese Bewegung kein direktes geodätisches, sondern ein hervorragend astronomisches Interesse hat.

Wir gehen, indem wir die Erde als starr betrachten, von den Gleichungen (6) S. 391 aus:

$$\begin{aligned} C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq &= N \\ A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr &= L \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) rp &= M. \end{aligned} \quad (1)$$

Hierzu sind jetzt die  $N$ ,  $L$  und  $M$  zu berechnen. Es ist nach S. 388 z. B.:

$$N = \sum (x Y - y X) dm,$$

wobei wir unter  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  die Komponenten der beschleunigenden Kräfte (d. i. der Kräfte für die Masseneinheit) verstehen, welche Mond und Sonne auf das im Punkt  $(xyz)$  lagernde Massenteilchen  $dm$  der Erde ausüben. Es genügt, wenn wir jeden dieser Körper einzeln ins Auge fassen, und zwar soll immer der Mond genannt werden, da er die grössere Wirkung ausübt. Die Modifikation für die Sonne leuchtet sofort ein.

Bezeichnen wir mit  $\mathcal{M}$  die Mondmasse und mit  $e$  den Abstand des Mondschwerpunktes von dem Teilchen  $dm$ , so ist die gegenseitige Anziehung des Mondes und dieses Teilchens, wobei wir uns die Mondmasse in ihrem Schwerpunkt vereinigt denken können, gleich

$$k^2 \frac{\mathcal{M} dm}{e^2}.$$

$Xdm$ ,  $Ydm$ ,  $Zdm$  sind die Komponenten dieser Anziehung in Richtung nach dem Monde. Entgegengesetzt gleich diesen Komponenten sind die Komponenten derselben Anziehung in Richtung nach  $dm$ . Diese letzteren kann man aber mit  $X'\mathcal{M}$ ,  $Y'\mathcal{M}$ ,  $Z'\mathcal{M}$  bezeichnen, wenn  $X'$ ,  $Y'$  und  $Z'$  die Komponenten der Anziehung  $k^2 dm : e^2$  von  $dm$  auf die Masseneinheit von  $\mathcal{M}$  bezeichnen.

Wir führen nun in dem Ausdruck für  $N$  anstatt  $Xdm$  und  $Ydm$  bzw. die negativen Werte von  $X'\mathcal{M}$  und  $Y'\mathcal{M}$  ein; zugleich aber anstatt der Koordinaten  $xyz$  von  $dm$ , die Koordinaten  $x'y'z'$  des Mondschwerpunktes, was zulässig ist, da die Richtung der Anziehung in die Verbindungslinie beider Punkte fällt und das Drehungsmoment einer Kraft für jeden Punkt ihrer Richtung als Angriffspunkt dasselbe bleibt. Wir erhalten so:

$$N = \sum (y' X' - x' Y') \mathcal{M},$$

und da  $x'$ ,  $y'$  und  $\mathcal{M}$  konstant sind für alle Summanden:

$$N = \mathcal{M} \left( y' \sum X' - x' \sum Y' \right).$$

Die Summen der  $X'$ ,  $Y'$  und  $Z'$  sind aber die Resultanten der Anziehungen aller Erdteile auf die Masseneinheit des Mondes. Ist  $V$  das Potential der Erde, so ist somit nach § 6 im 1. Kap. S. 9:

$$\sum X' = \frac{\partial V}{\partial x'} \quad \sum Y' = \frac{\partial V}{\partial y'} \quad \sum Z' = \frac{\partial V}{\partial z'}$$

und hiermit folgt

$$\left. \begin{aligned} V &= \left( y' \frac{\partial V}{\partial x'} - x' \frac{\partial V}{\partial y'} \right) M. \\ \text{Ebenso wird} \\ V &= \left( z' \frac{\partial V}{\partial y'} - y' \frac{\partial V}{\partial z'} \right) M \\ V &= \left( x' \frac{\partial V}{\partial z'} - z' \frac{\partial V}{\partial x'} \right) M. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Nach § 3 (7) S. 60 im 2. Kap. ist aber, wenn  $r'$ ,  $\varphi'$ ,  $\lambda'$  die Polarkoordinaten des Mondschwerpunktes in Bezug auf den Erdschwerpunkt als Koordinatenanfang sind, in hier jedenfalls ausreichender Annäherung:

$$V = \frac{k^2}{r'} \left\{ M + \frac{1}{2r'^2} \left( C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3 \sin^2 \varphi') + \frac{3}{4r'^2} (B-A) \cos^2 \varphi' \cos 2\lambda' \right\},$$

wobei nach S. 56 (2) für die Polar- und rechtwinkligen Koordinaten die Beziehung besteht:

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos \varphi' \cos \lambda' \\ y' &= r' \cos \varphi' \sin \lambda' \\ z' &= r' \sin \varphi'. \end{aligned} \quad (3)$$

Es ist hierbei in Erinnerung zu bringen, daß an der angezogenen Stelle des 2. Kapitels ebenso wie bei den (1) oben vorausgesetzt ist, daß die drei Hauptaxen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  bezw. mit der Axe der  $x$ ,  $y$  und  $z$  identisch sind.

Eliminieren wir  $\sin^2 \varphi'$  und  $\cos^2 \varphi' \cos 2\lambda'$  aus dem Ausdruck für  $V$  und setzen zu diesem Zwecke:

$$1 - 3 \sin^2 \varphi' = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 3z'^2}{r'^2}$$

und

$$\cos^2 \varphi' \cos 2\lambda' = \frac{x'^2 - y'^2}{r'^2},$$

so folgt

$$V = k^2 \left\{ \frac{M}{r'} + \frac{1}{2r'^3} \left[ \begin{aligned} &(B + C - 2A) x'^2 \\ &+ (C + A - 2B) y'^2 \\ &+ (A + B - 2C) z'^2 \end{aligned} \right] \right\}. \quad (4)$$

Hiermit ergibt sich

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = \frac{\partial V}{\partial r'} \cdot \frac{x'}{r'} + \frac{k^2}{r'^3} (B + C - 2A) x',$$

oder in anderer Schreibweise und wenn zur Abkürzung die zu  $x'y'z'$  symmetrische Funktion

$$\frac{\partial V}{\partial r'} \cdot \frac{1}{r'} + \frac{k^2}{r'^3} (A + B + C) = H$$

gesetzt wird:

Ebenso findet sich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x'} &= \left( H - \frac{3k^2}{r'^3} A \right) x' \\ \frac{\partial V}{\partial y'} &= \left( H - \frac{3k^2}{r'^3} B \right) y' \\ \frac{\partial V}{\partial z'} &= \left( H - \frac{3k^2}{r'^3} C \right) z' , \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

womit sich endlich aus den (2) ergibt:

$$\begin{aligned} N &= k^2 \frac{3M}{r'^3} (B - A) x' y' \\ L &= k^2 \frac{3M}{r'^3} (C - B) y' z' \\ M &= k^2 \frac{3M}{r'^3} (A - C) z' x' . \end{aligned} \quad (6)$$

Die Differentialgleichungen (1) lauten hiermit wie folgt:

$$\begin{aligned} C \frac{dr}{dt} + (B - A) p q &= k^2 \frac{3M}{r'^3} x' y' \\ A \frac{dp}{dt} + (C - B) q r &= k^2 \frac{3M}{r'^3} y' z' \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) r p &= k^2 \frac{3M}{r'^3} z' x' . \end{aligned} \quad (7)$$

§ 19. Fortsetzung. Die Integration erfordert die Kenntnis von  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$  als Funktionen der Zeit  $t$ . Kehren wir zu Polarkoordinaten zurück, so sind für  $x' y' z'$  die Gleichungen (3) anzuwenden, in denen nun  $\varphi'$  und  $\lambda'$  Funktionen der Zeit sind. Um dieselben kennen zu lernen, betrachten wir Fig. 69. Sie zeigt die Koordinatenachsen und Ebenen im Durchschnitt mit einer um den Erdschwerpunkt gelegten Kugel vom Radius 1. Für unsere Zwecke genügt es bei Ermittlung der Ausdrücke für  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$  anzunehmen, daß die  $z$ -Axe, d. i. die Hauptaxe  $C$ , stets zugleich Momentanaxe und mithin die  $xy$ -Ebene Äquatorebene sei. Ferner nehmen wir an, daß der Mond sich in der Ebene der Erdbahn (Ekliptik) bewegt, da die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik nur einige Grade beträgt. Ein großer Fehler kann durch diese Annahme um so weniger entstehen, als die Mondbahn zur Ekliptik keine feste Lage hat, indem ihre Durchschnittslinie in derselben in  $18\frac{2}{3}$  Jahren einen ganzen Umlauf ausführt.

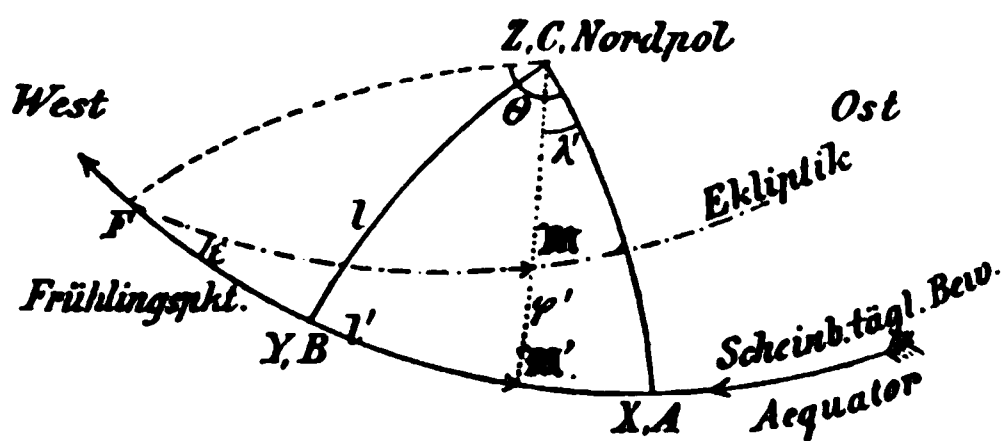


Fig. 69.

Ist nun  $n'$  die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Mondes in der

Ekliptik und beachtet man, daß der Bogen  $F\mathfrak{M}$  in der Fig. 69 mit der Zeit wächst, so ist zur Zeit  $t$  angenähert

$$F\mathfrak{M} = l = l_0 + n't, \quad (1)$$

wenn  $F\mathfrak{M}$  zur Zeit null gleich  $l_0$  ist. Das sphärische Dreieck  $F\mathfrak{M}\mathfrak{M}'$ , in welchem der Winkel  $\varepsilon$  bei  $F$  die Schiefe der Ekliptik gleich  $23,5''$  bedeutet, giebt bei Bezeichnung von  $F\mathfrak{M}'$  mit  $l'$ :

$$\begin{aligned} \sin \varphi' &= \sin l \sin \varepsilon \\ \sin l' \cos \varphi' &= \sin l \cos \varepsilon \\ \cos l' \cos \varphi' &= \cos l. \end{aligned} \quad (2)$$

Bezeichnen wir nun  $F\mathfrak{X}$ , die Sternzeit des Meridianes  $Z\mathfrak{X}$ , mit  $\Theta$ , so ist zufolge der Figur

$$l' = \Theta - \lambda'.$$

Indem wir dies in die 2. und 3. Gleichung (2) setzen, erhalten wir nach Auflösung von  $\sin l'$  und  $\cos l'$  linker Hand:

$$\begin{aligned} (\sin \Theta \cos \lambda' - \cos \Theta \sin \lambda') \cos \varphi' &= \sin l \cos \varepsilon \\ (\cos \Theta \cos \lambda' + \sin \Theta \sin \lambda') \cos \varphi' &= \cos l \end{aligned}$$

und hieraus durch Kombination:

$$\begin{aligned} \cos \lambda' \cos \varphi' &= + \sin l \sin \Theta \cos \varepsilon + \cos l \cos \Theta \\ \sin \lambda' \cos \varphi' &= - \sin l \cos \Theta \cos \varepsilon + \cos l \sin \Theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Für die Koordinaten  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$  ergibt sich jetzt mittelst Einführung der (3) und der 1. Gleichung (2) in die (3) des vorigen Paragraphen:

$$\begin{aligned} x' &= r' (+ \sin l \sin \Theta \cos \varepsilon + \cos l \cos \Theta) = \frac{r'}{2} (+ s \cos(l - \Theta) + d \cos(l + \Theta)) \\ y' &= r' (- \sin l \cos \Theta \cos \varepsilon + \cos l \sin \Theta) = \frac{r'}{2} (- s \sin(l - \Theta) + d \sin(l + \Theta)) \\ z' &= r' \sin l \sin \varepsilon \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{für } s = 1 + \cos \varepsilon \text{ und } d = 1 - \cos \varepsilon. \quad (5)$$

Indem wir diese Gleichungen paarweise miteinander multiplizieren und die Produkte in naheliegender Weise transformieren, erhalten wir:

$$\begin{aligned} x'y' &= \frac{r'^2}{8} \{ -s^2 \sin 2(l - \Theta) + d^2 \sin 2(l + \Theta) + 2sd \sin 2\Theta \} \\ y'z' &= \frac{r'^2}{4} \sin \varepsilon \{ s[-\cos \Theta + \cos(2l - \Theta)] + d[\cos \Theta - \cos(2l + \Theta)] \} \\ z'x' &= \frac{r'^2}{4} \sin \varepsilon \{ s[+\sin \Theta + \sin(2l - \Theta)] - d[\sin \Theta - \sin(2l + \Theta)] \}. \end{aligned} \quad (6)$$

Die Integration der Gleichungen (7) des vorigen Paragraphen wird in der Regel unter der Annahme  $B = A$  ausgeführt. Diese Annahme giebt jedenfalls eine sehr scharfe Annäherung. Zuzufolge

derselben wird  $r$  konstant gleich  $r_0$  und die 2. und 3. der Gleichungen (7) geben für  $p$  und  $q$  nach einfacher Transformation:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \lambda q &= + Q \left\{ s \cos(2l - \Theta) - d \cos(2l + \Theta) - 2 \cos \varepsilon \cos \Theta \right\} \\ \frac{dq}{dt} - \lambda p &= - Q \left\{ s \sin(2l - \Theta) + d \sin(2l + \Theta) + 2 \cos \varepsilon \sin \Theta \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

wobei

$$\lambda = \frac{C - A}{A} r_0 \quad Q = k^2 \frac{3 \mathfrak{M} (C - A)}{4 r'^3 A} \sin \varepsilon. \quad (8)$$

Nach dem Muster der Integration der Gleichungen (2) § 15 S. 415 folgt jetzt, wenn wir die rechten Seiten der (7) für den Augenblick mit  $\beta$  und  $\alpha$  bezeichnen:

$$\begin{aligned} p &= f \cos \lambda t - g \sin \lambda t \\ q &= f \sin \lambda t + g \cos \lambda t, \end{aligned} \quad (9)$$

wobei gesetzt ist:

$$\begin{aligned} f &= \int (\beta \cos \lambda t + \alpha \sin \lambda t) dt \\ g &= \int (-\beta \sin \lambda t + \alpha \cos \lambda t) dt. \end{aligned}$$

Die Substitution der Werte von  $\alpha$  und  $\beta$  giebt:

$$\begin{aligned} \frac{f}{Q} &= +s \int \cos(2l - \Theta + \lambda t) dt - d \int \cos(2l + \Theta - \lambda t) dt - 2 \cos \varepsilon \int \cos(\Theta - \lambda t) dt \\ \frac{g}{Q} &= -s \int \sin(2l - \Theta + \lambda t) dt - d \int \sin(2l + \Theta - \lambda t) dt - 2 \cos \varepsilon \int \sin(\Theta - \lambda t) dt. \end{aligned}$$

Bei Ausführung der Integration ist zu beachten, daß zufolge des Ausdrucks (1)  $l$  die Form hat:

$$l = l_0 + n' t;$$

ferner ist zu beachten, daß die Sternzeit ganz entsprechend die Form hat:

$$\Theta = \Theta_0 + n t, \quad (10)$$

worin  $\Theta_0$  eine Konstante und  $n$  den absoluten Wert der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation bezeichnet. Hiermit folgt, wenn in  $f'$  und  $g'$  diejenigen Glieder von  $f$  bzw.  $g$  vereinigt werden, welche von  $t$  unabhängig sind:

$$\begin{aligned} \frac{f}{Q} &= \frac{f'}{Q} + s \frac{\sin(2l - \Theta + \lambda t)}{2n' - n + \lambda} - d \frac{\sin(2l + \Theta - \lambda t)}{2n' + n - \lambda} - 2 \cos \varepsilon \frac{\sin(\Theta - \lambda t)}{n - \lambda} \\ \frac{g}{Q} &= \frac{g'}{Q} + s \frac{\cos(2l - \Theta + \lambda t)}{2n' - n + \lambda} + d \frac{\cos(2l + \Theta - \lambda t)}{2n' + n - \lambda} + 2 \cos \varepsilon \frac{\cos(\Theta - \lambda t)}{n - \lambda}. \end{aligned}$$

Endlich ergibt sich:

$$\begin{aligned} p &= f' \cos \lambda t - g' \sin \lambda t - Q \left\{ \frac{2 \cos \varepsilon}{n - \lambda} \sin \Theta - \frac{1 + \cos \varepsilon}{n - \lambda - 2n'} \sin(\Theta - 2l) + \frac{1 - \cos \varepsilon}{n - \lambda + 2n'} \sin(\Theta + 2l) \right\} \\ q &= f' \sin \lambda t + g' \cos \lambda t + Q \left\{ \frac{2 \cos \varepsilon}{n - \lambda} \cos \Theta - \frac{1 + \cos \varepsilon}{n - \lambda - 2n'} \cos(\Theta - 2l) + \frac{1 - \cos \varepsilon}{n - \lambda + 2n'} \cos(\Theta + 2l) \right\}. \end{aligned}$$



Die Glieder mit  $f'$  und  $g'$  entsprechen der in den §§ 5 und 6 dieses Kapitels betrachteten Bewegung der Momentanaxe, insbesondere den Ausdrücken (5) S. 392.

Mit Rücksicht auf (6) S. 392 und (8) S. 393 sowie auf die Ergebnisse des § 7 S. 399 ist für die von  $f'$  und  $g'$  abhängigen Glieder:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\omega} \varphi'' &= 0,07'' \cos (\lambda t - 70^\circ) \\ \frac{q}{\omega} \varphi'' &= 0,07'' \sin (\lambda t - 70^\circ), \end{aligned} \quad (12)$$

$t$  von 1868,0 ab gezählt und der Meridian von *Pulkowa* als  $zx$ -Ebene.

Bezüglich der neu hinzutretenden Glieder, welche man sich sowohl für den Mond als auch für die Sonne hingesetzt zu denken hat, ist zu bemerken, daß für  $\lambda$  die 1. Gleichung (8) in betracht kommt; da aber  $r_0$  sehr nahe gleich  $\omega$  ist und  $\omega$  gleich  $-n$  wird, indem vom Nordpol aus gesehen die Erde thatsächlich der Richtung von  $\omega$  (siehe S. 392 Fig. 64) entgegengesetzt, d. h. entgegengesetzt der Bewegung des Uhrzeigers, rotiert, so hat man:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= -\frac{C-A}{A} n \\ \text{und mit Rücksicht auf S. 394 (12):} \\ n - \lambda &= \frac{C}{A} n = 1,003283 n. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Da ferner die siderische Umlaufszeit des Mondes 27,322 mittlere Tage beträgt, diejenige der Erde um ihre Axe aber  $86164 : 86400 = 0,99727$  m. Tage, so ist

$$\begin{aligned} n' &= \frac{0,99727 n}{27,322} = 0,03650 n \\ \text{und} \quad n - \lambda - 2n' &= 0,93028 n \\ n - \lambda + 2n' &= 1,07628 n. \end{aligned} \quad (14)$$

Mit  $\varepsilon = 23^\circ 27,5'$  wird also für den Mond:

$$\frac{2 \cos \varepsilon}{n - \lambda} = \frac{[0,26215]}{n} = \frac{1,8287}{n} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos \varepsilon}{n - \lambda - 2n'} &= \frac{[0,31409]}{n} = \frac{2,061}{n} \\ \frac{1 - \cos \varepsilon}{n - \lambda + 2n'} &= \frac{[8,885 - 10]}{n} = \frac{0,077}{n}. \end{aligned} \quad (16)$$

Der Wert (15) gilt auch für die Sonne; da für diese die Umlaufszeit (die siderische der Erde) 365,256 mittlere Tage beträgt, so ist hier ferner:

$$\begin{aligned} n' &= \frac{0,99727 n}{365,256} = [7,43621 - 10] n = 0,00273 n \\ \frac{1 + \cos \varepsilon}{n - \lambda - 2n'} &= \frac{[0,28365]}{n} = \frac{1,921}{n} \\ \frac{1 - \cos \varepsilon}{n - \lambda + 2n'} &= \frac{[8,913 - 10]}{n} = \frac{0,082}{n}. \end{aligned} \quad (17)$$

Um  $Q$  zu ermitteln, bringen wir es auf die Form

$$Q = \frac{3}{4} \frac{k^2 M}{a_0^3} \frac{\mathfrak{M}}{M} \left( \frac{a_0}{r'} \right)^3 \frac{C-A}{A} \sin \varepsilon, \quad (18)$$

worin  $M$  die Erdmasse und  $a_0$  der Äquatorialhalbmesser des Erdellipsoids ist.  $k^2 M : a_0^2$  läßt sich aus den Pendelbeobachtungen entnehmen (vergl. auch im nächsten Kapitel § 4). Nach § 15 des 2. Kapitels Formel (7) S. 83 und den Zahlen (1\*) bis (5\*) des § 16 daselbst ist, bezogen auf die mittlere Zeitsekunde als Zeiteinheit:

$$\begin{aligned} \frac{k^2 M}{a_0^2} &= 9,7800 : (1 - 0,001843 - 0,000005) \\ &= 9,7981. \end{aligned} \quad (19)$$

Hierzu nehmen wir entsprechend der angenommenen Abplattung den *Besselschen* Wert

$$a_0 = 6377397.$$

Endlich wird mit  $\varepsilon = 23^\circ 27',5$  und  $\frac{C-A}{A} = 0,003283$ :

$$Q = [1,17781 - 10] \frac{\mathfrak{M}}{M} \left( \frac{a_0}{r'} \right)^3.$$

$a_0 : r'$  ist der Sinus der Äquatorial-Horizontalparallaxe  $p$ , deren Wert nebst  $\mathfrak{M} : M$  bereits S. 384 § 1 (8\*) für Mond und Sonne angegeben worden ist\*). Damit folgt:

$$\begin{aligned} Q \text{ für den Mond} &= [3,92781 - 20] \\ Q \text{ für die Sonne} &= [3,58960 - 20], \end{aligned} \quad (20)$$

womit sich nun die in den (11) vom Monde und der Sonne herrührenden Glieder berechnen lassen.

Wir berechnen aber nicht  $p$  und  $q$  selbst, sondern die Werte

$$\cos \mathfrak{x} = \xi = \frac{p}{\omega}, \quad \cos \mathfrak{y} = \eta = \frac{q}{\omega}. \quad (21)$$

$\xi$  und  $\eta$  sind die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten des Durchschnittspunktes der Momentanaxe mit der um den Erdschwerpunkt gelegten Kugel vom Radius 1.

Beachten wir, daß für die mittlere Zeitsekunde, indem die Erde in  $23^h 56^m 4^s$  um ihre Axe rotiert,

$$\omega = -n = -\frac{2\pi}{86164} \quad (22)$$

\*) Die Mondparallaxe ist nicht über  $0,5''$  unsicher. (Siehe auch Kap. 6 § 5.)

Die Parallaxe  $8,83''$  der Sonne ist eine Mittelbildung aus den besten Werten und kaum mehr als  $0,03''$  irrig. Vergl. die Zusammenstellung in *S. Newcomb, Populäre Astronomie, deutsche Ausgabe von R. Engelmann*, 1881, S. 225.

Die Mondmasse wird zu  $1/80$  bis  $1/81,5$  angegeben. Nach *Newcomb* ist sie gleich  $0,0123$ , d. i. nahezu  $1/81,3$ .

Über die Sonnenmasse siehe weiterhin.

ist, so wird nun mit Weglassung der kleinen von  $(1 - \cos \varepsilon)$  abhängigen Glieder und unter Vereinigung der in  $\sin \Theta$  bzw.  $\cos \Theta$  multiplizierten Glieder für Mond und Sonne:

$$\begin{aligned} \xi &= + 0,07 \cos(70^\circ + L - \lambda t) + 0,008765 \sin \Theta \\ \text{in Sek.} &\quad - 0,0068 \sin(\Theta - 2l_1) - 0,0029 \sin(\Theta - 2l_2) \\ \eta &= - 0,07 \sin(70^\circ + L - \lambda t) - 0,008765 \cos \Theta \\ \text{in Sek.} &\quad + 0,0068 \cos(\Theta - 2l_1) + 0,0029 \cos(\Theta - 2l_2). \end{aligned} \quad (23)$$

$L$  die westl. Länge der  $zx$ -Ebene geg. den Meridian v. *Pulkowa*;  $l_1$  bedeutet  $l$  für den Mond } Fig. 69  
 $t$  von 1868,0 ab.  $l_2$  „ „ „ die Sonne } S. 429.

Die Anteile des Mondes und der Sonne am Koeffizienten 0,008765 sind bzw.

$$0,0060074 \text{ und } 0,0027573.$$

Mit Rücksicht auf § 6 S. 394 erkennt man, daß  $\xi$  die Variation der Polhöhe eines Ortes ist, wenn man die positive  $x$ -Axe in den Meridian desselben legt, was angänglich ist, da wir wegen  $A=B$  die  $x$ - und  $y$ -Axe in der Äquatorebene beliebig wählen können.  $\Theta$  ist alsdann die Sternzeit des betreffenden Ortes und  $L$  seine westliche Länge gegen *Pulkowa*. Für  $\lambda$  ist (13) S. 432 zu beachten.

Die Teile von  $\xi$  und  $\eta$ , welche mit  $\Theta$  und  $(\Theta - 2l)$ , also in täglicher oder nahezu täglicher Periode variieren, sind so klein, daß sie sich den Beobachtungen gänzlich entziehen. Auch in der Rotationsdauer entstehen durch  $\xi$  und  $\eta$  keine merklichen periodischen Glieder, was wir hier nicht weiter untersuchen wollen, da ähnliche Untersuchungen schon in früheren Paragraphen geführt worden sind. — An diesen Verhältnissen ändert endlich auch die Berücksichtigung einer geringen Ungleichheit von  $A$  und  $B$  nichts.

§ 20. Notiz über die Präzession und Nutation. Die Ausdrücke für  $p$  und  $q$  bzw.  $\xi$  und  $\eta$  gestatten nun auch die Bewegung der Momentanaxe im Raume zu verfolgen. Man muß zu diesem Zwecke ein festes Axensystem einführen und ermitteln, wie sich gegen dasselbe das Hauptaxensystem nach Maßgabe von  $p$ ,  $q$  und  $r$  und mit ihm die Momentanaxe nach Maßgabe von  $\xi$  und  $\eta$  bewegen. Es findet sich, daß die Momentanaxe abgesehen von kleinen, periodischen Schwankungen eine Kreiskegelfläche um die Normale der Ekliptik beschreibt, wobei sich die Durchschnittslinie der zur Momentanaxe normalen Äquatorebene mit der Ekliptik auf dieser entgegengesetzt der Bewegung der Sonne verschiebt. Diese Verschiebung heißt lunisolare Präzession, jene kleinen periodischen Schwankungen bezeichnet man als Nutation.

Wir gehen hier auf die Aufstellung der allgemeinen Ausdrücke für Präzession und Nutation nicht ein und beschränken uns darauf,

lediglich für das Hauptglied der Präzession unter vereinfachenden Annahmen einen Näherungswert abzuleiten. Berücksichtigen wir in  $\xi$  und  $\eta$  nur das in  $\sin \Theta$  bzw.  $\cos \Theta$  multiplizierte Glied, so ist

$$\xi = \frac{0,008765}{206265} \sin \Theta \quad \eta = - \frac{0,008765}{206265} \cos \Theta. \quad (1)$$

Legen wir aber in irgend einem Zeitmoment die positive  $x$ -Axe in den Durchschnitt von Äquator und Ekliptik nach dem Frühlingspunkte  $F$  hin, Fig. 69 S. 429, so wird  $\Theta = \text{null}$  und

$$\xi = 0 \quad \eta = - \frac{0,008765}{206265}.$$

Der Nordpol  $M$  der Momentanaxe liegt somit auf dem größten Kreis  $FZ$ , wie es die Fig. 70 andeutet, wobei  $CM = \frac{0,008765}{206265}$  ist.

Rotiert nun im Zeitelement  $dt$  der Erdkörper um  $n dt$ , so wird sich  $C$  in Fig. 70 etwa nach  $C_1$  verschieben, und zwar ist

$$CC_1 = \frac{0,008765}{206265} n dt.$$

In Bezug auf die neue Lage des Axensystems  $C_1 X_1 Y_1$  hat aber der Pol der Momentanaxe die Koordinaten

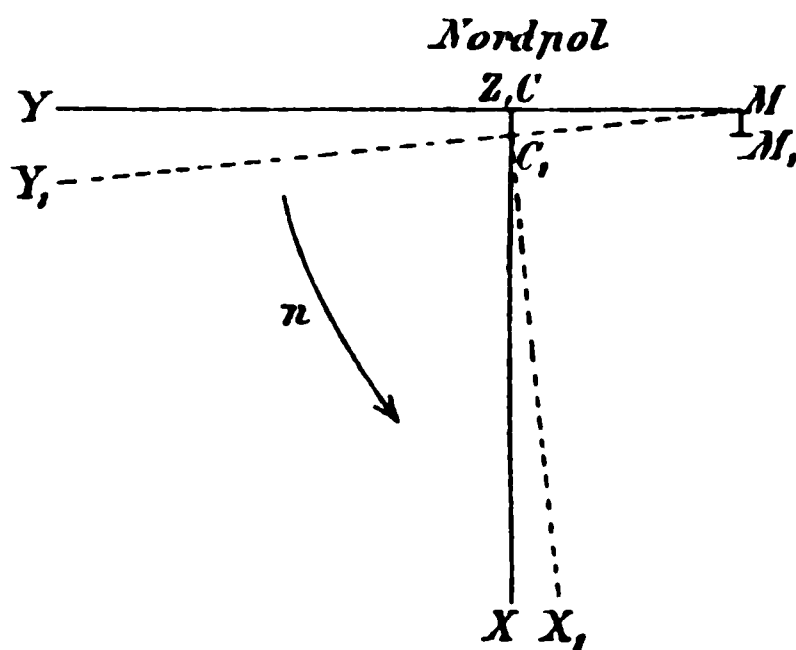


Fig. 70.

$$\xi = \frac{0,008765}{206265} n dt \quad \eta = - \frac{0,008765}{206265},$$

da  $\Theta$  von null in  $n dt$  übergeht. Bezeichnet man die neue Lage des Pols der Momentanaxe mit  $M_1$ , so ist also

$$MM_1 = \frac{0,008765}{206265} n dt. \quad (2)$$

Es ist hiernach  $MM_1$  gleich groß und parallel mit  $CC_1$ , d. h. der Pol der Momentanaxe verschiebt sich in jedem Zeitelement um die für  $MM_1$  angegebene GröÙe gegen den Frühlingspunkt  $F$ .

Bezeichnet nun in Fig. 71  $F$  den Frühlingspunkt, d. h. den Durchschnittspunkt zwischen Ekliptik und Äquator auf der Einheitskugel, für die Anfangslage,  $F'$  aber nach Verlauf der Zeit  $dt$ , und beachten wir, daß streng genommen die Ebene des Äquators normal zur Momentanaxe steht, so ist  $FF_1 = MM_1$  und  $F'F = MM_1 : \sin \varepsilon$ . In einem tropischen

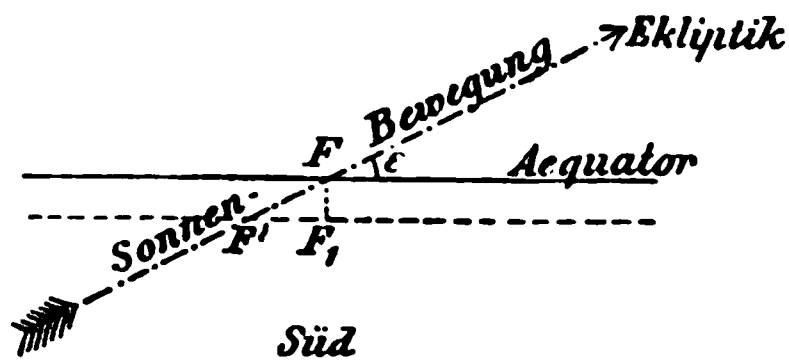


Fig. 71.

Jahre von 365,24 mittleren oder 366,24 Sterntagen wird, weil  $n$  in einem Sterntage sehr nahe gleich  $2\pi$  ist:

$$F'F \text{ in Sek.} = \frac{0,008765}{\sin \varepsilon} \cdot 366,24 \cdot 2\pi = 50,7. \quad (3)$$

Die Anteile des Mondes und der Sonne hieran sind einzeln bezw. 34,73 und 15,93.

Die Präzession ist durch Beobachtungen bestimmt und zwar zu 50,37"; da sie dem Werte  $Q : (n - 1)$  und somit nach (8) und (13) des vorigen Paragraphen dem Quotienten

$$\frac{C - A}{C}$$

proportional ist, so gewährt sie ein Mittel zur Berechnung desselben, dessen Wert jedoch durch die Unsicherheit in der Kenntnis der anderen Elemente, die in  $Q$  auftreten, etwas beeinträchtigt wird.

*Theodor Ritter v. Oppolzer* giebt im ersten Bande seines Lehrbuchs zur Bahnbestimmung der Planeten und Kometen, 2. Aufl., 1882, auch eine ausführliche Entwicklung der Präzession und Nutation, wie sie in gleicher Ausführlichkeit und Strenge noch nicht existiert. S. 154 (25) finden sich die Ausdrücke für  $\xi$  und  $\eta$ , die auch wir entwickelt haben, im wesentlichen mit unseren übereinstimmend. Für  $F'F$  wird S. 180 aus den Beobachtungen der Wert 50,37"

abgeleitet. Die Nichtübereinstimmung des oben berechneten Wertes mit diesem liegt außer an Unsicherheiten in den von uns benutzten Werten für die Mondmasse und  $(C - A) : A$  hauptsächlich in der Nichtberücksichtigung der Abweichung des Mondes von der Ekliptik und der ungleichmäßigen Bewegung des Mondes und der Sonne in  $l$ . Infolge dessen muß nach *Oppolzer* zum Anteil der Präzession für den Mond der Faktor

$$0,99258,$$

für die Sonne der Faktor

$$1,00042$$

hinzutreten. Die Anteile werden dann

$$\left. \begin{array}{l} 34,47 \\ 15,94 \end{array} \right\} \text{ zusammen} = 50,41''.$$

Die noch verbleibende Differenz ist unerheblich.

S. 179—182 ist die Bestimmung von  $(C - A) : C$  behandelt. Hier wird noch der Beobachtungswert des Hauptgliedes der Nutation hinzugezogen, welcher nur vom Monde abhängt und unmittelbar den ersten Wert  $Q$  unter (20) S. 433 ergibt.

Nun läßt sich mit diesem  $Q$ , welches an Stelle des ersten Wertes (20) tritt, der Anteil an der Präzession berechnen, welcher vom Mond herührt. Der Rest gehört alsdann der Sonne zu und gestattet  $(C - A) : C$  zu bestimmen. Da der Anteil an  $F'F$  für den Mond sowie die Sonne durch die aus Vorstehendem leicht abzuleitende Formel

$$\frac{k^2 \mathfrak{M}}{n^2 r'^3} \cdot 3\pi \cos \varepsilon \cdot 206265 \cdot 366,24 \frac{C - A}{C} \quad (4)$$

dargestellt wird, je nachdem man darin  $\mathfrak{M}$  und  $r'$  auf Mond oder Sonne bezieht, so ist vorerst noch  $k^2 \mathfrak{M} : r'^3$  für die Sonne anzugeben, wenn der Wert des Ausdruckes (4) für die Sonne dazu dienen soll, um  $(C - A) : C$  zu ermitteln.

$k^2 \mathcal{M} : r'^2$  für die Sonne ist aber die Beschleunigung der Anziehung der Sonne auf die Erde, welcher die Zentrifugalbeschleunigung der Erdbewegung, abgesehen von der geringen Beschleunigung der Anziehung der Erde auf die Sonne, das Gleichgewicht hält. Es ist also:

$$\frac{k^2 \mathcal{M}}{r'^2} = n'^2 r'$$

und mit Rücksicht auf die Angabe für  $n'$  S. 432:

$$\frac{k^2 \mathcal{M}}{n'^2 r'^3} = [4,87242 - 10]. \quad (5)$$

Mit dem von uns adoptierten Werte von

$$\frac{C - A}{C} = 0,003272 \quad (6)$$

ergibt sich nunmehr als Anteil (4) der Sonne an der Präzession wieder ebenso wie oben 15,93 und nach Anbringung des Faktors 1,00042 15,94. Nehmen wir aber mit *Oppolzer* S. 182

$$\frac{C - A}{C} = 0,003261, \quad (6^*)$$

so ergibt sich 15,89, welcher Wert nach seiner Rechnung S. 180 — 181 aus der Präzession und Nutation in der oben angedeuteten Weise folgt\*).

Obgleich dieser Wert den in § 7 dieses Kapitels S. 399 erwähnten Beobachtungen über die zehnmonatliche Rotationsdauer der Momentanaxe im Erdkörper gut entspricht, kann er dennoch vom wahren Wert um mehrere Einheiten der fünften Decimalstelle abweichen, sowohl wegen der Unsicherheit der angewandten Werte für die Präzessions- und Nutationskonstante als auch wegen der zweifelhaften Güte der eben angegebenen Kontrolle. Es ist daher ziemlich gleichgültig, ob man  $(C - A) : C$  nach (6) oder (6\*) annimmt\*\*).

---

\*) Denkt man sich die Ausdrücke (4) für Mond und Sonne angeschrieben, so ersieht man, daß durch Division beider Präzessionsanteile, d. h. durch Kombination von Präzession und Nutation, ein Mittel zur Bestimmung des Verhältnisses von Mond und Sonnenmasse erhalten wird. Jedoch ist diese Bestimmung der Mondmasse sehr unsicher. Vergl. *Oppolzer* S. 182.

Aus der Verbindung der Ausdrücke (19) S. 433 und (5) oben ergibt sich ferner ein Mittel um das Verhältnis der Erd- und Sonnenmasse zu berechnen. Division beider Ausdrücke giebt:

$$\frac{\mathcal{M}}{M} = [3,88128 - 10] \frac{n^2 r'^3}{a_0^2} = [3,88128 - 10] \frac{a_0 n^2}{\sin^3 p},$$

worin  $p$  wieder die Horizontalparallaxe der Sonne ist. Mit  $p = 8,83''$ ,  $a_0 = 6377397$  und  $n = 2\pi : 86164$  folgt für die Sonnenmasse:

$$\frac{\mathcal{M}}{M} = 329000,$$

welchen Wert wir adoptiert haben, um bei Anwendung verschiedener Relationen für  $k^2$  übereinstimmende Präzessionswerte zu erhalten. Nach *Oppolzer* S. 182 entspricht 330000 den letzten *Leverrierschen* Bestimmungen, während *Newcomb* 324000 angiebt.

\*\*) Zu dem Werte (6) gelangte *Hansen* in den Abhandl. der math.-phys. Cl. der Ges. der Wissenschaften zu Leipzig 1864 S. 471 mit der Präzessionskonstante 50,356 durch eine etwas andere Berechnung als oben. Zu wesentlich dem-

Die erste Untersuchung über die Bewegung der Erdaxe durch die Anziehung des Mondes und der Sonne stellte *d'Alembert* 1749 an. In der *Méc. cél.* von *Laplace* befinden sich die betreffenden Fragen t. II, l. V, p. 299—355 und t. V, l. XIV, p. 245—278 behandelt. Eingehendere Entwicklungen gaben 1858 *Poisson* in der *Connaissance des temps* und *Serret* 1859 in den *Annales de l'Observatoire de Paris* t. V. Vergl. auch *Cayley* in den *Monthly Notices of the Royal Astr. Soc.* Bd. 35 (1875).

*G. H. Darwin* untersucht in der S. 408 angegebenen Abhandlung auch den Einfluß von Massenbewegungen in der Erdkruste auf die Bewegung der Erdaxe unter dem Einfluß des Mondes und der Sonne. Er prüft namentlich den Einfluß auf die Schiefe der Ekliptik und findet ihn ohne Bedeutung.

*Hopkins* hat in den *Phil. Transact.* 1839 S. 381, 1840 S. 193 und 1842 S. 43—55 die Untersuchung der Bewegung der Erdaxe auch für den Fall durchgeführt, daß die Erde aus einer festen Kruste und flüssigem Inneren bestehe, und er gelangt zu der Ansicht, daß die Erde eine, mindestens  $\frac{1}{4}$  bis  $\frac{1}{5}$  ihres Radius dicke Rinde haben müsse, wenn den Erscheinungen genügt werden soll. *W. Thomson* und *G. H. Darwin* haben diese Frage eingehender studiert und sind sogar zu der Ansicht gelangt, daß die Erde durchaus einen überaus hohen Grad von Festigkeit besitzen müsse. Vergl. weiterhin Kap. 6 § 12.

Man vergleiche ferner in den *Astronom. Nachr.* 1883 Bd. 106 S. 337 Nr. 2542—2544 sowie 1884 Bd. 109 Nr. 2595 Mitteilungen von *L. de Ball* über die Entstehung einer täglichen Nutation durch die Ungleichheit der Hauptträgheitsmomente *A* und *B*.

## § 21. Die Formänderung der Niveauflächen durch die Bewegung der Momentanaxe und die Änderung der Rotationsgeschwindigkeit.

Nachdem in § 1 dieses Kapitels die Wirkung des Mondes und der Sonne auf die Form der Niveauflächen bei Annahme einer Rotation mit konstanter Geschwindigkeit um eine Axe von unveränderter Richtung untersucht worden ist, hat sich in den folgenden Paragraphen gezeigt, daß die Erdaxe Drehbewegungen um den Erdschwerpunkt ausführt, sowohl unter dem Einfluß der Anziehung der genannten Himmelskörper, als auch infolge geologischer und meteorologischer Massenverschiebungen, welche letztere auch Änderungen der Rotationsgeschwindigkeit erzeugen können.

Mit allen diesen Bewegungen sind notwendig Änderungen der Form der Niveauflächen verknüpft, denn sie beeinflussen wenigstens der Theorie nach die Komponenten der Schwerkraft. Nach dem 1. Kap. § 5 (1) S. 6 sind die letzteren in Bezug auf drei konstant gerichtete, zu einander rechtwinkelige Koordinatenachsen durch den Schwerpunkt bzw. gleich

selben Werte gelangten auch *Leverrier* und *Serret* durch sorgfältige Untersuchung der Präzession und Nutation in den *Annales de l'Observatoire de Paris* t. V, 1859, p. 324. Sie fanden  $\frac{1}{805}$  bis  $\frac{1}{806}$  d. h. 0,003278 bis 0,003268. [Wir haben die Originalmitteilung nicht in Händen gehabt; *Thomson und Tait, Handbuch*, giebt S. 401 nach *Leverrier* und *Serret* 0,00327 an].



$$X = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad Y = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad Z = \frac{d^2 z}{dt^2}, \quad (1)$$

wenn  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  die Komponenten der wirkenden Kräfte in dem in betracht gezogenen Punkte  $(xyz)$  sind. Änderungen finden nun sowohl in  $X$ ,  $Y$  und  $Z$ , wie in den zweiten Differentialquotienten von  $x$ ,  $y$  und  $z$  nach  $t$  statt.

Insoweit  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  und infolge dessen die Gestalt der Niveauflächen durch die Anziehung von Mond und Sonne beeinflusst werden, ist bereits in § 1 dieses Kapitels das Nötige bemerkt worden. § 17 zeigte ferner die Unerheblichkeit des Einflusses von Flut und Ebbe. Zu untersuchen ist nun noch der Einfluß von Massenbewegungen im Erdkörper auf  $X$ ,  $Y$  und  $Z$ , sowie der Einfluß von Drehbewegungen der Momentanaxe und von Änderungen der Rotationsgeschwindigkeit auf die zweiten Differentialquotienten der Koordinaten.

Um Ausdrücke für die zweiten Differentialquotienten der Koordinaten zu erhalten, nehmen wir wie in § 13 S. 410 zur Zeit  $t$  die augenblickliche Lage der Hauptaxen als festes Koordinatenaxensystem und denken uns, daß im allgemeinen der Erdkörper sich mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  und  $\omega_3$ , die im Anfang des genannten Paragraphen noch mit  $p = \alpha$ ,  $q = \beta$  und  $r = \gamma$  bezeichnet sind, gegen die festen Axen verdrehe. Indem wir nun von den besonderen Bewegungen einzelner Teile des Erdkörpers absehen, wird nach den (1) S. 411:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \omega_2 z - \omega_3 y \\ \frac{dy}{dt} &= \omega_3 x - \omega_1 z \\ \frac{dz}{dt} &= \omega_1 y - \omega_2 x. \end{aligned} \quad (1)$$

Differenzieren wir zunächst die erste dieser Gleichungen nach  $t$ , so folgt

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \omega_2 \frac{dz}{dt} - \omega_3 \frac{dy}{dt} + z \frac{d\omega_2}{dt} - y \frac{d\omega_3}{dt}$$

und hieraus mittelst der (1) und mit Rücksicht auf die Relation  $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -x\omega^2 + (x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3)\omega_1 + z \frac{d\omega_2}{dt} - y \frac{d\omega_3}{dt} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -y\omega^2 + (x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3)\omega_2 + x \frac{d\omega_3}{dt} - z \frac{d\omega_1}{dt} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -z\omega^2 + (x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3)\omega_3 + y \frac{d\omega_1}{dt} - x \frac{d\omega_2}{dt} \end{aligned} \right\} (2)$$

Hierzu treten die Relationen



$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \omega \cos \alpha = \omega \sin \tau \cos \chi \\
\omega_2 &= \omega \cos \beta = \omega \sin \tau \sin \chi \\
\omega_3 &= \omega \cos \tau,
\end{aligned} \tag{3}$$

worin  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\tau$  die Stellungswinkel der Momentanaxe gegen die drei Hauptaxen bezeichnen, Fig. 64 S. 392.

Wenn wir die Schwerkraft zu einer Zeit betrachten, wo keine Verschiebungen der Hauptaxen stattfinden, so haben  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  und  $\omega_3$  bezw. die Werte  $p$ ,  $q$  und  $r$ . Für  $p$  und  $q$  kommen dabei die Ausdrücke (23) S. 434 in betracht; mittelst (21) S. 433 ist der Übergang von  $\xi$  und  $\eta$  auf  $p$  und  $q$  herzustellen.

Nehmen wir in (23) S. 434 anstatt  $0,07''$  den grossen Betrag von  $1''$ , schreiben für  $70^\circ + L$  allgemeiner  $-\chi_0$  und beachten, daß mit Rücksicht auf (10) S. 431 und (13) S. 432

$$\lambda t = 0,003283 \omega t \quad \text{und} \quad \Theta = \Theta_0 - \omega t$$

ist, sowie endlich hinreichend genau

$$\cos \tau = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \tau$$

gesetzt werden kann, so folgt unter Beschränkung auf die ersten beiden Glieder von (23) S. 434:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{\omega}{206265} \left\{ \cos(0,003283 \omega t + \chi_0) - 0,009 \sin(\omega t - \Theta_0) \right\} \\
\omega_2 &= \frac{\omega}{206265} \left\{ \sin(0,003283 \omega t + \chi_0) - 0,009 \cos(\omega t - \Theta_0) \right\} \tag{4} \\
\omega_3 &= \omega \left\{ 1 - \frac{1 - 0,018 \sin(1,003 \omega t + \chi_0 - \Theta_0)}{2 \cdot (206265)^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Nehmen wir zunächst  $\omega$  konstant an (die Bewegungen der Momentanaxe, welche durch die (23) S. 434 charakterisiert werden, geben keine merklichen Variationen in  $\omega$ ), so zeigen diese Ausdrücke, daß man die Differentialquotienten der drei Komponenten von  $\omega$  nach  $t$  vernachlässigen kann. Am grössten sind noch die Beschleunigungen  $d\omega_1 : dt$  und  $d\omega_2 : dt$ , nämlich im Maximum angenähert gleich

$$\omega^2 : 20\,000\,000.$$

Das Produkt eines dieser Differentialquotienten in eine Koordinate ist also im Maximum etwa gleich

$$a \omega^2 : 20\,000\,000,$$

wenn  $a$  einen äquatorialen Radiusvektor bezeichnet; da aber  $a \omega^2$  rund gleich  $G : 300$  ist, so wird dies

$$G : 6000\,000\,000, \tag{5}$$

was auf keine Art etwas geben kann.

Ist  $\omega$  veränderlich, so wird dieser Umstand hauptsächlich nur  $\omega_3$  beeinflussen. Wir setzen in den (2) demgemäß:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = 0 = \frac{d\omega_2}{dt}, \quad \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (6)$$

Gelegentlich der Einführung dieser Werte vernachlässigen wir in den (2) noch mehrere offenbar ganz unerhebliche Glieder und erhalten folgende, selbst für die feinsten Untersuchungen ausreichenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -x\omega^2 + z\omega^2 \sin \tau \cos \chi - y \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -y\omega^2 + z\omega^2 \sin \tau \sin \chi + x \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= + (x \cos \chi + y \sin \chi) \omega^2 \sin \tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Die Glieder der rechten Seiten, welche in  $\sin \tau$  multipliziert sind, geben für  $\tau = 1''$  höchstens  $G : 60\,000\,000$ ; für den gegenwärtigen Zustand mit  $\tau = 0,07''$  aber nur etwa

$$G : 800\,000\,000, \quad (8)$$

was in keiner Weise etwas Merkliches ausmachen kann.

Die (7) berücksichtigen zufolge ihrer Entwicklung noch nicht den Einfluß von Verschiebungen der Hauptaxen im Erdkörper auf die Differentialquotienten von  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  und  $\omega_3$  nach  $t$ . Wenn solche stattfinden, kommen für  $\omega_1$  und  $\omega_2$  noch Glieder in betracht, die sich aus den Ausdrücken für  $\xi'$  und  $\eta'$  des § 15 ergeben, wobei für  $\xi'$  und  $\eta'$  einfach  $\xi$  und  $\eta$  gesetzt werden können. Säkulare Verschiebungen sind jedenfalls wirkungslos, wie leicht einzusehen ist. Plötzliche Verschiebungen können zwar merklich werden, aber nur rasch vorübergehend; sie sind somit auch ohne Bedeutung. Endlich erlangen die durch meteorologische Prozesse erzeugten periodischen Verschiebungen (S. 418) wenigstens nicht mehr Einfluß als von der Ordnung des Ausdrucks (5). Denn nach (5\*) S. 416, welches Formelsystem für eine kurze Zeit Anwendung finden kann, sind  $d\omega_1 : dt$  und  $d\omega_2 : dt$  von derselben Ordnung wie die Geschwindigkeiten  $\beta$  und  $\alpha$ , mit welchen sich die Hauptaxen im Erdkörper verschieben. Dieselben dürften aber bei diesen Prozessen nicht größer sein, als die aus der zehnmonatlichen Drehbewegung der Momentanaxe bei  $1''$  Winkelabstand von der Hauptaxe  $C$  resultierenden Werte dieser Differentialquotienten.

Unter der Voraussetzung, daß die Rotation um die Momentanaxe mit konstanter Winkelgeschwindigkeit erfolgt, fallen in den (7) jedenfalls die Glieder mit  $d\omega : dt$  weg, und wir erhalten als Potential der Schwerkraft den Ausdruck

$$W = V + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \omega^2 - (zx \cos \chi + zy \sin \chi) \omega^2 \sin \tau. \quad (9)$$

Sind  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  die augenblicklichen Trägheitsmomente, so hat man für  $V$  nach S. 428 (4) den Ausdruck:

$$V = k^2 \left\{ \frac{M}{r} + \frac{1}{2r} \left[ \begin{array}{l} (\mathfrak{B} + \mathfrak{C} - 2\mathfrak{A}) x^2 \\ + (\mathfrak{C} + \mathfrak{A} - 2\mathfrak{B}) y^2 \\ + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} - 2\mathfrak{C}) z^2 \end{array} \right] \right\} + T, \quad (10)$$

worin  $T$  wesentlich die lokalen und kontinentalen Unregelmäßigkeiten von  $V$  vorstellt.

Das Potential  $W$  unterliegt, wenn auch der Erdkörper keine Veränderungen erleidet, zeitlichen Veränderungen wegen des in  $\sin \tau$  multiplizierten Gliedes. Diesen Veränderungen entsprechen Veränderungen in den Höhenlagen der Niveauflächen bestimmten Potentialwertes, die in Bezug auf die Variable  $z$  im Maximum durch

$$a \omega^2 \sin \tau \cdot \frac{z \sqrt{x^2 + y^2}}{a G} \quad (11)$$

gegeben sind,  $a$  ein äquatorialer Radius. Da  $a \omega^2 : G$  etwa  $1/300$  ist und  $z \sqrt{x^2 + y^2}$  im Maximum etwa  $a^2 : 2$ , so giebt (11) selbst für  $\tau = 1''$  nur

$$\frac{a}{120\,000\,000} \quad \text{oder rund } 50^{mm}. \quad (12)$$

Gegenwärtig ist der Betrag nur etwa  $4^{mm}$ . Die Oberfläche des Meeres wird infolge dessen eine *zehnmonatliche Flut und Ebbe* zeigen, die besonders in mittleren Breiten hervortreten wird (falls einige Millimeter überhaupt bemerkbar sind).

§ 22. Fortsetzung: Veränderliche Rotationsdauer. Das Vorhergehende zeigt, daß man zu Zeiten, wo die Rotationsgeschwindigkeit der Erde konstant und  $\tau < 1''$  ist, für das Potential der Schwerkraft, bezogen auf die (ohne Rücksicht auf Flut und Ebbe bestimmten) Hauptaxen, setzen kann:

$$W = V + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \omega^2 \quad (1)$$

mit  $V$  nach (10) des vorigen Paragraphen. Das ist also derselbe Ausdruck wie im zweiten und dritten Kapitel, nur ist jetzt die Rotationsaxe allgemeiner als eine im Erdkörper und im Raume bewegte Axe gedacht. Die mit der Bewegung der Rotationsaxe verbundene Veränderlichkeit von  $\omega$  ist, wie schon bemerkt, unerheblich. Aber es kann  $\omega$  sich selbständig verändern.

Wenn  $\omega$  zu zwei verschiedenen Zeiten zwei um  $\delta \omega$  verschiedene Werte hat, so giebt dies in  $W$  eine Änderung von

$$(x^2 + y^2) \omega \delta \omega. \quad (2)$$

Dies ist ein Maximum für Äquatorpunkte. Setzen wir hier  $x^2 + y^2 = a^2$  und formen um, so folgt aus (2):

$$a \omega^2 \cdot a \frac{\delta \omega}{\omega};$$

dazu gehört eine Änderung der Höhenlage der Niveaflächen bestimmten Potentialwertes gleich

$$\frac{a \omega^2}{G} \cdot a \frac{\delta \omega}{\omega},$$

d. i. für eine Änderung der Jahreslänge um  $1''$ , d. h. für  $\delta \omega : \omega = 1 : 32\,000\,000$ :

$$0,7^{mm} \cdot *) \quad (3)$$

Der Übergang von einem Werte von  $\omega$  in einen anderen erfordert, daß eine Zeit lang  $d\omega : dt$  von null verschieden ist. Alsdann kommen in den beiden ersten Gleichungen (7) des vorigen Paragraphen die letzten Glieder zur Geltung. Allein der Wert dieser Glieder ist selbst für Annahmen, welche die wahrscheinlichen Grenzen der Veränderlichkeit bedeutend überschreiten, ganz unerheblich. Nehmen wir z. B. an, daß die Änderung  $\delta \omega = \omega : 32\,000\,000$  in der Zeit  $\Delta t$  mit konstanter Geschwindigkeit  $d\omega : dt$  erfolgt, so ist

$$\frac{d\omega}{dt} \Delta t = \frac{\omega}{32\,000\,000}. \quad (4)$$

Hiermit ergibt sich für das Produkt  $a d\omega : dt$ , d. h. für den Maximalwert der betreffenden Glieder in (7) des vorigen Paragraphen, nach naheliegenden Umformungen:

$$a \frac{d\omega}{dt} = \frac{a \omega^2}{32\,000\,000 \cdot \omega \cdot \Delta t} = \frac{G}{9000\,000\,000 \cdot \omega \cdot \Delta t}. \quad (5)$$

Eine Änderung  $\delta \omega$  von so bedeutender GröÙe wird wohl kaum in einem Tage erfolgen (vergl. § 15 S. 419 und § 16 S. 423); nehmen wir dies aber an, so wird  $\omega \cdot \Delta t = 2\pi$ , der Wert (5) somit immer noch so klein, daß er auf keine Art etwas ausmachen kann.

Der Umstand, daß man in den (2) bzw. (7) des vorigen Paragraphen die Glieder vernachlässigen kann, welche die Änderungsgeschwindigkeit von  $\omega$  mit der Zeit enthalten, ist sehr günstig. Denn für diese allgemeinen Ausdrücke hat die Schwerkraft kein Potential, d. h. es existiert keine Funktion, deren partielle Differentialquotienten nach den Koordinaten die Komponenten der Schwerkraft geben. Setzt man z. B. im Anschluß an (7) den von  $d\omega : dt$  abhängigen Teil von  $W$  gleich  $W_1$ , so müÙte gleichzeitig

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = y \frac{d\omega}{dt}, \quad \frac{\partial W_1}{\partial y} = -x \frac{d\omega}{dt}$$

sein, und mithin

---

\*) Ändert sich dagegen die Tageslänge um  $1''$ , so wird der Betrag das 365-fache, also  $\frac{1}{4}^{mm}$ . Vogler findet S. 30 seiner „Ziele und Hilfsmittel geometr. Präzisionsnivelllements“ 1873 das Dreifache, nämlich  $\frac{3}{4}^{mm}$ . Er geht von *Clairauts* Theorem aus, berücksichtigt aber nicht die Änderung der Schwerkraft mit der Höhe.

$$W_1 = xy \frac{d\omega}{dt} + \text{Funkt. (y)} \text{ sowie gleich } -xy \frac{d\omega}{dt} + \text{Funkt. (x)}$$

werden, was unmöglich ist.

Der physikalische Grund der Nichtexistenz des Potentials ist der, daß bei veränderlicher Rotation keine Niveauflächen existieren können. Die Geringfügigkeit der Veränderlichkeit überhebt uns nun auch der Erörterung der Frage, in welcher Weise diese Veränderlichkeit die Angaben der Libellen beeinflusst, insofern nur bei verschwindenden Werten von  $d\omega : dt$  u. s. w. (wie überhaupt nur bei ganz langsam veränderlicher Schwerkraft) anzunehmen ist, daß die Angaben der Libellen der Richtung der augenblicklichen Schwerkraft entsprechen.

§ 23. Fortsetzung: Bedeutendere Veränderungen als durch die Rotationsgeschwindigkeit  $\omega$  entstehen im Potentialausdruck (1) des vorigen Paragraphen dadurch, daß die mit Massenbewegungen verbundene Verschiebung der Hauptaxen die Koordinaten  $xyz$  eines Punktes ändert, sowie dadurch, daß die Massenbewegungen das Potential der Anziehung  $V$  beeinflussen.

Nehmen wir eine Drehung der Hauptaxe  $C$ , also der  $z$ -Axe, um  $1''$  an, so kann sich  $\sqrt{x^2 + y^2}$  im Maximum um  $z : 206265$  ändern, somit das zweite Glied im Ausdruck (1) für  $W$  § 22 S. 442 um

$$\frac{z \sqrt{x^2 + y^2}}{206265} \omega^2. \quad (1)$$

Dies ist im Maximum etwa

$$a \omega^2 \cdot \frac{a}{2 \cdot 206265} = G \cdot \frac{a}{120\,000\,000}.$$

Die entsprechende Änderung der Höhenlage der Niveaufläche bestimmten Potentialwertes beträgt

$$\frac{a}{120\,000\,000} \text{ oder rund } 50^{mm}. \quad (2)$$

Die indirekte Beeinflussung der Gestalt der Niveauflächen durch die mit Massenbewegungen verbundenen Drehung der Hauptaxe  $C$  ist also nicht ganz unerheblich, wenn die Drehung  $1''$  beträgt. Dagegen ist die mit Massenbewegungen gleicher Ordnung verbundene Parallelverschiebung der Koordinatenaxen als Folge relativer Bewegung des Erdschwerpunkts zum Erdkörper von geringem Einfluß, weshalb wir dieses nicht weiter erörtern.

Die größte Beeinflussung erfährt im allgemeinen das Potential  $W$  und die Lage der Niveauflächen durch die Änderungen von  $V$ . Denken wir uns beispielsweise eine anfangs auf Südamerika lagernde Masse, welche gleich groß ist mit einer die ganze Erdoberfläche in der Höhe  $h = 1/80^m$  bedeckenden Masse von der Dichtigkeit 1, sich nach Nordamerika verschieben, so giebt dies nach (9\*) S. 422 etwa  $0,1''$  Verschiebung der Hauptaxe  $C$  und somit nach (2) im Maximum etwa  $5^{mm}$  maximale Änderung des Meeresniveaus; dagegen ist nach dem vierten

Kapitel die direkte Wirkung auf die Lage des Meeresniveaus unterhalb des Kontinents etwa das Sechsfache jener indirekten Wirkung.

Mit der Änderung von  $V$ , ja auch bereits mit der Verschiebung der Hauptaxe  $C$  ist noch eine Änderung der Normalform der Niveauflächen verbunden, wie dies die Betrachtung des entsprechenden ersten Teiles des Ausdruckes (10) S. 442 zeigt. Auf diese Änderungen gehen wir aber nicht näher ein, da sie praktisch bedeutungslos bleiben.

## § 24. Wahrnehmungen über die Veränderlichkeit des Erdkörpers.

Dieser Wahrnehmungen giebt es verschiedene, indessen sind es fast ausschließlich wegen ihrer Geringfügigkeit oder schwierigen Beobachtbarkeit mehr vermutete als festgestellte.

In erster Linie ist die *säkulare Veränderung der Polhöhe* zu erwähnen, die für einige Orte angedeutet ist.

Für *Pulkowa* fand *Nyrén* in der in § 7 erwähnten Schrift die Polhöhe aus den Reihen von

		wahrsch. Fehler	Epoche	Größte Fehler	Anzahl d. Beob.	w. F. einer Beob.
<i>Peters:</i>	59° 46' 18,727"	$\pm 0,013''$	1843	+0,60" — 0,75"	371	$\pm 0,16''$
<i>Gylden:</i>	18,654	$\pm 0,014$	1866	+0,95 — 0,66	236	$\pm 0,18$
<i>Nyrén:</i>	18,501	$\pm 0,014$	1872,5	+0,70 — 0,59	155	$\pm 0,13$

*Nyrén* führt nach verschiedenen Quellen noch folgende Zahlen für die Polhöhen einiger Orte an, die allerdings nicht die Sicherheit derjenigen für *Pulkowa* haben:

<i>Greenwich</i>	1755	51° 28' 39,56"
	1825—26	38,95
	1836—41	38,43
	1842—48	38,17
	1851—60	37,92
<i>Rom</i>	1807—12	41° 53' 54,26"
	1866	54,09
<i>Königsberg</i>	1820	54° 42' 50,71"
	1843	50,56
<i>Washington</i>	1845—46	38° 53' 39,25"
	1861—64	38,78
<i>Paris</i>	vor 1825	48° 50' 13 "
	1851—54	11,2
<i>Mailand</i>	1811	45° 27' 60,7 "
	1871	59,19
<i>Neapel</i>	1820	40° 51' 46,63"
	1871	45,41

Diese Zahlen zeigen dem Sinne nach dieselbe säkulare Variation der Polhöhe für alle vorkommenden Orte. Es ist nicht wahrscheinlich, daß dieses zufällig ist. Man kann auch die Ursache nicht wohl darin suchen, daß bei den sämtlichen älteren Bestimmungen die größeren Werte durch die angewandten Sternörter erzeugt sind, sondern wird wirkliche Änderungen der Polhöhen annehmen müssen.\*)

Dieselben sind wahrscheinlich durch eine säkulare Bewegung der Hauptaxe *C* entstanden, welche wieder in säkularen Massenverschiebungen ihren Grund hat.

Auf solche weisen auch die *säkularen Hebungen und Senkungen der Meeresküsten* hin\*\*). Dieselben betragen zwar im Jahrhundert kaum einen vollen Meter, aber dies reicht zur Erklärung von Bewegungen der Hauptaxe *C* im Betrage von etwa eben soviel Sekunden aus, obgleich es zur Zeit schwierig erscheint, die beobachtetenhebungswerte an den Küsten rechnerisch mit den Änderungen der Polhöhen zu verbinden. Eine Veränderung der Lotrichtung durch dergleichen Massenbewegungen kann nicht als Erklärungsgrund dienen, da Scheiben von 1<sup>m</sup> Höhe selbst bei kontinentaler Ausdehnung wenig Anziehung geben. Auch ist es nicht plausibel anzunehmen, daß die betreffenden Ländermassen eine südliche Bewegung erleiden, da dieselbe im Jahrhundert vielleicht 20<sup>m</sup> und mehr betragen müßte.

Mit ziemlicher Sicherheit läßt sich nun behaupten, daß an den Hebungen und Senkungen der Meeresküsten die Niveauveränderungen des Meeres infolge veränderlicher Vergletscherung der arktischen und antarktischen Landmassen einen hervorragenden Anteil haben. Denn es genügt allein die ganz plausible Annahme, daß Grönlands Eisbedeckung in letzter Zeit eine säkulare Zunahme von 50<sup>m</sup> Dicke erfahren hat, zur Erklärung der Veränderungen der oben angeführten Polhöhen infolge einer damit verbundenen Verschiebung der Hauptaxe *C*\*\*\*).

\*) Andererseits zeigt eine neue Publikation von *E. Fergola* die teilweise Unsicherheit obiger Zahlen. Darnach fanden sich für *Neapel* durch Neureduktion der Beobachtungen von 1820 und 1871 die Sek. der Breite gleich  $45,70 \pm 0,57$  w. F. bzw.  $45,86 \pm 0,04$ . Eine Neubestimmung 1883 gab  $45,445 \pm 0,085$ .

\*\*) In sicherer Weise ist die Veränderung konstatiert durch Ufermarken in Schweden, die auf *Celsius'* und *Linnés* Rat angebracht wurden. Die nördliche Küste des baltischen Meeres hebt sich im Jahrhundert um ca. zwei Fuß nach der kritischen Untersuchung von *G. v. Helmersen* in dem *Bulletin de la Classe physico-mathém. de l'Ac. imp. de St. Pétersbourg*. 1856 Bd. 14 S. 193 u. ff. Die Südspitze von Schweden sinkt dagegen, und nur für das Mittelwasser der Ostsee bei Swinemünde ist nach *Seibts* Untersuchung der Pegelbeobachtungen daselbst (Publ. des königl. preuss. geodät. Instituts, 1881) von 1826 bis 1879 eine Veränderung der Höhenlage zur Küste nicht hervorgetreten.

Einen guten Überblick gewährt die Schrift von *F. G. Hahn*, das Aufsteigen und Sinken der Küsten, Leipzig 1879, sowie die Karte 5 des *Andreeschen Handatlases* von 1880.

\*\*\*) Über den Einfluß der Vergletscherungen siehe *Penk*, *Schwankungen des*



Beachtenswert ist bei den *Pulkowaer* Beobachtungen die große Übereinstimmung. Allem Anschein nach sind die Abweichungen nur Beobachtungsfehler und Refraktionsfehler (*Nyrén* S. 34 — 35), aber nicht etwa *kleine Schwankungen in der Richtung des Lotes, die innerhalb eines Tages oder Jahres stattfinden*. Gegen solche Schwankungen spricht auch die vielfach treffliche Übereinstimmung der Breitenbeobachtungen im ersten Vertikale. Dieselben zeigten u. a. bei *Struve* nur einen wahrscheinlichen Fehler von  $\pm 0,117''$ , in *Washington* 1862 — 67 einen solchen von  $\pm 0,141''$  (außer einem systematischen Fehler). Wenn andere Beobachtungsreihen eine geringere Übereinstimmung besitzen, wie z. B. die *Greenwicher* Beobachtungen des nahe dem Zenith kulminierenden Sternes  $\gamma$  *Draconis* mit dem Zenithsektor, deren w. F. etwa  $\pm 0,5''$  ist, so liegt dies wohl an Beobachtungsfehlern und nicht an Lotschwankungen\*).

Merkliche Lotschwankungen von täglicher oder jährlicher, oder überhaupt kurzer Periode sind jedenfalls wenig plausibel; nach Maßgabe von Kap. 4 würden schon die zu wenigen Zehntelsekunden erforderlichen Massenverschiebungen sehr bedeutende Massen betreffen müssen, da diese Massenverschiebungen jedenfalls nicht in der Nähe der Erdoberfläche stattfinden. Man müßte etwa starke Strömungen in größerer Tiefe oder im Erdinnern annehmen, die aber wenig wahrscheinlich sind, weil der Grund zu solchen, ungleiche Abkühlung, infolge des schlechten Wärmeleitungsvermögens der Erdrinde fehlt. Lotschwankungen infolge einer solchen Ursache würden sich übrigens in systematischer Weise über einen größeren Teil der Erdoberfläche verbreiten.

Die Beobachtungen, auf grund deren *d'Abbadie* 1852 Veränderungen der Lotrichtung glaubte annehmen zu müssen, sind weder in der ursprünglichen, noch in der später von demselben Gelehrten angewandten Form geeignet, Lotschwankungen zu konstatieren, da sie lediglich die relative Lage der Lotrichtung zum Terrain untersuchen ohne Zuhilfenahme astronomischer Beobachtungen\*\*). Während aber Lotschwankungen wenig wahrscheinlich sind, lassen sich genug Gründe dafür angeben, daß das Terrain keine unveränderte Lage hat, sondern vielmehr kleine Bewegungen ausführt. *Philipp Plantamour* und *C. v. Orff*

---

*Meeresspiegels*, München 1882. Hier sind auch die betreffenden Arbeiten von *Adhémar* und *Croll* beleuchtet. Man vergleiche ferner auch die neuere Arbeit von *Croll* im *Phil. Magazine* vol. 16, 1883, p. 351: *The Ice of Greenland etc.*

Änderungen der Eisbedeckung Grönlands im angegebenen Betrage müssen übrigens mit entgegengesetzten Änderungen am Südpol (die auch die Lage der C-Axe beeinflussen können) verbunden sein, weil sie andernfalls die Rotationsdauer der Erde merklich verkürzen würden.

\*) Diese w. F.-Angaben sind entnommen der Notiz von *Hall* in den *Astronom. Nachrichten* 1882 Bd. 102 S. 143 Nr. 2433.

\*\*) *Comptes rendus* 1852 t. 34 p. 712.



welche Beobachtungen derselben Art wie *d'Abbadie* anstellten, bezeichnen daher die hervortretenden Schwankungen als *Bodenbewegungen*. Der Betrag dieser Schwankungen hält sich auch nicht innerhalb Zehntelsekunden oder einzelner Sekunden, sondern erhebt sich bis zu einer Minute und mehr\*).

Zu einem großen Teile darf man die Bewegungen des Bodens der ungleichen Ausdehnung desselben bei wechselnder Temperatur zuschreiben. Es mögen aber auch noch andere Ursachen mitwirken.

Mit den Neigungsänderungen sind jedenfalls auch wirkliche Verschiebungen und Hebungen verbunden. Daß dieselben in horizontaler Richtung durch Temperatureinwirkung erheblich werden und in den Winkeln geodätischer Dreiecke oder in längeren Grundlinien bemerkbar seien, ist uns vorläufig im allgemeinen nicht recht glaubhaft, weil die obere Erdrinde meist zu sehr zerklüftet ist. Wenn in den Winkeln von Dreiecken Änderungen hervortreten sollten (was zur Zeit wohl noch in keinem Falle ganz zweifellos konstatiert, aber sehr möglich ist), so wird man zunächst an kleine Verschiebungen aus anderen Ursachen, insbesondere durch Erdbeben, zu denken haben\*\*). Die auf einigen Sternwarten bemerkten periodischen azimuthalen Drehungen erstrecken sich jedenfalls nur auf geringe Entfernungen.

Erdbeben wie vulkanische Prozesse können auch *Ursache kleiner lokaler Lotrichtungsänderungen* werden, wenn die bewegten Massen nicht flächenförmig verteilt, sondern kompakt sind. In diesem Falle können sogar durch die *Kultur* angehäuften oder entfernten Massen von Einfluß sein.

Hier mag auch der *Änderung der Niveauflächen* Erwähnung geschehen, welche dadurch entstehen, daß *die Wasserläufe Erdmassen transportieren* und im Meere vor ihrer Mündung ablagern\*\*\*).

---

\*) *Ph. Plantamour* und *C. v. Orff* wandten feste Libellen in Kellerräumen nach *d'Abbadies* Vorgang an. Solche Libellen geben aber, wie auch diese Gelehrten hervorheben, keine untrüglichen Beobachtungen, da sie selbst sich verziehen. In der That zeigten parallele Libellen nahe bei einander sehr verschiedene Bewegungen. Der Ersatz der Libellen durch Axen ist nach *Orff* nicht thunlich wegen der Oxydation in Kellerräumen. Neuerdings bediente sich *d'Abbadie* eines Apparates mit künstlichem Horizont. Man vergleiche die Artikel von *Ph. Plantamour* und *v. Orff* in den *Archives des Sciences phys. et naturelles* (Genève) Déc. 1879–82, sowie *d'Abbadies* neuere (von uns nicht nachgesehene) Abhandlung *Recherches sur la verticale* in den *Annales de la Soc. scientif. de Bruxelles* 1881 p. 37.

\*\*) Man vergleiche verschiedene interessante Angaben in den „Verhandlungen der europäischen Gradmessung 1878 in Hamburg“ Berlin 1879 S. 19–21. Ferner den Aufsatz von *C. Bohn*, Über einen Temperatureinfluß bei Längenmessungen, Zeitschrift für Vermessungswesen 1882 Bd. 11 S. 514.

\*\*\*) Vergl. *Zöppritz*, Über Schwankungen des Meeresspiegels infolge geologischer Veränderungen. *Wiedem. Ann.* Bd. 11, S. 1016.

Zum Schluß müssen wir noch der Untersuchungen von *S. Newcomb* in betreff einer *Veränderlichkeit der Rotationsdauer der Erde* gedenken. In seinen *Researches on the Motion of the Moon* konstatierte dieser astronomische Forscher Ungleichheiten in der Mondbewegung, die er geneigt war, einer ungleichmäßigen Rotation der Erde zuzuschreiben. Fig. 72 zeigt die Fehler der astronomischen Zeitbestimmung nach dieser Hypothese, wenn für 1750 und 1850 die Fehler null gesetzt

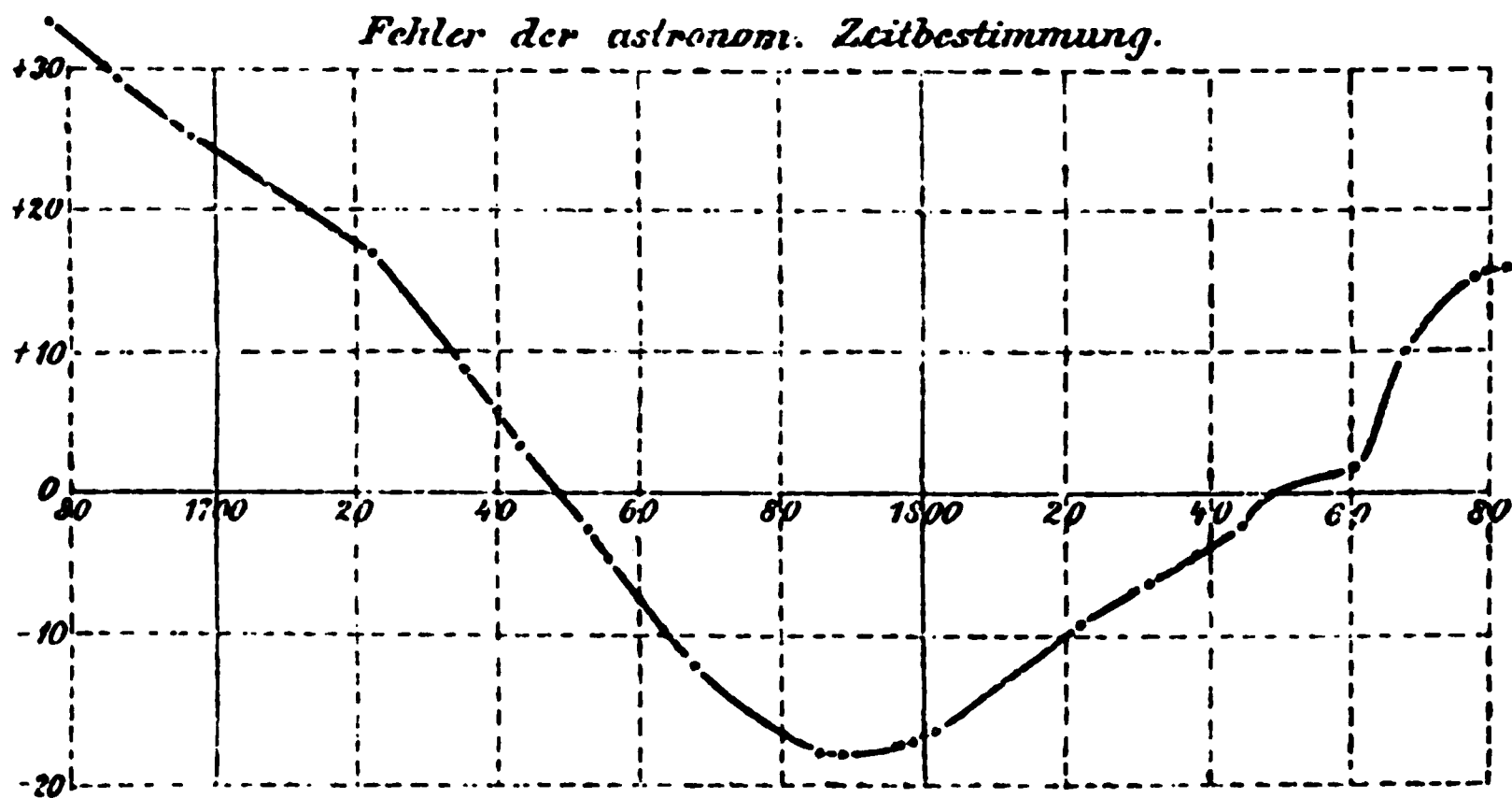


Fig. 72.

werden, also die Zeit zwischen beiden Epochen als Maßstab dient. Die Hypothese ist inzwischen durch die Untersuchung der Merkurvorübergänge vor der Sonnenscheibe von 1677—1881 nicht bestätigt worden\*); vielmehr nimmt *S. Newcomb* gegenwärtig (1882) an, daß die mittlere Bewegung des Mondes zwischen 1800 und 1875 wirklich geringer als zwischen 1720 und 1800 war. Es mag übrigens doch erwähnt werden, daß sich zunächst (1874) wenigstens für die Unregelmäßigkeiten zwischen 1848 und 1873 eine Bestätigung, wenn auch von geringem Gewicht, durch die Untersuchung der Verfinsterungen des ersten Jupitersatelliten seitens des Pulkowaer Astronomen *Glaser* gefunden zu haben schien\*\*). Dies war dadurch interessant, daß nach den *Researches* gerade in diese Zeit eine starke Unregelmäßigkeit fällt, zufolge welcher die Jahreslängen vor und nach 1862 sich um etwa 2' unterschieden haben würden.

Wir gedenken hier endlich noch der Veränderung in der Rotationsdauer der Erde durch *Flutreibung*, *auffallende Meteore* und

\*) *Astronomical Papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac*. Vol. I P. 6. Washington 1882. Die Fig. 72 ist nach den Zahlen dieser Quelle S. 449 konstruiert. Man vergleiche auch besonders S. 465.

\*\*) Vergleiche die Mitteilung von *S. Newcomb* im *American Journal of Science and Arts* 1874 Bd. 8 S. 161—170.

*säkulare Abkühlung der Erde.* Erstere bewirkt eine stetige Verlangsamung der Rotation, so daß nach *Adams'* Rechnung in einem Jahrhundert die astronomisch bestimmte Zeit gegen die durch die Anfangsgeschwindigkeit gegebene Zeit um 22' zurückbleibt und die Änderung der Jahreslänge somit im Jahrhundert 0,44' beträgt\*). Der Einfluß der Meteore und der Abkühlung ist der Schätzung schwer zugänglich und mit einiger Sicherheit noch nicht bekannt\*\*).

## Sechstes Kapitel.

### Verwertung astronomischer Angaben für die Erkenntnis der Erdgestalt und des Erdinnern.

§ 1. *Allgemeine Bemerkungen.* Die astronomischen Angaben, von denen die Überschrift dieses Kapitels redet, sind solche, welche allein für sich geeignet sind, Kenntnisse von der Erde zu gewähren. Es soll demnach hier nicht die Rede sein von denjenigen astronomischen Angaben, die für Gradmessungszwecke oder auch nur für rohe Krümmungsmessungen durch Bereisung der Erdoberfläche (Bd. 1 S. 619) erforderlich sind, ebensowenig wie von denen für Ausführung und Verwertung der Pendelbeobachtungen. Hierher gehört vielmehr die Beobachtung über die Form des Erdschattens bei Mondfinsternissen, die Beobachtung der Parallaxe des Mondes und anderer Himmelskörper, der Einfluß der Massenordnung der Erde auf die Mondbewegung und endlich derselbe Einfluß auf die Drehbewegung der Erdaxe.

Der erste und der letzte dieser Punkte sollen hier keine weitere Besprechung finden. Der letzte, weil das vorige Kapitel schon ausreichende Mitteilung darüber giebt; der erste, weil er gegenwärtig von geringem Werte ist. Mehr wie die Erkenntnis der nahezu kugelförmigen Erdgestalt kann die Beobachtung des nicht scharf begrenz-

---

\*) Vergleiche *Thomson und Tait*, Handbuch der theoretischen Physik, Bd. 1. T. 2, S. 402—403.

\*\*) Vergleiche im allgemeinen auch *Vogler*, Ziele und Hilfsmittel geometrischer Präzisionsnivellements, München 1873, S. 31 — 32.

*Vogler* weist hier darauf hin, daß solche Nivellements (sowie Pegelbeobachtungen), indem sie die zeitlichen Verschiebungen der Niveauflächen in Höhe markieren, geeignet sind, sehr kleine Beträge von Änderungen der Lotrichtungen zu erkennen, wenn solche Änderungen über weite Strecken in demselben Sinne erfolgen. Jedenfalls bilden von Zeit zu Zeit wiederholte Nivellements (und Pegelbeobachtungen) beim Studium der säkularen Veränderungen des Erdkörpers eine *notwendige* Ergänzung der Untersuchung durch wiederholte Bestimmung der geographischen Breite und Länge.

ten Erdschattens am Monde wohl kaum geben. Diese erste (für die Anwendung der Potentialtheorie [1. Kap. S. 17; 2. Kap. S. 72; 3. Kap. S. 149] wichtige) Annäherung gewährt uns gegenwärtig aber auch die Summe der zahllosen Bereisungen des größten Theiles der Erdoberfläche, 1. Bd. S. 613. Es hat daher die Beobachtung des Erdschattens nur mehr den Wert einer augenfälligen Demonstration der kugeligen Erdform. \*)

Was die Beobachtung der Parallaxen anbetrifft, so hat nur diejenige des Mondes Bedeutung, weil sie allein so erheblich werden kann, daß ihre Kenntniss bei genügender Schärfe der Messung einen Schluß auf die Erdgestalt zu geben verspricht. Selbst bei den Beobachtungen von Mars und Venus in ihrer größten Annäherung an die Erde wird sich die Abweichung der Figur der letzteren von der Gestalt der Kugel nicht in solchem Betrage äußern, daß sie daraus ermittelt werden könnte; man wird eben nur die ellipsoidische Gestalt nach anderweiten Ermittlungen zur Reduktion dieser Beobachtungen benutzen können.

Aber auch beim Monde ist es fraglich, ob sich aus den Beobachtungen mehr als eine allgemeine Bestätigung der auf anderem Wege ermittelten speziellen Angaben für die Erdgestalt entnehmen lassen wird, und ob es insbesondere möglich sein wird, aus den Mondparallaxenbeobachtungen Abweichungen von der Gestalt eines zum Erdschwerpunkt konzentrischen und zur Erdaxe coaxialen Rotationsellipsoids zu erkennen.

Dagegen giebt jedenfalls die Mondbewegung einen Wert für die Differenz der Trägheitsmomente des Erdkörpers und daraus einen Wert seiner Abplattung, der neben den auf anderen Wegen dafür ermittelten Werten in betracht kommt. Außerdem gewähren die verschiedenartigen Mondbeobachtungen (Finsternisse, Mondstrecken) erwünschte Sicherheit für die Zulässigkeit der bei den Entwicklungen des zweiten Kapitels erforderlichen Voraussetzung, daß der Erdschwerpunkt nahezu Mittelpunkt der Figur sei, wenn man deren Bestätigung nicht in der im 1. Kap. § 14 S. 17 u. erwähnten Thatsache finden will.

**§ 2. Bestimmung der geozentrischen Koordinaten eines Punktes der Erdoberfläche aus Beobachtungen der Mondparallaxe.** Wir nehmen zur Vereinfachung an, daß der Mondmittelpunkt  $M$  beobachtet werde. Wäre nun die Erde eine Kugel, oder genauer:

---

\*) *Bohnenberger* sagt in seiner *Astronomie*, Tübingen 1811, S. 119 und 590, daß die Astronomen auf die kugelförmige Gestalt der Erde aus der Begrenzung des Erdschattens geschlossen haben, weil diese Begrenzung bei allen Lagen des Mondes gegen den Horizont beständig dieselbe kreisförmige Figur behält. *B.* sagt aber nicht, ob jemand den Gegenstand an der Hand von Beobachtungsmaterial untersucht hat.

führten alle Lotrichtungen durch den Erdschwerpunkt  $C$ , so würden wie in Fig. 73 die beiden von  $C$  und von einem Punkt  $P$  der physischen Erdoberfläche nach  $M$  führenden Richtungen mit der Lotrichtung

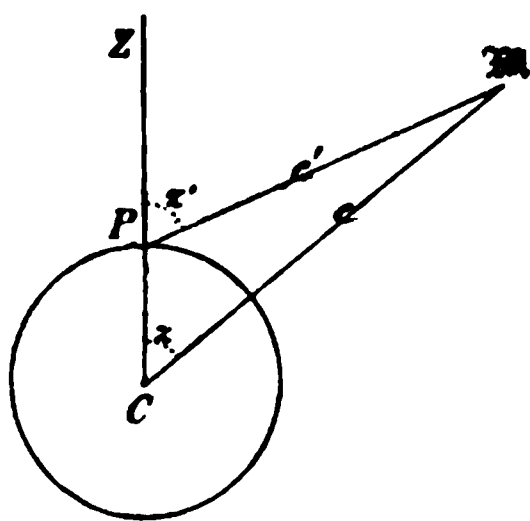


Fig. 73.

zung  $ZPC$  in einer Ebene, in einer Vertikalebene von  $P$ , liegen. Es würde also der Richtungsunterschied von  $C$  nach  $M$  und  $P$  nach  $M$  nur in Zenithdistanz als Differenz  $z' - z$  sich äußern, und es würde somit nur von Höhenparallaxe die Rede sein.

Die Lotrichtung eines Punktes  $P$  geht aber im allgemeinen nicht durch den Erdschwerpunkt, ja nicht einmal durch die Erdaxe; infolge dessen entsteht auch eine Azimutalparallaxe. Wir gehen dazu über, die Ausdrücke für die Parallaxe in Zenithdistanz und Azimut aufzustellen, ohne eine bestimmte Voraussetzung für die Erdgestalt.\*)

Nehmen wir  $P$  als Koordinatenanfang, legen die  $x$ -Axe nach Süden, die  $y$ -Axe nach Westen, die  $z$ -Axe nach dem Zenith, so sind die Koordinaten des Mondmittelpunktes  $M$ , wenn  $e'$ ,  $z'$  und  $a'$  bzw. Entfernung, Zenithdistanz und südwestliches Azimut sind:

$$\begin{aligned} x' &= e' \sin z' \cos a' \\ y' &= e' \sin z' \sin a' \\ z' &= e' \cos z'. \end{aligned} \quad (1)$$

Nehmen wir dagegen  $C$  als Koordinatenanfang für ein System von Axen, die bzw. zu den vorigen parallel sind und bezeichnen mit  $e$ ,  $z$  und  $a$  geozentrische Entfernung, Zenithdistanz und Azimut, so werden die Koordinaten von  $M$ :

$$\begin{aligned} x &= e \sin z \cos a \\ y &= e \sin z \sin a \\ z &= e \cos z. \end{aligned} \quad (2)$$

Bezogen auf dasselbe System von Axen erhalten wir die Koordinaten von  $P$ , d. h.  $x - x'$ ,  $y - y'$  und  $z - z'$ , wenn wir den Radiusvektor,  $CP$ , seine Zenithdistanz und sein Azimut bzw. mit  $r$ ,  $\xi$  und  $\alpha$  bezeichnen, gleich

$$\begin{aligned} x - x' &= r \sin \xi \cos \alpha \\ y - y' &= r \sin \xi \sin \alpha \\ z - z' &= r \cos \xi. \end{aligned} \quad (3)$$

Aus der Verbindung von (1), (2) und (3) folgt:

\*) Mit teilweiser Benutzung einer Entwicklung von *Encke* in *Brünnow*, *Sphärische Astronomie*, 2. Ausgabe 1862, S. 155.

$$\begin{aligned}
e' \sin z' \cos \alpha' &= e \sin z \cos \alpha - r \sin \xi \cos \alpha \\
e' \sin z' \sin \alpha' &= e \sin z \sin \alpha - r \sin \xi \sin \alpha \\
e' \cos z' &= e \cos z - r \cos \xi .
\end{aligned} \tag{4}$$

Hieraus sind nun zunächst noch  $\xi$  und  $\alpha$  durch Einführung gebräuchlicher Größen zu eliminieren.

Wir denken uns zu dem Zwecke wieder eine Einheitskugel um den Erdschwerpunkt  $C$  gelegt. Auf dieser Kugel bezeichne  $Z$  den Durchschnitt der  $z$ -Axe,  $P$  den Durchschnitt des Radiusvektors  $CP$ ,  $N$  den Nordpol der Erdaxe. Zum weiteren Verständnis der Fig. 74 erwähnen wir, daß geographische Breite u. Länge des Punktes  $P$  mit  $B'$  und  $L'$ , dagegen geozentrische Breite und Länge mit  $\varphi$  und  $L$  bezeichnet sind.

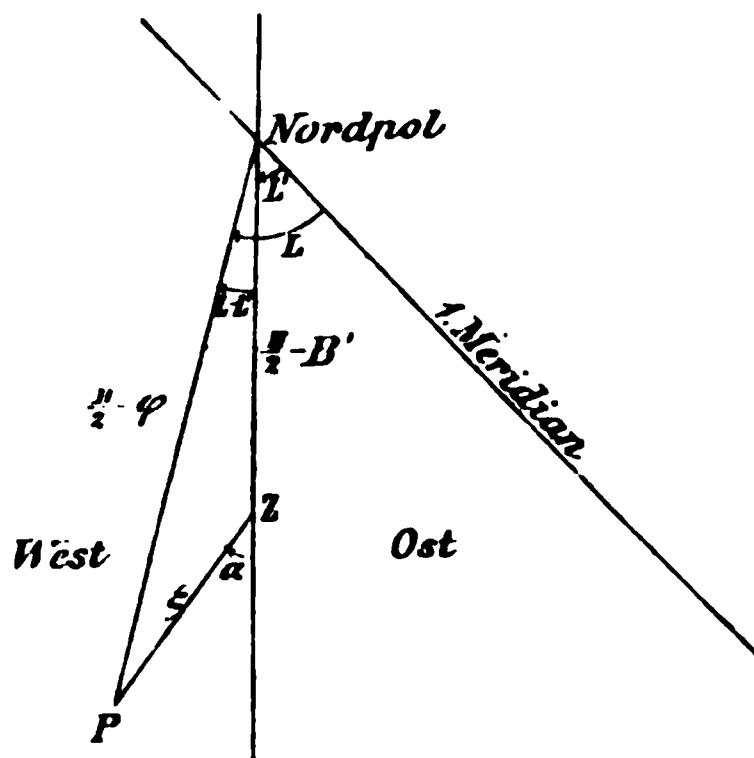


Fig. 74.

Das sphärische Dreieck zwischen  $N$ ,  $Z$  und  $P$  giebt nun nach bekannten Regeln:

$$\begin{aligned}
\cos \xi &= \sin \varphi \sin B' + \cos \varphi \cos B' \cos(L - L') \\
- \sin \xi \cos \alpha &= \sin \varphi \cos B' - \cos \varphi \sin B' \cos(L - L') \\
\sin \xi \sin \alpha &= \cos \varphi \sin(L - L') .
\end{aligned} \tag{5}$$

Zur Vereinfachung setzen wir in den beiden ersten Gleichungen

$$\cos(L - L') = 1 - 2 \sin^2 \frac{L - L'}{2}$$

und erhalten damit

$$\begin{aligned}
\cos \xi &= \cos(B' - \varphi) - 2 \cos \varphi \cos B' \sin^2 \frac{L - L'}{2} \\
\sin \xi \cos \alpha &= \sin(B' - \varphi) - 2 \cos \varphi \sin B' \sin^2 \frac{L - L'}{2} .
\end{aligned} \tag{6}$$

Diese beiden und die dritte Gleichung (5) geben in (4) eingeführt:

$$\begin{aligned}
e' \sin z' \cos \alpha' &= e \sin z \cos \alpha - S + q \sin B' \\
e' \sin z' \sin \alpha' &= e \sin z \sin \alpha + Q \\
e' \cos z' &= e \cos z - C + q \cos B' ,
\end{aligned} \tag{7}$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\begin{aligned}
r \sin(B' - \varphi) &= S \\
r \cos(B' - \varphi) &= C \\
r \cos \varphi \sin(L' - L) &= Q \\
2r \cos \varphi \sin^2 \frac{L' - L}{2} &= q .
\end{aligned} \tag{8}$$

Wir multiplizieren nun die erste von (7) mit  $\sin a'$ , die zweite mit  $\cos a'$  und finden durch Subtraktion:

$$0 = e \sin z \sin(a - a') + S \sin a' + Q \cos a' - q \sin B' \sin a'; \quad (9)$$

dagegen giebt die Multiplikation mit  $\cos a'$  bzw.  $\sin a'$  und Addition:

$$e' \sin z' = e \sin z \cos(a - a') - S \cos a' + Q \sin a' + q \sin B' \cos a'.$$

Multiplizieren wir noch die vorige Gleichung mit  $\sin \frac{a - a'}{2}$ , die letzte mit  $\cos \frac{a - a'}{2}$  und addieren, so folgt:

$$\begin{aligned} e' \sin z' \cos \frac{a - a'}{2} &= e \sin z \cos \frac{a - a'}{2} - S \cos \frac{a + a'}{2} \\ &+ Q \sin \frac{a + a'}{2} + q \sin B' \cos \frac{a + a'}{2}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung giebt mit der Gleichung (9) und der dritten Gleichung (7) nachstehende Zusammenstellung:

$$\begin{aligned} e \sin z \sin(a' - a) &= S \sin a' + Q \cos a' - q \sin B' \sin a' \\ e' \sin z' &= e \sin z - S \frac{\cos \frac{a + a'}{2}}{\cos \frac{a - a'}{2}} + Q \frac{\sin \frac{a + a'}{2}}{\cos \frac{a - a'}{2}} + q \sin B' \frac{\cos \frac{a + a'}{2}}{\cos \frac{a - a'}{2}} \quad (10) \\ e' \cos z' &= e \cos z - C + q \cos B', \end{aligned}$$

woraus man durch Kombination der zweiten und dritten Gleichung in ähnlicher Behandlungsweise wie oben für die ersten beiden (7) leicht ableitet:

$$\sin(a' - a) = S \frac{\sin a'}{e \sin z} + Q \frac{\cos a'}{e \sin z} - \frac{q \sin B' \sin a'}{e \sin z} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sin(z' - z) &= C \frac{\sin z'}{e} - S \frac{\cos z'}{e} \frac{\cos \frac{a' + a}{2}}{\cos \frac{a' - a}{2}} + Q \frac{\cos z'}{e} \frac{\sin \frac{a' + a}{2}}{\cos \frac{a' - a}{2}} \\ &+ q \frac{\sin B' \cos z'}{e} \frac{\cos \frac{a' + a}{2}}{\cos \frac{a' - a}{2}} - q \frac{\cos B' \sin z'}{e} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{e'}{e} &= \cos(z' - z) - C \frac{\cos z'}{e} - S \frac{\sin z'}{e} \frac{\cos \frac{a' + a}{2}}{\cos \frac{a' - a}{2}} + Q \frac{\sin z'}{e} \frac{\sin \frac{a' + a}{2}}{\cos \frac{a' - a}{2}} \\ &+ q \frac{\sin B' \sin z'}{e} \frac{\cos \frac{a' + a}{2}}{\cos \frac{a' - a}{2}} + q \frac{\cos B' \cos z'}{e}. \end{aligned} \quad (13)$$

Diese Formeln sind noch einer erheblichen Vereinfachung fähig. Um dieselbe zu finden, ist zunächst der maximale Betrag von  $S$ ,  $C$ ,  $Q$



und  $q$  festzustellen. Nehmen wir als Einheit der linearen Längen den äquatorialen Radius des Erdellipsoids, so ist

$\frac{1}{e}$  der Sinus der Horizontal-Äquatorial-Parallaxe,

welche in Sekunden rund gleich 3422 ist. Da ferner  $B' - \varphi$  im Maximum etwa 11' beträgt (Bd. 1 S. 60), so sind die Werte von  $\varphi'' \frac{S}{e}$  und  $\varphi'' \frac{C}{e}$  mit Rücksicht auf (8) im Maximum etwa gleich 11'' und 3422''.

Setzen wir ferner als maximale Lotabweichung 1,5 Minuten fest, so wird  $L' - L$ , da es nach Bd. 1 S. 518 mit  $\sec B'$  wächst, für 80° geographischer Breite rund 9' betragen können, welcher Betrag in praktischen Fällen etwa das Maximum angiebt. Das Maximum von  $\varphi'' \frac{Q}{r}$  ist mit Rücksicht auf (8), weil  $\varphi$  und  $B'$  wenig verschieden sind, indessen nur 1,5' oder 90'', das Maximum von  $\varphi'' \frac{q}{r}$  nur 0,12''. Die entsprechenden Maxima von  $\varphi'' \frac{Q}{e}$  und  $\varphi'' \frac{q}{e}$  betragen endlich nur 1,5'' und 0,002''.

Mit Rücksicht hierauf setzen wir näherungsweise:

$$z' - z = \varphi' \left\{ C \frac{\sin z'}{e} - S \frac{\cos z'}{e} \cos a' + Q \frac{\cos z'}{e} \sin a' + \frac{1}{6} C^3 \left( \frac{\sin z'}{e} \right)^3 \right\} \quad (14)$$

in Sek.

$$a' - a = \varphi'' \left\{ S \frac{\sin a'}{e \sin z} + Q \frac{\cos a'}{e \sin z} \right\} \quad (15)$$

in Sek.

$$\frac{e'}{e} = \cos(z' - z) - C \frac{\cos z'}{e} - S \frac{\sin z'}{e} \cos a'. \quad (16)$$

Die Gleichung (14) hat wegen Vernachlässigung der Glieder mit  $q$  und der höheren Glieder der Reihenentwicklung einen Fehler von einigen Tausendelsekunden. Außerdem ist in den Gliedern mit  $S$  und  $Q$  bezw. gesetzt

$$\cos a' \text{ für } \frac{\cos \frac{a' + a}{2}}{\cos \frac{a' - a}{2}} \quad \text{und} \quad \sin a' \text{ für } \frac{\sin \frac{a' + a}{2}}{\cos \frac{a' - a}{2}};$$

hierdurch entsteht indessen nur bei Beobachtungen in nächster Nähe des Zeniths außerhalb des Meridians ein merklicher Fehler, nämlich für  $z = 2^\circ$  im Maximum knapp 0,01'' und bei weiterer Annäherung umgekehrt proportional  $z$  wachsend. Die nächste Nähe des Zeniths wird man aber ohnehin wegen des stärkeren Einflusses gewisser Instrumentalfehler gern vermeiden.

Die Gleichung (15) vernachlässigt namentlich ein in  $q$  multipliziertes Glied, dessen Einfluß auf  $a' - a$  mit abnehmendem  $z$  wächst und bei  $z = 2^\circ$  im Maximum bereits 0,06'' erreicht, welches aber doch für unsere Absichten der Berechnung von  $S$  und  $Q$  wegbleiben kann, da sein Einfluß auf das Aggregat  $(S \sin a' + Q \cos a') : e$  im Maximum





des vorigen Paragraphen, indem wir die Verbesserungen von  $\alpha$  und  $\delta$  als Differentiale ansehen und dieselben in Bogensekunden verstehen, die Gleichungen:

$$\underset{\text{in Sek.}}{z' - z^0} = \varrho'' \left\{ C \frac{\sin z'}{e} - S \frac{\cos z'}{e} \cos \alpha' + Q \frac{\cos z'}{e} \sin \alpha' + \frac{1}{6} C^3 \left( \frac{\sin z'}{e} \right)^3 \right\} \quad (4)$$

$$- d\delta \cos p + dt \cos \delta \sin p$$

$$\underset{\text{in Sek.}}{\alpha' - \alpha^0} = \varrho'' \left\{ S \frac{\sin \alpha'}{e \sin z} + Q \frac{\cos \alpha'}{e \sin z} \right\} + d\delta \frac{\sin p}{\sin z} + dt \cos \delta \frac{\cos p}{\sin z}. \quad (5)$$

Wenn man diese Gleichungen betrachtet, so scheint auf den ersten Blick für nicht zu hohe Breiten eine vollständige Bestimmung der fünf Unbekannten  $C$ ,  $S$ ,  $Q$ ,  $d\delta$  und  $dt$  nicht unmöglich, falls bei geeigneten Werten der Monddeklinaton Beobachtungen im Meridian mit solchen in größerem Abstand vom Meridian, insbesondere dem Ost- und Westvertikal kombiniert werden. Durch Beobachtung entgegengesetzter Teile des Mondrandes, wenn auch zu verschiedenen Zeiten, würde sich die Unsicherheit in der Kenntnis des Mondradius und in der Auffassung des Mondrandes eliminieren lassen, und eine etwaige Ungenauigkeit in dem aus den Mondtafeln entnommenen Werte von  $\frac{1}{e}$  würde unschädlich werden, indem annähernd gleichzeitige Bestimmungen an verschiedenen Beobachtungsstationen mit einander verglichen würden.\*)

Allein bei näherer Betrachtung zeigt sich der Übelstand, daß man  $d\delta$  aus den Beobachtungen *einer* Station nicht eliminieren kann, so daß die Möglichkeit der Bestimmung von  $r$  im allgemeinen verloren geht. Hierauf wird man aufmerksam bei der Aufstellung der Parallaxenformeln für Deklination  $\delta$  und Stundenwinkel  $t$ .\*\*) Wir können es aber direkt an (4) und (5) zeigen, wenn wir anstatt  $C$  und  $S$  andere Unbekannte einführen. Es war

$$C = r \cos(B' - \varphi) \quad S = r \sin(B' - \varphi).$$

\*) Hierbei würde es sich mehr um einen konstanten Fehler der in den Tafeln gegebenen Horizontalparallaxe handeln, als um veränderliche Fehler. Wenigstens sind Fehler in  $\frac{1}{e}$  von gleicher Ordnung mit denen, welche in Rektaszension und Deklination des Mondes bei *Hansens* Mondtafeln (als Arcus genommen) hervortreten, noch von ziemlich unerheblichem Einfluß.

\*\*) Um die Parallaxenformeln für Deklination und Stundenwinkel zu erhalten, legt man die  $z$ -Axe nach dem Nordpol, die  $x$ -Axe in die Meridianebene nach Süden, die  $y$ -Axe nach Westen. Die Grundformeln werden:

$$\begin{aligned} e' \cos \delta' \cos t' &= e \cos \delta \cos t - r \cos \varphi \cos(L' - L) \\ e' \cos \delta' \sin t' &= e \cos \delta \sin t + r \cos \varphi \sin(L' - L) \\ e' \sin \delta' &= e \sin \delta - r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Hieraus folgt ganz in derselben Weise wie im vorigen Paragraphen:

Bilden wir nun mit Rücksicht auf (4) und (5) die Identitäten

$$C \sin z' - S \cos z' \cos a' = r \cos \varphi (\cos B' \sin z' - \sin B' \cos z' \cos a') \\ + r \sin \varphi (\sin B' \sin z' + \cos B' \cos z' \cos a')$$

und

$$S \sin a' = r \cos \varphi \cdot \sin B' \sin a' - r \sin \varphi \cdot \cos B' \sin a',$$

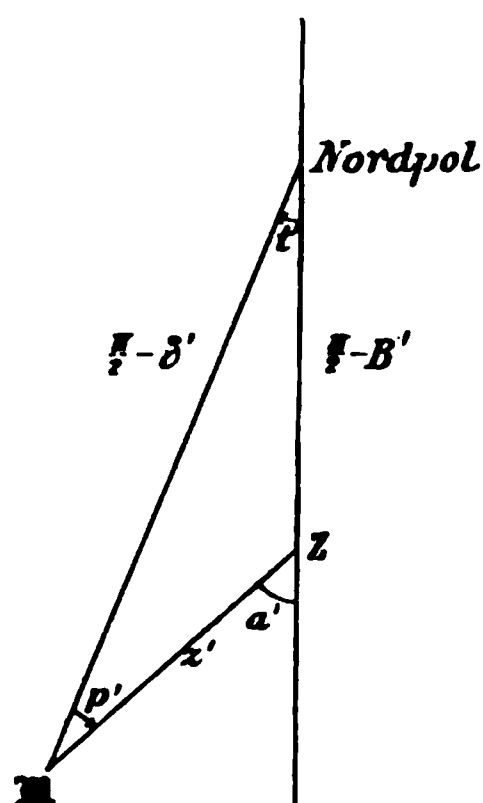


Fig. 77.

und beachten die folgenden Relationen, welche sich aus Fig. 77 ergeben, die auf einer den Punkt  $P$  umschließenden Einheitskugel liegt:

$$\sin B' \cos z' - \cos B' \sin z' \cos a' = \sin \delta' \\ \sin B' \sin z' + \cos B' \cos z' \cos a' = \cos \delta' \cos p' \\ \cos B' \sin a' = \cos \delta' \sin p',$$

aus deren erster man durch Multiplikation mit  $\cos a'$  und einigen weiteren Transformationen leicht ableitet:

$$\cos B' \sin z' - \sin B' \cos z' \cos a' = \sin p' \sin t' \\ - \cos p' \cos t' \sin \delta',$$

so gehen (4) und (5) über in:

$$z' - z^0 = \varphi'' \left\{ \frac{r \cos \varphi}{e} (\sin p' \sin t' - \cos p' \cos t' \sin \delta') + \frac{r \sin \varphi}{e} \cos \delta' \cos p' \right. \\ \left. + \frac{Q}{e} \cos z' \sin a' + \frac{1}{6} \frac{C^3}{e^3} \sin^3 z' \right\} \quad (6) \\ - d\delta \cos p + dt \cos \delta \sin p$$

$$a' - a^0 = \varphi'' \left\{ \frac{r \cos \varphi}{e} \frac{\sin B' \sin a'}{\sin z} - \frac{r \sin \varphi}{e} \frac{\cos \delta' \sin p'}{\sin z} + \frac{Q}{e} \frac{\cos a'}{\sin z} \right\} \quad (7) \\ + d\delta \frac{\sin p}{\sin z} + dt \cos \delta \frac{\cos p}{\sin z}.$$

$$\sin(\delta' - \delta) = \frac{R}{e} \frac{\cos \frac{t' + t}{2}}{\cos \frac{t' - t}{2}} \sin \delta' - \frac{Q}{e} \frac{\sin \frac{t' + t}{2}}{\cos \frac{t' - t}{2}} \sin \delta' - \frac{P}{e} \cos \delta'$$

$$\sin(t' - t) = \frac{R}{e} \frac{\sin t'}{\cos \delta} + \frac{Q}{e} \frac{\cos t'}{\cos \delta}$$

$$\frac{e'}{e} = \cos(\delta' - \delta) - \frac{R}{e} \frac{\cos \frac{t' + t}{2}}{\cos \frac{t' - t}{2}} \cos \delta' + \frac{Q}{e} \frac{\sin \frac{t' + t}{2}}{\cos \frac{t' - t}{2}} \cos \delta' - \frac{P}{e} \sin \delta',$$

wobei gesetzt ist:

$$R = r \cos \varphi \cos(L' - L)$$

$$Q = r \cos \varphi \sin(L' - L)$$

$$P = r \sin \varphi.$$

Abgesehen von dem kleinen Unterschied zwischen  $p$  und  $p'$  infolge Parallaxenwirkung haben hiernach

$$\frac{r \sin \varphi}{e} \cos \delta' \quad \text{und} \quad d\delta$$

in beiden Gleichungen denselben Faktor, so daß die Unkenntnis von  $d\delta$  die Bestimmung von  $r \sin \varphi$  verhindert.

Im allgemeinen ergeben sich daher aus den Beobachtungen eines Tages nur die Werte von

$$\frac{r \cos \varphi}{e}, \quad \left( \frac{r \sin \varphi}{e} \cos \delta' - d\delta \right), \quad \frac{Q}{e} \quad \text{und} \quad dt. \quad (8)$$

Mit Rücksicht auf die Relationen (8) S. 453 und infolge des geringen Betrages von  $(L' - L)$  läßt sich daher zwar  $(L' - L)$  für jede irgendwie gelegene Station finden — gewiß auch ein wertvolles Resultat\*) —, nicht aber  $r$  und  $\varphi$ .  $r$  kann nur für äquatoriale Stationen ermittelt werden, etwa innerhalb der Breitenzone von  $-10^\circ$  bis  $+10^\circ$ ,  $\varphi$  dagegen läßt sich überhaupt nicht ohne weiteres finden.

Was die Bestimmung von  $r$  für äquatoriale Stationen anlangt, so ist zu bemerken, daß man zwei Wege einschlagen kann. Man kann nämlich entweder  $d\delta$  als null ansehen, oder man kann  $\sin \varphi$  aus der geogr. Breite nach der ellipsoidischen Hypothese berechnen. Beide Wege dürften, wie man leicht sieht, ausreichen, um  $r$  aus  $r \cos \varphi$  und  $r \sin \varphi$  innerhalb der genannten Zone auf mindestens  $1/20000$  seines Wertes genau berechnen zu lassen, was mit Rücksicht auf die überhaupt erreichbare Genauigkeit genügt.

Wenn man aus den Beobachtungen auf einer einzigen Station  $\varphi$  bestimmen will (womit sich dann auch  $r$  findet) so kann dies in möglichster Strenge wohl nur durch das sehr komplizierte Verfahren gleichzeitiger Bestimmung neuer Mondtafeln aus den betreffenden Beobachtungen geschehen, indem in eine solche Bestimmung  $r \sin \varphi$  mit als Unbekannte aufgenommen wird.

Es giebt allerdings noch einen anderen, minder schwierigen Weg, der aber nicht ganz hypothesenfrei ist. Man denke sich für eine Anzahl Orte von nicht zu verschiedener Breite annähernd gleichzeitige Bestimmungen ausgeführt und die Unbekannten (8) berechnet. Bildet man nun die Werte

$$\frac{r \sin \varphi - r_0 \sin \varphi_0}{e} \cos \delta' - d\delta, \quad (9)$$

worin die  $r_0 \sin \varphi_0$  nach der ellipsoidischen Hypothese ermittelt sind, so wird das Mittel aller Werte (9) für diese Gruppe von Stationen einen Näherungswert für  $-d\delta$  allein geben. In ähnlicher doch umständlicherer Weise kann man  $d\delta$  überhaupt aus Beobachtungen an

\*) Allerdings gehören *sehr viele* Beobachtungstage dazu, um  $(L' - L)$  mit einiger Sicherheit zu gewinnen.

einer größeren Anzahl Stationen beliebiger Breite bestimmen, wobei als leitendes Prinzip zu gelten hat: die Abweichungen in  $r$  und  $\varphi$  von der ellipsoidischen Hypothese als zufällige anzusehen.

Den Gedanken, aus Mondbeobachtungen die Figur der Erde zu bestimmen, faßte nach *Todhunter, History of Attraction*, Bd. 1 S. 447 schon *Euler* und setzte ihn in der Abhandlung „*Versuch die Figur der Erde durch Beobachtung des Mondes zu bestimmen*“ auseinander (in den *Abhandlungen der bayer. Akademie der Wissenschaften* Bd. 5, 1768). *Euler* scheint sich auf die Diskussion von Meridianbeobachtungen beschränkt zu haben und gelangte damit zu keiner genügenden, ihn selbst befriedigenden Methode.

*Laplace* erwähnt in der *Méc. cél.* t. II, l. III, p. 97 nur mehr beiläufig, daß die Verschiedenheit des Radiusvektors für verschiedene Punkte der Erdoberfläche die Horizontalparallaxe des Mondes beeinflusse. Die Methode, aus dieser auf den Radiusvektor zu schließen, erörtert er nicht.

Dagegen widmet *H. Bruns* der Methode in seiner „Figur der Erde“ einige Worte. Er sagt aber, daß zur Zeit wegen der Ungenauigkeit der Beobachtung und der Theorie der Bewegung des Mondes an eine Benutzung der Methode nicht zu denken sei, daß aber jedenfalls aus der Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung bei den Sonnenfinsternissen und Bedeckungen von Fixsternen durch den Mond gefolgert werden könne, daß die radialen Anomalieen des Geoids einige Kilometer nicht überschreiten.

§ 4. Bestimmung des Äquatorialhalbmessers des Erdellipsoids aus der Mondparallaxe in Verbindung mit der Intensität der Schwere an der Erdoberfläche. Wäre die Meeresfläche eine zum Erdschwerpunkt konzentrische Kugelfläche vom Radius  $R$ , so hätten wir für die Beschleunigung  $g$  der Schwerkraft im Meeresniveau die einfache Formel

$$\frac{Mk^2}{R^2} = g, \quad (1)$$

worin  $M$  die Erdmasse und  $k^2$  die Beschleunigung ist, welche die Masse 1 der in der Entfernung 1 befindlichen Masse 1 erteilt.

Wäre ferner die Mondbahn eine Kreisbahn vom Radius  $\mathfrak{R}$ , so würde diese Bahn nur bestehen können, wenn die der Kreisbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit  $n$  entsprechende Zentrifugalbeschleunigung

$$\mathfrak{R} n^2$$

durch die gegenseitige Anziehung von Mond und Erde aufgehoben würde. Die Erde erteilt aber dem Mond die Beschleunigung

$$\frac{Mk^2}{\mathfrak{R}^2},$$

dagegen der Mond mit der Masse  $\mathfrak{M}$  der Erde die Beschleunigung

$$\frac{\mathfrak{M} k^2}{\mathfrak{R}^2},$$

folglich ist

$$\frac{(M + \mathfrak{M}) k^2}{\mathfrak{R}^2} = \mathfrak{R} n^2. \quad (2)$$

Die Vergleichung von (1) und (2) giebt unter Elimination von  $k^2$ :

$$R = g \left( 1 + \frac{\mathfrak{M}}{M} \right) \frac{\sin^2 p}{\mathfrak{n}^2}, \quad (3)$$

worin der Quotient  $R : \mathfrak{R}$ , der Sinus der Horizontalparallaxe des Mondes, mit  $\sin p$  bezeichnet ist:

$$\sin p = \frac{R}{\mathfrak{R}}. \quad (3^*)$$

Ganz so einfach ist die Bestimmung des Erdradius nun allerdings nicht.

Was zunächst die Formel (1) anlangt, so ist sie durch die genauere Formel (7) § 15 S. 83 im 2. Kapitel zu ersetzen, wobei der Meeresfläche ein Normalsphäroid, also jedenfalls sehr nahe ein Rotationsellipsoid, substituiert ist. Dies ist zwar noch nicht streng, aber die einzige zur Zeit erreichbare Annäherung. Indem wir für  $g$  die Formel annehmen:

$$g = g_a (1 + \mathfrak{b} \sin^2 B) \quad (4)$$

und mit  $\mathfrak{r}$  das Verhältniß der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator bezeichnen, wird damit in völlig ausreichender Annäherung:

$$\frac{Mk^2}{a_0^2} = \frac{g_a}{1 - \mathfrak{b} + \mathfrak{r}}, \quad (5)$$

$a_0$  Äquatorialhalbmesser. Für die Anwendung ist es vorteilhaft, nicht den von  $\mathfrak{b}$  abhängigen Wert  $g_a$ , sondern den Mittelwert der  $g$ -Werte im Sinne der Kugelfunktionen:

$$G = g_a \left( 1 + \frac{\mathfrak{b}}{3} \right), \quad (4^*)$$

einzuführen. Es geht damit (5) über in:

$$\frac{Mk^2}{a_0^2} = \frac{G}{\left( 1 + \frac{\mathfrak{b}}{3} \right) (1 - \mathfrak{b} + \mathfrak{r})},$$

woraus wir  $\mathfrak{b}$  mittelst des *Clairautschen* Theorems

$$\mathfrak{b} = \frac{5}{2} \mathfrak{r} - \mathfrak{a}$$

eliminieren und die hier ausreichende Näherungsformel erhalten:

$$\frac{Mk^2}{a_0^2} = \frac{G}{1 + 2 \frac{\mathfrak{a} - \mathfrak{r}}{3}}. \quad (6)$$

Bezüglich der Formel (2) ist zu bemerken, daß sie auch noch für die elliptische Mondbewegung richtig bleibt, wenn  $\mathfrak{R}$  die halbe große Axe der Mondbahn und  $\mathfrak{n}$  die mittlere Winkelgeschwindigkeit (Geschwindigkeit der mittleren Anomalie) bezeichnet. Allein man muß nun noch dem Umstande Rechnung tragen, daß auch die Sonne

die Mondbewegung beeinflusst und zwar außer periodischen Änderungen gewissermaßen eine Verminderung der gegenseitigen Anziehung von Mond und Erde um  $1/358$  erzeugt\*).

Denken wir uns, um letztgenannte Verminderung abzuleiten,

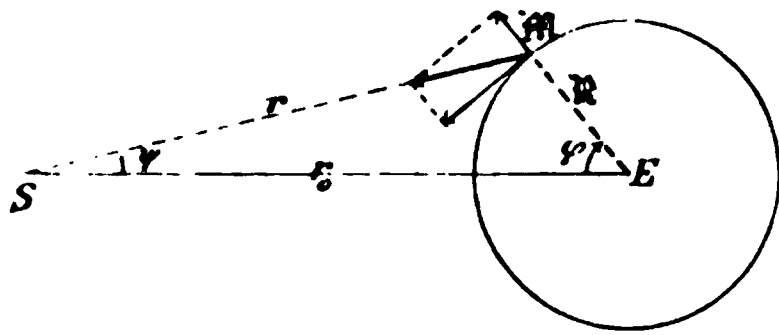


Fig. 78.

im Anschluß an Fig. 78 die als kreisförmig betrachtete Mondbahn in der Ekliptik liegend, so erteilt die Anziehung der Sonne  $S$  der Erde  $E$  die Beschleunigung

$$k^2 \frac{S}{r_0^2} \quad (7)$$

in Richtung  $ES$ , dagegen dem Monde  $M$  die Beschleunigung

$$k^2 \frac{S}{r^2} \quad (8)$$

in Richtung  $MS$ . Denken wir uns ferner die Erde festgehalten, da es auf die zur Erde relative Mondbewegung ankommt, so ist die Beschleunigung (7) dem Monde in entgegengesetzter Richtung, also parallel  $SE$  wirkend, zu erteilen. Wir zerlegen diese Beschleunigung sowie (8) radial und tangential und erhalten als radial nach außen, in Richtung  $EM$ , wirkende Komponente:

$$k^2 \left\{ \frac{S}{r^2} \cos(\varphi + \psi) - \frac{S}{r_0^2} \cos \varphi \right\},$$

oder für  $r \cos \psi = r_0 - \Re \cos \varphi$ :

$$k^2 \frac{S}{r_0^2} \left\{ \frac{\cos^2 \psi \cos(\varphi + \psi)}{\left(1 - \frac{\Re}{r_0} \cos \varphi\right)^2} - \cos \varphi \right\}. \quad (9)$$

Indem wir die 2. Potenz von  $\frac{\Re}{r_0}$  vernachlässigen, setzen wir hierin

$$\sin \psi = \frac{\Re}{r_0} \sin \varphi, \quad \cos \psi = 1$$

und gelangen für die in Rede stehende Komponente zu dem Ausdruck:

$$k^2 S \frac{\Re}{r_0^3} \cos^2 \varphi (2 - \tan^2 \varphi).$$

Hiervon haben wir den Durchschnittswert für alle Werte von  $\varphi = \text{null}$  bis  $2\pi$  zu bilden, also unter einfacher Transformation des letzten Ausdruckes den Wert:

$$k^2 S \frac{\Re}{r_0^3} \int_0^{2\pi} (3 \cos^2 \varphi - 1) d\varphi : \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

\*) Nachstehende Entwicklung ist mit teilweiser Benutzung von *Bohnenberger, Astronomie*, Tübingen 1811, § 308 S. 545 gegeben. Übrigens kannte schon *Newton* den betr. Einfluß der Sonne.

Derselbe ist gleich  $k^2 S \frac{\mathfrak{R}}{2r_0^3} \cdot$  (10)

Nun ist aber, abgesehen von dem geringen Einfluß der Erdmasse,  $k^2 S : r_0^2 = n^2 r_0$ , wenn  $n$  die Winkelgeschwindigkeit bei der Erdbewegung um die Sonne ist; damit geht (10) über in

$$\frac{1}{2} \mathfrak{R} n^2. \quad (10^*)$$

Dieses ist der rechten Seite von Gleichung (2) hinzuzufügen, womit diese in

$$\frac{(M + \mathfrak{M}) k^2}{\mathfrak{R}^2} = \mathfrak{R} \left( n^2 + \frac{1}{2} n^2 \right) \quad (11)$$

übergeht. Die tangentielle Komponente der Beschleunigungen giebt im Mittel für  $\varphi = \text{null}$  bis  $2\pi$  den Wert null. Sie ist somit einflußlos.

Aus (11) und (6) folgt jetzt unter Elimination von  $k^2$  als Ersatz der Gleichung (3):

$$a_0 = G \left( 1 + \frac{\mathfrak{M}}{M} \right) \frac{\sin^3 p}{n^2 \left( 1 + \frac{n^2}{2n^2} \right) \left( 1 + \frac{2}{3} [\mathfrak{a} - \mathfrak{r}] \right)}, \quad (12)$$

mit dem Sinus der Äquatorialhorizontalparallaxe des Mondes:

$$\sin p = \frac{a_0}{\mathfrak{R}}. \quad (12^*)$$

Die Formel (12) ist auch noch nicht völlig streng, weil die zu grunde gelegte Formel (11) einer nur rohen Theorie der Mondbewegung entnommen ist. Aber sie gewährt mit Rücksicht auf die Genauigkeit der Bestimmung von  $p$  aus Beobachtungen eine völlig genügende Schärfe.

§ 5. Fortsetzung: Zahlwerte. Aus den im 2. Kap. S. 85 und 83 angegebenen Formeln für die Schwerebeschleunigung:

und  $g = 9,7800 (1 + 0,00531 \sin^2 B)$  mit  $\mathfrak{a} = 1/299,26$   
 $g = 9,7806 (1 + 0,0052 \sin^2 B)$  mit  $\mathfrak{a} = 1/259,76$

folgt bzw. der Mittelwert:

$$G = 9,7800 \left( 1 + \frac{0,00531}{3} \right) = 9,7973 \quad (1)$$

und

$$G = 9,7806 \left( 1 + \frac{0,0052}{3} \right) = 9,7975. \quad (1^*)$$

Ferner hat man (vergl. 5. Kap. S. 384 und 433) für das Verhältnis der Mondmasse zur Erdmasse

$$\frac{\mathfrak{M}}{M} = \frac{1}{81,25}$$

und also

$$\log \left( 1 + \frac{\mathfrak{M}}{M} \right) = \log \frac{82,25}{81,25} = 0,005313. \quad (2)$$



Für die Horizontal-Äquatorial-Parallaxe  $p$  liegen mehrere Bestimmungen vor. Nach *Olufsens* Berechnung der 1751—53 auf dem *Kap der guten Hoffnung* und mehreren europäischen Sternwarten angestellten 59 korrespondierenden Mondbeobachtungen (Meridianzenithdistanzen) ist

$$\text{arc } p = 0,01651233 + 0,02449201 \alpha, \quad (3)$$

und zwar nach *Hansen* mit einem mittleren Fehler in  $p$  von  $\pm 0,52''^*$ . Die von *Olufsen* willkürlich gelassene Abplattung  $\alpha$  setzen wir nach *Bessel* sowie nach dem 2. Kap. S. 84 (5) an und erhalten bezw. für

$$\begin{aligned} \alpha &= 1/299,15 & p &= 3422,80'' \\ \alpha &= 1/289,76 & p &= 3423,35''^{**}. \end{aligned} \quad (3^*)$$

Nach den neueren Berechnungen von *Breen* und von *Stone* ist nahezu übereinstimmend

$$\begin{aligned} p &= 3422,82'', \\ \log \sin p &= 8,219939 - 10. \end{aligned} \quad (4)$$

Die hierbei angewandte Abplattung ist uns unbekannt, wahrscheinlich ist aber die *Besselsche* oder eine nur wenig grössere angewandt. Infolge der Übereinstimmung der Beobachtungsstationen mit denen der älteren Berechnung läßt sich eventuell der Einfluß des für  $\alpha$  eingeführten Wertes auf (4) nach den unter (3\*) gegebenen Zahlen beurteilen\*\*\*).

Für die Winkelgeschwindigkeit  $n$  der Bewegung des Mondes um die Erde haben wir, da die siderische Umlaufszeit des Mondes 27,321661 mittlere Tage oder 2360592 Sekunden mittlerer Zeit beträgt, den Wert

$$n = \frac{2\pi}{2\,360\,592}, \quad \log \frac{1}{n} = 5,574841. \quad (5)$$

Für das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeit  $n$  der Bewegung der Erde um die Sonne zu  $n$  haben wir den Wert

$$\begin{aligned} \frac{n}{n} &= \frac{27,32166}{365,256} \quad \text{also} \quad \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{357,45} \\ \text{und} \quad \log \left( 1 + \frac{n^2}{2n^2} \right) &= 0,001213. \end{aligned} \quad (6)$$

\*) *Olufsens* Abhandlung findet sich in Bd. 14 (1837) der *Astronom. Nachr.* Nr. 326, S. 209—226, vergl. insbesondere S. 226. *Hansens* Angabe findet sich in Bd. 17 (1840) Nr. 403 S. 299. Nach *Hansen* entspricht der aus (3) folgende Wert dem konstanten Teil (d. i. Mittelwert) des Sinus der Parallaxe; zum Übergang auf den konstanten Teil von  $p$  selbst ist (vergl. nachstehende Abhandlung von *Newcomb* S. 80),  $+ 0,16''$  hinzuzufügen.

\*\*) Strenggenommen ist also diesen Zahlen noch  $+ 0,16''$  hinzuzufügen.

\*\*\*) Wir entnehmen den Zahlwert (4) von S. 79 des Bds. 1 der *Astronomical papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac under the direction of Simon Newcomb*. Washington 1882.

Die Abhandlungen von *Breen* und *Stone* sind in den *Memoirs of the Royal Astronom. Society* Bd. 32 und 34 (etwa 1864) erschienen, konnten aber nicht nachgesehen werden.

Endlich ist, vergl. 2. Kap. S. 84 (2\*), für

$$\begin{aligned} \text{und} \quad \tau &= 1/288,41 = 0,0034672 \\ \alpha &= 1/299,15 = 0,0033428 \end{aligned}$$

$$\log \left( 1 + \frac{2}{3} [\alpha - \tau] \right) = 9,999964 - 10, \quad (7)$$

dagegen für

$$\begin{aligned} \alpha &= 1/289,76 = 0,0034511 \\ \log \left( 1 + \frac{2}{3} [\alpha - \tau] \right) &= 9,999995 - 10. \quad (7^*) \end{aligned}$$

Mit den Werten (1), (2), (4), (5), (6) und (7) giebt die Formel (12) des vorigen Paragraphen:

$$\log a_0 = 6,804741 \quad a_0 = 6378830, \quad (8)$$

dagegen mit den Werten (1\*), (2), (3\*) 2. Zeile, (5), (6) und (7\*):

$$\log a_0 = 6,804920 \quad a_0 = 6381460. \quad (8^*)$$

*Bessel* fand  $a_0 = 6377397$  mit  $\alpha = 1/299,15$ , vergleichbar mit (8);  
*Klein* fand\*)  $a_0 = 6378740$  für  $\alpha = 1/289$ , vergleichbar mit (8\*).

Vorstehende Berechnung weist also, wenn man den Unterschied der vergleichbaren Werte von  $a_0$  immer nur in einer Ursache allein suchen wollte, entweder auf eine *Vergrößerung von  $a_0$*  hin, wie es die Gradmessungen geben, um ca.  $1/3000$  seines Betrages gleich rund  $2^{km}$ , oder auf eine *Verminderung der Äquatorial-Horizontal-Parallaxe* des Mondes, wie ihn die korrespondierenden Beobachtungen nach (3\*) bzw. (4) geben, um ca.  $1/9000$  ihres Betrages gleich rund  $1/3''$ . Letzteres ist mit Rücksicht auf nachfolgende Anmerkung nicht unwahrscheinlich.

Wollte man die Werte  $a_0$  in (8) und (8\*) durch Änderung der Mondmasse verkleinern, so müßte  $M : M$  etwa gleich  $1/83$  gesetzt werden, welcher Wert aber wenig wahrscheinlich ist.

Es ist hier noch zu erwähnen, daß nach *Hansens* Ermittlungen von 1856 der Mondschwerpunkt um 0,0001544 weiter entfernt ist, als der Mittelpunkt der Figur. (Wir citieren hier nach *Wolff*, *Handbuch der Math., Physik, Geodäsie und Astronomie*, 2. Bd., 1872 S. 200, da uns die Originalabhandlung in den *Memoirs of the Royal Astronom. Soc.* Bd. 24 1856 nicht zur Hand ist. Nur die Zahl 0,0001544 haben wir der im nächsten Paragraphen zu erwähnenden Abhandlung *Hansens* von 1864 S. 175 entlehnt.) Der aus den Mondbeobachtungen ermittelte Wert von  $p$ , welcher sich auf den Mittelpunkt bezieht, ist demgemäß um  $0,52''$  zu verkleinern, ehe er zur Berechnung von  $a_0$  verwandt werden darf. Bei *Olufsens* Werten (3\*) ist diese Korrektion sicher nicht angebracht, vielleicht aber bei dem Werte (4). Nach Anbringung dieser wohl noch nicht ganz sicher konstatierten Korrektion und der in der Anm. zu (3) erwähnten, entgegengesetzt fallenden Korrektion von  $+0,16''$  wird  $a_0$  in (8) etwa  $600'''$  kleiner

\*) Bd. 1 S. 18.

als *Bessels*  $a_0$ , während  $a_0$  in (8\*) dann *Kleins*  $a_0$  um einen nur wenig gröfseren Betrag überschreitet.

Die Beziehung zwischen der Bewegung des Mondes um die Erde und der Schwerkraft an der Erdoberfläche gab bekanntlich *Newton* in der 2. Hälfte des 17. Jahrhunderts das Fundament für sein Gravitationsgesetz. Etwa 100 Jahre später hatte *Lambert* die Idee, mittelst derselben Beziehung unter Voraussetzung der Gültigkeit des inzwischen anderweit geprüften *Newtonschen* Gesetzes aus den Dimensionen der Erde und der Schwerkraft an ihrer Oberfläche auf die Mondparallaxe zu schliessen (nach *Seidels* Angabe 1859 im 50. Bde. der *Astronom. Nachr.* No. 1193 S. 264); doch hat er anscheinend darüber nichts publiziert. *Laplace* berechnet aber in der That auf diese Weise 1799 die Mondparallaxe in der *Méc. cél.* t. I p. 118—120, auf grund eingehenderer Behandlung der Mondbewegung aber 1802 t. III p. 247—248.

Auch *Hansen* leitet die Mondparallaxe in derselben Weise 1840 ab in den *Astronom. Nachr.* Bd. 17 No. 403 S. 297—299 (oder Abhandlungen der *math. phys. Cl. der kön. sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig* 1864 6. B., S. 415), ebenso *Adams* in den *Monthly Notices of the Royal Astronom. Soc.*, Vol. 13 und im *British Nautical Almanac for 1856*. Beide wenden  $a_0$  nach *Bessel*, aber etwas verschiedene Werte für  $G$  und  $\mu$  an und finden nach der Reduktion von *Newcomb* auf gleiche Daten mit *Hansen* (a. oben a. O. S. 79) nahezu übereinstimmend 3422,27". Mit denselben Daten giebt Formel (12) des vorigen Paragraphen 3422,31; die unwesentliche Differenz beruht fast ausschliesslich auf der genaueren Berücksichtigung der Mondbewegung bei *Hansen-Adams*. Mit unseren Daten vergrößern sich vorstehende Werte der Parallaxe um + 0,19", also auf rund 3422,5".

[Eine sehr merkwürdige Abhandlung von *Fr. Unferdinger* enthält, wie bei dieser Gelegenheit erwähnt sei, *Grunerts Archiv der Mathematik* 1869 Bd. 49, S. 309—331, im Anschluß an Abhandlungen desselben Verfassers in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie der Wiss. von 1863/64. Verf. will hier aus der Formel für die Länge des Sekundenpendels im Meeresniveau allein (also nicht etwa unter Zuziehung der Mondparallaxe) die Größe der Erde bestimmen. Dieses unmögliche Vorhaben gelingt auch durch Trugschlüsse und Zirkelrechnungen.]

§ 6. Bestimmung der Differenz  $MK$  der Hauptträgheitsmomente der Erde sowie der Abplattung der Erde aus der Mondbewegung. Im 2. Kap. § 15 S. 83 (6) sind wir zu der bis zu Gliedern der Ordnung  $\alpha^2$  einschliesslich genauen Formel gelangt

$$\alpha = \frac{3K}{2a_0^2} (1 + \alpha) + \frac{\tau}{2} \left(1 - \frac{3}{2}\tau\right) - \frac{1}{7}\mathfrak{D}, \quad (1)$$

worin  $MK$  die Differenz der Trägheitsmomente  $C - \frac{1}{2}(A + B)$ ,  $M$  die Erdmasse,  $a_0$  den Äquatorialhalbmesser und  $\alpha$  die Abplattung eines dem Geoid angepassten Normalsphäroids, endlich  $\tau$  das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator bezeichnet.

Nach § 16 S. 84 ist jedenfalls ausreichend genau

$$\tau = 0,0034672. \quad (2)$$

Was  $\mathfrak{D}$  anlangt, so nehmen wir dasselbe nach S. 91 (3\*) so an, dass

das Normalsphäroid bis auf Bruchteile des Radiusvektors von der Ordnung  $\alpha^2$  einschließlic genau ein Rotationsellipsoid (das Erdellipsoid) ist, nehmen also, indem hierbei  $b = \frac{3}{2} \alpha$  gesetzt werden kann:

$$b = \alpha^2. \quad (3)$$

Die Formel (1), in welcher nunmehr nur 2 Unbekannte,  $\alpha$  und  $K$ , auftreten, gestattet  $\alpha$  zu berechnen, wenn  $K$  anderweit ermittelt ist. Zu diesem Zweck hat zuerst *Laplace* diese Formel in der Abkürzung

$$\alpha = \frac{3K}{2a_0^2} + \frac{\epsilon}{2} \quad (4)$$

oder

$$K = \frac{2}{3} a_0^2 \left( \alpha - \frac{\epsilon}{2} \right) \quad (5)$$

aufgestellt. Er zeigte zugleich, daß man  $K$  aus der Mondbewegung ermitteln könne. Derselbe Umstand nämlich, welcher die Präzession und Nutation erzeugt, also nach den §§ 18 bis 20 in dem 5. Kap. die Ungleichheit von  $C$  und  $\frac{1}{2}(A + B)$ , infolge welcher die Richtung der Resultante der gegenseitigen Anziehung von Mond und Erde zum Erdschwerpunkt exzentrisch ist, bewirkt auch kleine Störungen in der Mondbewegung, welche somit von  $K$  abhängen.

Von den betreffenden Störungsgliedern sind nur zwei groß genug, um mit einiger Sicherheit auf  $K$  einen Schluß zu gestatten. In der Länge des Mondes bemerkte bereits *Tob. Mayer*, welcher 1767 eine Theorie der Mondbewegung ohne Rücksicht auf die elliptische Erdgestalt aufgestellt hatte, empirisch ein periodisches Glied, welches er theoretisch nicht zu erklären vermochte. Nachdem der Koeffizient inzwischen genauer ermittelt worden war, gelang es dem Verfasser der *Méc. cél.* dieses Störungsglied aus der elliptischen Gestalt der Erde zu erklären und zugleich ein anderes Störungsglied derselben Art in der Mondbreite anzuzeigen. Mit Hilfe der von *Bürg* aus Greenwicher Beobachtungen gefundenen Werte der Koeffizienten dieser Glieder leitete *Laplace* 1802 in der *Méc. cél.* t. III p. 282 und 285 die Abplattung der Erde zu

$$1/304,6 \text{ und } 1/305,05$$

aus der Breiten- bzw. Längenstörung ab\*).

Nachdem *Laplace* später in einer Abhandlung einen etwas größeren Wert und *Bürg* (um 1833) in den *Astronom. Nachr.* Nr. 73 aus der Breitenstörung und der Längenstörung die Abplattung bzw. zu

$$1/295 \text{ und } 1/294$$

\*) Man vergl. auch *Méc. cél.* t. III p. 173—174 oder *Bohnenberger, Astronomie*, Tübingen 1811, S. 589—591.

berechnet hatten, gelangte um die Mitte dieses Jahrhunderts *Hansen* an der Hand seiner neuen großartigen Theorie der Mondaufbewegung auch zu einer Neubestimmung der Abplattung.\*) Auch *Hansen* bestimmt die Koeffizienten der beiden Störungsglieder empirisch, scheint aber den Koeffizienten der Breitenstörung für sicherer zu halten, denn er leitet nur aus ihm  $\alpha$  ab zu

$$1/296 \cdot$$

Da es unmöglich angeht, hier eine Darstellung der Theorie zu geben, begnügen wir uns die Resultate mitzuteilen. Nach *Laplace*, *Méc. cél.* t. III. p. 251 u., p. 255 u. und 254 u. (hier bedarf es erst noch einer Integration) lauten die betreffenden Störungsglieder in *Laplace*'s Bezeichnungen, wobei wir nur  $\varepsilon$  für  $\lambda$  geschrieben haben und zur Abkürzung mit Benutzung des *Hansenschen* Symbols  $\lambda_1$  setzen:

$$\lambda_1 = - \frac{\alpha \varphi - \frac{1}{2} \alpha \varphi}{g - 1} \cdot \frac{D^2}{a^2} \sin \varepsilon \cos \varepsilon, \quad (6)$$

$$\text{in Breite: } \lambda_1 \sin f\nu \quad (7)$$

$$\text{in Länge: } \frac{19}{2} \gamma \lambda_1 \sin (g\nu - f\nu - \Theta) \quad (8)$$

$$\text{in Länge in der Bahn: } 10 \gamma \lambda_1 \sin (g\nu - f\nu - \Theta), \quad (9)$$

und zwar ist

$\alpha \varphi$  die Abplattung  $\alpha$ ,

$\alpha \varphi$  die Konstante  $\tau$  der Zentrifugalkraft,

$D$  der Äquatorialradius  $a_0$ ,

$a$  die halbe große Axe der Mondaufbahn,

$\varepsilon$  die Schiefe der Ekliptik,

$\gamma$  die Neigung der Mondaufbahn zur Ekliptik,

$f\nu$  die Länge des Mondes,

$\Theta = g\nu + f\nu$  die Länge des aufsteigenden Knotens der Mondaufbahn,

$(g - 1)\nu$  die retrograde Knotenbewegung in der Zeit, wo der auf die Ekliptik projizierte Radiusvektor Erde-Mond den Winkel  $\nu$  durchläuft.

Die Längen sind hierbei von dem Frühlingspunkt aus wie gewöhnlich in der Ekliptik gezählt und unter Länge in der Bahn, für welche wir die Störung behufs Vergleichung mit *Hansen* aufgenommen

\*) Über diese Theorie sind zu vergleichen die Mondtafeln mit Einleitung, die wir leider nicht zur Hand hatten und zwei Abhandlungen in den *Abh. der mathem.-physischen Cl. der kön. sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig* 1864 u. 1865, betitelt: *Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen von P. A. Hansen.*

haben, die Länge des aufsteigenden Knotens vermehrt um den in der Bahn des Mondes gemessenen Winkel vom Knoten bis zum Mond verstanden.\*)

Für *Hansens* Theorie ist im allgemeinen zu vergleichen die Einleitung zu seiner 1. Abh. (1864) S. 93—101, sowie für die in Rede stehenden Störungen ebenda § 11 S. 459—474. Die Formel für  $s$  S. 465, Schluß vom Abschn. 154, giebt die Breitenstörung, diejenige für  $\delta z$  S. 468 die Störung der Länge in der Bahn (vergl. auch S. 102). Darnach ist, wenn gesetzt wird

$$\lambda_1 = - \frac{3K}{4a^2} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \left( 1 - 4 \sin^2 \frac{1}{2} J \right)^2 \frac{(\alpha + \eta - p)}{(\alpha + \eta - p)}, \quad (10)$$

das größte Glied der Störung

$$\text{in Breite: } \lambda_1 \sin (f + \omega - \Theta) \quad (11)$$

$$\text{in Länge in der Bahn: } 20 \sin \frac{J}{2} \left( 1 + \frac{3}{2} \sin^2 \frac{J}{2} \right) \left( 1 - \frac{\alpha + \eta - p}{2} \right) \lambda_1 \sin \Theta, \quad (12)$$

worin bezeichnen:

$K$  den Quotienten  $\left( C - \frac{A+B}{2} \right) : M$ ,

$a$  die halbe große Axe der Mondbahn,

$\varepsilon$  die Schiefe der Ekliptik,

$J$  die Neigung der Mondbahn zur Ekliptik,

$f + \omega - \Theta$  die Länge des Mondes in seiner Bahn,

$\Theta$  das Supplement der Länge des aufsteigenden Mondknotens,

$\alpha + \eta - p$  das *Laplacesche* Symbol  $g - 1$ , nur ist dieses *ohne* Rücksicht auf die Präzession des Frühlingspunktes (siderisch), jenes *mit* Rücksicht darauf (tropisch), verstanden.

In der Abhandlung von 1864 § 14 S. 481—497 insbesondere S. 494 (vergl. auch S. 120 Abschn. 15) zeigt *Hansen*, daß auch die Einwirkung der Planeten (namentlich durch Änderung der Schiefe der Ekliptik) Störungsglieder erzeugt, die für Breite und Länge bezw. von den Argumenten  $f + \omega - \Theta$  und  $\Theta$  abhängen. Der Betrag der Koeffizienten dieser Glieder wird theoretisch abgeleitet; die Glieder lauten danach:

$$\text{in Breite: } - 0,240'' \sin (f + \omega - \Theta) \quad (13)$$

$$\text{in Länge in der Bahn: } - 0,061'' \sin \Theta. \quad (14)$$

\*) Die Ableitung der *Laplaceschen* Formeln ist nicht gerade schwierig, erfordert aber immerhin einen größeren Raum. Zunächst sind die drei Grundformeln ( $L$ ) in der *Méc. cél.* t. III p. 181 herzuleiten; dann kann man die Entwicklungen p. 250—257 ziemlich rasch erhalten, wenn man, von einer genaueren Theorie im allgemeinen absehend, die Mondbewegung als in einer mobilen Kreisbahn verlaufend annimmt. Freilich zeigt die *Hansensche* Theorie, daß die Formeln (7) bis (9) nicht genügen, hauptsächlich wegen vernachlässigter Glieder höherer Ordnung und Planetenstörungen.

Werden nun empirisch die Koeffizienten von  $\sin(f + \omega - \Theta)$  und  $\sin \Theta$  bestimmt, so muß  $-0,240$  bzw.  $-0,061$  zunächst abgezogen werden, ehe man dieselben der Einwirkung der Erdatplattung zuschreiben kann. *Laplace* kannte diese kleinen Glieder noch nicht, ebenso wenig die Einflüsse höherer Ordnung, die *Hansen* 1865 darlegte.

§ 7. Fortsetzung: Zahlwerte und *Hansens* Angaben von 1865. Wir haben folgende Zahlwerte:

$$\begin{aligned} J &= 5^\circ 8' 48'' \text{ Abh. 1864 S. 173,} \\ \varepsilon &= 23^\circ 27' 55'' \text{ „ 1865 S. 275,} \\ a &= a_0 \csc 57' \text{ „ 1864 S. 471 und 473,} \\ \alpha + \eta - p &= 0,0040531 \text{ „ 1865 S. 282.} \end{aligned}$$

Da  $\alpha + \eta$  nach Abh. 1864 S. 348 jährlich  $69677''$ ,  $p$  aber, welches von der allgemeinen Präzession abhängt, jährlich nur  $50,2''$  giebt, so hat für den vorliegenden Zweck  $\alpha + \eta - p$  denselben Wert, wie  $\alpha + \eta$  oder  $g - 1$  nach *Laplace*.

Wenn man ferner beachtet, daß  $\alpha \varphi - \frac{1}{2} \alpha \varphi$  bei *Laplace* mit  $\alpha - \frac{\varepsilon}{2}$  identisch ist und somit nach (5) des vorigen Paragraphen sehr nahe mit  $\frac{3}{2} K : a_0^2$  übereinstimmt, so erkennt man leicht, daß die analytischen Ausdrücke der Koeffizienten in den Formeln (6) bis (9) von *Laplace* mit den entsprechenden der Formeln (10) bis (12) von *Hansen* immerhin bis auf weniger als 1 Prozent übereinstimmen.

Wichtiger als die Verbesserung der Formeln durch *Hansen* ist der von ihm erzielte Nachweis der Planetenstörungen gleichen Arguments (s. o.) und die Berechnung des Einflusses der Glieder höherer Ordnung in der Abhandlung von 1865 § 21 S. 273—322. Dieser Einfluß wird nicht analytisch, sondern numerisch entwickelt.

*Hansen* geht hierbei von dem Näherungswert für  $K : a_0^2$  aus, den die Gleichung (10) des vorigen Paragraphen liefert. Aus den Beobachtungen hatte *Hansen* gefunden:

$$\lambda_1 = -8,382; \text{ Abh. 1864 S. 470.}$$

in Sek.

Wendet man nun obenstehende Zahlwerte an, so folgt hiermit:

$$\varphi'' \frac{K}{a_0^2} = 0,06238''.$$

Dies ist unerheblich verschieden von  $0,0624$  und *Hansen* berechnet daher nun die Störungen, die alle dem Wert  $K : a_0^2$  proportional sind, genauer mit Rücksicht auf höhere Glieder unter Anwendung von

$$\varphi'' \frac{K}{a_0^2} = 0,0624 (1 + \mu), \quad (1)$$

wobei  $\mu$  einen Korrektionsfaktor bezeichnet.



Es findet sich nunmehr das Störungsglied in Breite nach Abh. 1865 S. 285 gleich

$$- 8,618'' (1 + \mu) \sin (f + \omega - \Theta), \quad (2)$$

wogegen die Beobachtungen ergeben haben nach Abh. 1864 S. 470

$$- 8,382'' \sin (f + \omega - \Theta); \quad (3)$$

folglich wird

$$1 + \mu = \frac{8,382}{8,618}, \quad \mu = - 0,02738$$

und somit, vergl. auch 1865 S. 290:

$$\varrho'' \frac{K}{a_0^2} = 0,06069'', \quad \frac{K}{a_0^2} = 0,001070. \quad (4)$$

Nach Maßgabe des Ausdrucks (12) des vorigen Paragraphen hatte *Hansen* 1864 S. 469—470 mit  $\lambda_1 = - 8,382''$  als Störung der Länge in der Bahn abgeleitet

$$- 7,533'' \sin \Theta,$$

was man leicht verifizieren kann. Die Beobachtungen dagegen gaben ihm

$$- 7,624'' \sin \Theta. \quad (5)$$

Durch die genauere Rechnung von 1865 gestaltet sich der Widerspruch etwas anders. Nach S. 290 und 297 wird unter Anwendung des Wertes (4) für  $\varrho'' K : a_0^2$  das Störungsglied

$$- 7,400'' \sin \Theta. \quad (6)$$

Um diesen Wert mit dem beobachteten Koeffizientenwert in Übereinstimmung zu bringen, ist zu setzen

$$\frac{K}{a_0^2} = 0,001070 \cdot \frac{7,624}{7,400} = 0,001103. \quad (7)$$

*Hansen* benutzt nur den Wert (4), wahrscheinlich weil er diesen Wert für wesentlich genauer hält. In der That hat auch das Glied (3) eine weit kleinere Periode als (5), nämlich eine etwa 27-tägige, dieses eine etwa 19-jährige.

Man kann daher den ersten Koeffizienten aus einer gegebenen Beobachtungsreihe öfter als den zweiten bestimmen. Zwar wird dies völlig ausgeglichen durch die größere Anzahl der Beobachtungen für eine Bestimmung im zweiten Falle, wie die Ausgleichungsrechnung lehrt. Immerhin aber bleibt der Übelstand, daß ein Koeffizient eines Gliedes von langer Periode sich leichter mit Koeffizienten von Gliedern ähnlicher Periode mischt, falls der Zeitraum des vorliegenden Beobachtungsmaterials nicht sehr vielmal die Zeitdauer der Periode überschreitet. Für die Längenstörung wird in der That die Periode von 19 Jahren nur wenige Male von dem Zeitraum der brauchbaren



Beobachtungen umfaßt. *Hansen* wird vielleicht diesen Grund gehabt haben, den Wert (4) vorzuziehen. Wir wollen indessen auch (7) beibehalten und das Mittel nehmen.

Mit Rücksicht auf (1), (2) und (3) des § 6 wird

$$\alpha = \frac{3K}{2a_0^2} (1 + \alpha) - \frac{\alpha^2}{7} + 0,0017246. \quad (8)$$

Für

$$\begin{aligned} \frac{K}{a_0^2} = 0,001070 \text{ folgt } \alpha &= 0,0033333 = 1/300,00 \\ \frac{K}{a_0^2} = 0,001103 \quad „ \quad \alpha &= 0,0033830 = 1/295,76, \end{aligned} \quad (9)$$

im Mittel für

$$\frac{K}{a_0^2} = 0,0010865 \text{ folgt } \alpha = 0,0033582 = 1/297,78. \quad (10)$$

Hiernach ist es wenig wahrscheinlich, daß (2. Kap. S. 84)  $\alpha = 1/269,76$  ist. Denn dazu würde gehören

$$\frac{K}{a_0^2} = 0,0011484, \quad (10^*)$$

und die Koeffizienten der Störungsglieder in Breite und Länge in der Bahn würden werden (insoweit sie von der Erde herrühren):

$$- 9,00'' \text{ bzw. } - 7,94'', \quad (11)$$

während sie nach *Hansen* betragen:

$$- 8,38 \text{ bzw. } - 7,62. \quad (12)$$

*Laplace* nahm in der *Méc. cél.* nach *Bürgs* erster Bestimmung für Breite und Länge bzw.  $- 8,00$  und  $- 6,80$  an; wenn wir hieran noch den Einfluß der entsprechenden Störungen durch die Planeten abbringen und den Koeffizienten  $6,80$  für die Länge durch Multiplikation mit  $20:19$  auf die Länge in der Bahn reduzieren, so ergibt sich

$$- 7,76'' \text{ bzw. } - 7,10''. \quad (13)$$

Dies weicht allerdings noch stark von *Hansens* Werten ab, aber schon die zweite Bestimmung der Koeffizienten durch *Bürg* paßt gut mit *Hansen*. Die Koeffizienten werden (nach den Näherungsformeln (5) S. 467 und (6) bis (8) S. 468 rückwärts aus den Abplattungswerten berechnet, da uns der betr. Bd. der *Astronom. Nachr.* nicht zur Hand ist)  $- 8,5$  und  $- 7,7$  oder mit Rücksicht auf die von *Bürg* jedenfalls noch nicht berücksichtigten Anteile der Planetenwirkung:

$$- 8,2'' \text{ bzw. } - 7,6''. \quad (14)$$

Man erkennt hieraus, daß *Bürg* den *Hansenschen* Werten (12) der Koeffizienten schon sehr nahe gekommen ist. Wenn letztere sich durch genauere Bestimmung nun auch noch ändern können, so ist

es doch höchst unwahrscheinlich, daß der Koeffizient der Breitenstörung, anstatt 8,38 nach (12), gleich 9,00 nach (11) sei. Wir möchten vielmehr die Unsicherheit des Koeffizienten 8,38 nur auf höchstens 0,2' taxieren und den entsprechenden Fehler in  $\mu = 1/300$  nach der ersten Angabe (9) auf höchstens 4 Einheiten des Nenners. Nehmen wir nach bekannten Regeln aus der Differenz der beiden Werte (9) den mittleren Fehler für den Wert (10) an, setzen also die Abplattung des Erdellipsoids

$$\mu = \frac{1}{297,8 \pm 2,2}, \quad (15)$$

so dürfte dieser mittlere Fehler nach unserer Ansicht eher etwas zu groß als zu klein geschätzt sein.

**§ 8. Die Trägheitsmomente der Erde und die Zunahme der Dichtigkeit nach dem Erdinnern.** Halten wir an dem Resultat (10) des vorigen Paragraphen fest und sehen von der Ungleichheit der Hauptträgheitsmomente  $A$  und  $B$  ab, so folgt aus der Mondbewegung:

$$C - A = 0,0010865 a_0^2 M, \quad (1)$$

$M$  Erdmasse,  $a_0$  Äquatorialradius des Erdellipsoids. Nach dem 5. Kap. S. 437 (6) ist ferner aus der Präzession und Nutation bzw. aus der zehnmonatlichen Bewegung der Erdaxe im Erdkörper:

$$\frac{C - A}{C} = 0,003272. \quad (2)$$

Aus diesen Ergebnissen findet sich durch Division:

$$\left. \begin{array}{l} C = 0,3321 a_0^2 M \\ A = 0,3310 a_0^2 M. \end{array} \right\} \text{ und hiermit aus (1):} \quad (3)$$

Was die Gleichung (1) anbetrifft, so ist schon im 2. Kap. S. 127 mit Benutzung der entsprechenden Ergebnisse der Pendelbeobachtungen darauf hingewiesen worden, daß sie einem homogenen Ellipsoid von gleicher Masse  $M$  und von gleichem Äquatorialradius  $a_0$  nicht entspricht, daß sie vielmehr eine allmähliche Zunahme der Dichtigkeit nach dem Erdinnern wahrscheinlich macht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß diese Ansicht richtig ist, verstärkt sich durch die Gleichung (2), welche mit (1) zu den (3) führt. Für ein homogenes Ellipsoid wäre nach S. 126 (3)  $C = 0,4 a_0^2 M$ .\*)

Man kann nun versuchen die Erddichtigkeit als Funktion des Abstandes vom Erdschwerpunkt, die Erde als homogen geschichtete Kugel betrachtet, darzustellen: Gegeben sind zur Lösung dieses Prob-

\*) Dergleichen Betrachtungen stellt *Hansen* an S. 472—474 der Abhandlung von 1864.

lems die Dichtigkeit  $\Theta_0$  des festen Teiles der Erdoberfläche, die mittlere Dichtigkeit  $\Theta_m$  des Erdkörpers und die in eine Relation zusammenzufassenden Gleichungen (3) für das Trägheitsmoment des Erdkörpers:

$$C = 0,332 a_0^2 M. \quad (4)$$

Im Abstände  $a$  vom Zentrum sei die Dichtigkeit  $\Theta$ , für welche wir ansetzen:

$$\Theta = \Theta_0 \left\{ 1 + d_1 \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 + d_2 \left( \frac{a}{a_0} \right)^4 \right\}. \quad (5)$$

Diese Formel, in welcher  $\Theta_0$  offenbar die Bedeutung als Dichtigkeit im Zentrum hat, trägt dem Umstande Rechnung, daß  $d\Theta : da$  für  $a = \text{null}$  verschwinden muß. Um nun von Gleichung (4) Nutzen ziehen zu können, sind für eine homogen geschichtete Kugel auf grund der Relation (5)  $M$  und  $C$  zu berechnen.

Für die Kugelschale mit den Grensradien  $a$  und  $a + da$  sowie der Dichtigkeit  $\Theta$  ist die Masse

$$dM = 4\pi \Theta a^2 da;$$

mithin ist die Masse der Kugel vom Radius  $a_0$  gleich

$$M = 4\pi \int_0^{a_0} \Theta a^2 da,$$

woraus durch Einführung des Ausdruckes (5) folgt:

$$M = \frac{4}{3} \pi \Theta_0 a_0^3 \left( 1 + \frac{3d_1}{5} + \frac{3d_2}{7} \right). \quad (6)$$

Da ferner das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel vom Radius  $a$  und der Dichtigkeit  $\Theta$  nach S. 126 (3) gleich ist

$$\frac{8}{15} \pi \Theta a^5,$$

so ist das Trägheitsmoment einer Kugelschale mit den Grensradien  $a$  und  $a + da$  sowie der Dichtigkeit  $\Theta$  gleich

$$dC = \frac{8}{3} \pi \Theta a^4 da;$$

mithin ist das Trägheitsmoment der geschichteten Kugel vom Radius  $a_0$  gleich

$$C = \frac{8}{3} \pi \int_0^{a_0} \Theta a^4 da,$$

woraus mit Beachtung von (5) folgt:

$$C = \frac{8}{15} \pi \Theta_0 a_0^5 \left( 1 + \frac{5d_1}{7} + \frac{5d_2}{9} \right). \quad (7)$$

Ehe wir diese Ergebnisse in (4) einführen, erwähnen wir noch die Relation:

$$M = \frac{4}{3} \pi \Theta_m a_0^3. \quad (8)$$

Es folgt nun aus (4), (7) und (8):

$$\left. \begin{aligned} \Theta_c \left( 1 + \frac{5d_1}{7} + \frac{5d_2}{9} \right) &= 0,830 \Theta_m, \\ \text{ferner aus (6) und (8):} \\ \Theta_c \left( 1 + \frac{3d_1}{5} + \frac{3d_2}{7} \right) &= \Theta_m, \\ \text{und aus (5) im Falle } a = a_0: \\ \Theta_c (1 + d_1 + d_2) &= \Theta_0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Durch paarweise Subtraktion geben diese Gleichungen

$$\begin{aligned} \Theta_c \left( \frac{4}{35} d_1 + \frac{8}{63} d_2 \right) &= -0,170 \Theta_m \\ \Theta_c \left( \frac{2}{7} d_1 + \frac{4}{9} d_2 \right) &= \Theta_0 - 0,830 \Theta_m, \end{aligned}$$

und hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \Theta_c d_1 &= \frac{1}{16} (32,9 \Theta_m - 140 \Theta_0) \\ \Theta_c d_2 &= \frac{1}{16} (-51,03 \Theta_m + 126 \Theta_0) \\ \Theta_c &= \frac{1}{16} (18,13 \Theta_m + 30 \Theta_0). \end{aligned} \quad (10)$$

Mit  $\Theta_m = 5,6$  und  $\Theta_0 = 2,8$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Theta_c d_1 &= -12,985 & d_1 &= -1,12 \\ \Theta_c d_2 &= +4,189 & d_2 &= +0,36 \\ \Theta_c &= +11,595, \end{aligned}$$

es wird also:

$$\Theta = 11,6 \left\{ 1 - 1,12 \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 + 0,36 \left( \frac{a}{a_0} \right)^4 \right\}. \quad (11)$$

Setzen wir aber  $\Theta_m = 5,6$  und  $\Theta_0 = 2,6$ , so folgt:

$$\begin{aligned} \Theta_c d_1 &= -11,235 & d_1 &= -1,00 \\ \Theta_c d_2 &= +2,614 & d_2 &= +0,23 \\ \Theta_c &= +11,220, \end{aligned}$$

und es wird:

$$\Theta = 11,2 \left\{ 1 - \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 + 0,23 \left( \frac{a}{a_0} \right)^4 \right\}. \quad (12)$$

Die Vergleichung von (11) und (12) zeigt den großen Einfluß einer Änderung des Wertes von  $\Theta_0$  auf die Formel. Derselbe läßt sich aber bei dem hier gewählten Vorgange nicht beseitigen, obgleich dies wünschenswert wäre, da gerade die Ermittlung von  $\Theta_0$  an großer Unsicherheit leidet\*). Übrigens ist der Verlauf von  $\Theta$  nach (11) und (12) wesentlich derselbe, wie Fig. 79 zeigt. Derselbe scheint auch den wirklichen Verhältnissen, über die man allerdings nur Vermutungen anstellen kann, ganz gut zu entsprechen.

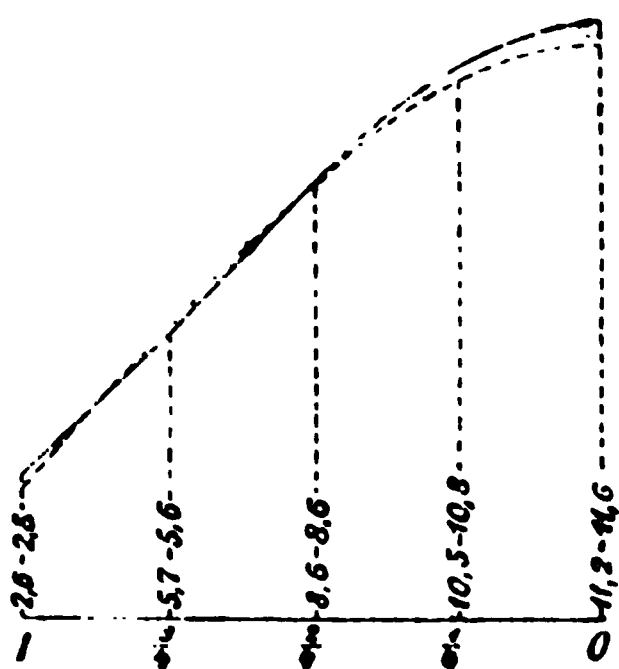


Fig. 79.

Es mag noch bemerkt werden, daß man zu weniger plausibeln Formeln gelangt, wenn man

$$C = 0,351 a_0^2 M \quad (13)$$

setzt, welcher Wert nach S. 472 (10\*) der Abplattung  $1/289,76$  zukommt. Als dann findet man z. B. für  $\Theta_0 = 2,8$ :

$$\Theta = 8,45 \left\{ 1 - 0,30 \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 - 0,37 \left( \frac{a}{a_0} \right)^4 \right\}; \quad (13^*)$$

man erhält also keine Reihe, welche den Anfang einer stark konvergenten unendlichen Reihe zu bilden scheint, wie im oben betrachteten Falle.

**§ 9. Die mittlere Dichtigkeit der Erdmasse in der Nähe der Erdoberfläche und die mittlere Dichtigkeit des Erdkörpers.** Im Anschluß an vorstehende Rechnung bemerken wir zunächst in Bezug auf die mittlere Dichtigkeit  $\Theta_0$  der äußeren Erdschichten, daß jeder Versuch, dieselbe aus den Dichtigkeiten der Gesteine abzuleiten, nur zu einem sehr unsicheren Werte führen kann. Da man annehmen darf, daß die sedimentären Gesteine nur eine sehr dünne Schicht bilden, so wird man zur Bildung eines Wertes von  $\Theta_0$ , wenigstens für den vorliegenden Zweck eines Schlusses auf das Erdinnere, den spezifischen Gewichten der krystallinen Massengesteine das Hauptgewicht beizulegen haben. Aber auch für diese Gesteine sind die spezifischen Gewichte sehr verschieden, und es finden sogar innerhalb derselben Art bedeutende Abweichungen statt. Einige Mittelwerte sind:

Granit	2,7
Syenit	2,7
Grünstein	2,85
Porphyr	2,65
Basalt	3,05
Klingstein	2,55.

\*) Vergl. weiterhin die Anm. zu § 12.

Hiernach wird  $\Theta_0 = 2,6$  bis  $3,0$  anzunehmen sein. Wir haben oben zunächst  $\Theta_0 = 2,8$  gesetzt, außerdem aber auch  $\Theta_0 = 2,6$  angenommen, eine Annahme die einigermaßen die leichteren Bestandteile der äußersten Schichten des Erdkörpers berücksichtigt.

Weit genauer als  $\Theta_0$  läßt sich die mittlere Dichtigkeit  $\Theta_m$  des ganzen Erdkörpers angeben. Man hat dieselbe mittelst der Drehwage und durch Wägungen auf der Wage bestimmt, ferner durch Lotablenkungen von Gebirgsmassen und durch Pendelbeobachtungen auf Bergkuppen sowie in tiefen Schächten. Die ersteren beiden Methoden, Methoden des rein physikalischen Experiments unter genau bekannten Bedingungen, sind die besten, während die letzten beiden dadurch an Wert verlieren, daß es unmöglich ist, die lokalen Massenverhältnisse der Rechnung hinreichend genau zu unterwerfen.\*)

Mit der Drehwage fand *Cavendish* aus Versuchen in den Jahren 1797—98  $\Theta_m = 5,48$  (*Phil. Transact.* 1798, Ausgabe von 1809 Bd. 18 S. 388—406), *Huttons* Revisionsrechnung gab (*Phil. Transact.* 1821 p. 276—292):

5,32;

*Reich* fand bei seinen ersten Versuchen im Jahre 1837 (publ. 1838)  $\Theta_m = 5,44$ , oder 5,49 nach der Berechnung von 1852; als Ergebnis seiner 1847—50 fortgesetzten Versuche ist aber zu nehmen (*Abh. der kön. sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig* 1852 Bd. 1 S. 383—431):

5,58;

*Baily* fand 1842 aus einer großen Versuchsreihe (*Mem. of the Royal Astronom. Soc.* 1843 Bd. 14):

5,67;

jedoch ist dieser Wert nach *Reich* sowie nach *Cornu* und *Baille* jedenfalls wegen konstanter Fehlerursachen bis zu 0,10 zu groß.

*A. Cornu* und *J. Baille* erhielten endlich aus sehr scharfen Messungen 1872—78 (*Comptes rendus* 1873 Bd. 76 S. 954 und 1878 Bd. 86 S. 699) den Wert

5,56 .

Durch Wägungen fand *Ph. v. Jolly* 1879—80 (vergl. 4. Kap. § 43 S. 382):

5,69.

---

\*) Über die Messungen bzw. Ergebnisse für  $\Theta_m$  findet sich in vielen Werken berichtet. Vergl. u. a.

*Todhunter, History of Attraction* etc.; Bd. 1 giebt S. 468—470 eine vollständige Übersicht aller diese Materie betreffenden Abhandlungen bis 1869.

Vergl. ferner

*Ph. Fischer, Untersuchungen über die Gestalt der Erde*, S. 68 und *Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik*, Bd. 1, 1882.

Die vier letzten Werte, denen eine erhebliche Sicherheit zukommt, geben 5,62 als Mittel, alle fünf Werte 5,56. Darnach dürfte

$$\Theta_m = 5,6$$

eine sehr wahrscheinliche Annahme sein. Sie erteilt dem ersten der 5 Werte nur  $\frac{1}{3}$  des Gewichtes der anderen. Der mittlere Fehler wird damit aus der Übereinstimmung  $\pm 0,05$ .

Über die Bestimmung von  $\Theta_m$  aus Lotablenkungen vergl. im 4. Kap. § 42 S. 380, über die Bestimmung aus Pendelbeobachtungen im 6. Kap. § 16.

### § 10. Die Abplattung der inneren Erdschichten gleicher Dichtigkeit.

Wenn wir die nicht unwahrscheinliche Annahme machen, daß im Erdinnern sich die Massen gleicher Dichtigkeit annähernd so gruppieren wie für einen flüssigen Zustand, d. h. nach Niveauflächen, so läßt sich mit Rücksicht auf die Resultate (1) bis (3) § 8 S. 473 die Änderung der Abplattung nach innen bestimmen. Zugleich findet sich eine neue Gelegenheit, die Koeffizienten der in § 8 für die Dichtigkeit angesetzten Reihe zu ermitteln.

Aus den Untersuchungen am Schlusse des 2. Kapitels ergibt sich aber, daß die Niveauflächen von Rotationsellipsoiden im Radiusvektor nicht mehr als um Glieder des Quadrates der Abplattung abweichen werden.\*) Vernachlässigen wir nun das Quadrat der Abplattung, so können wir als Polargleichung für die Meridiankurve einer Niveaufläche ansetzen:

$$r = a(1 - \alpha \sin^2 \varphi), \quad (1)$$

worin  $r$  der vom Erdschwerpunkt ausgehende Radiusvektor und  $\varphi$  die geozentrische Breite desselben ist.

Diese Gleichung ist aber bis auf Bruchteile von  $r$  von der Ordnung  $\alpha^2$  mit derjenigen einer Ellipse übereinstimmend. Um nun zunächst für das Potential eines homogenen Körpers, der von einer Niveaufläche (1) begrenzt ist, einen brauchbaren Näherungswert zu erhalten, können wir die im 2. Kapitel für das Rotationsellipsoid abgeleiteten Ausdrücke benutzen.

Nach S. 125 (8) ist das Potential für einen Punkt mit den Polarkoordinaten  $r'$  und  $\varphi'$  außerhalb des Ellipsoids, wenn für  $e^2$  gesetzt wird  $2\alpha$  und für die Masse  $M$  bei der Dichtigkeit  $\Theta$  der Wert  $\frac{4}{3} \pi \Theta a^3 (1 - \alpha)$ , mit Vernachlässigung von  $\alpha^2$ :

$$v_{\text{außerhalb}} = \frac{4}{3} \pi k^2 \frac{\Theta a^3}{r'} \left\{ 1 - \alpha + \frac{\alpha a^2}{5 r'^2} (1 - 3 \sin^2 \varphi') \right\}. \quad (2)$$

\*) Über ausführliche Nachweise vergl. *Laplace* oder *Lipschitz* an den S. 136 bzw. 489 angegebenen Orten.

Dagegen ist für einen innerhalb des Ellipsoids gelegenen Punkt nach S. 130 (12), wobei mit Vernachlässigung von  $\alpha^2$  für  $e'^2$  zu setzen ist  $2\alpha$ :

$$v_{\text{innerhalb}} = 2\pi k^2 \Theta \left\{ a^2 \left( 1 - \frac{2\alpha}{3} \right) - \frac{r'^2}{3} + \frac{2r'^2}{15} \alpha (1 - 3 \sin^2 \varphi') \right\}. \quad (3)$$

Denken wir uns  $\alpha$  als Funktion von  $a$  bekannt, so giebt die Differentiation der Ausdrücke (2) und (3) nach  $a$  die Potentiale unendlich dünner, homogener Schichten auf einen Punkt außerhalb und innerhalb. Es wird

$$dv_{\text{außerhalb}} = \frac{4}{3} \pi k^2 \frac{\Theta}{r'} \left\{ 3a^2 - \frac{d(\alpha a^3)}{da} + \frac{1 - 3 \sin^2 \varphi'}{5r'^2} \frac{d(\alpha a^5)}{da} \right\} \quad (4)$$

und

$$dv_{\text{innerhalb}} = 2\pi k^2 \Theta \left\{ 2a - \frac{2}{3} \frac{d(\alpha a^2)}{da} + (1 - 3 \sin^2 \varphi') \frac{2r'^2}{15} \frac{d\alpha}{da} \right\}. \quad (5)$$

Integrieren wir nun den Ausdruck (4) wieder von  $a$  gleich null bis  $a'$ , wobei wir aber  $\Theta$  als Funktion von  $a$  voraussetzen, so folgt als Potential eines geschichteten Rotationssphäroids vom äußeren Äquatorialradius  $a'$  auf einen Punkt außerhalb

$$v_{\text{außerhalb}} = \frac{4}{3} \pi k^2 \left\{ \frac{1}{r'} \int_0^{a'} \left[ 3a^2 - \frac{d(\alpha a^3)}{da} \right] \Theta da + \frac{1 - 3 \sin^2 \varphi'}{5r'^3} \int_0^{a'} \frac{d(\alpha a^5)}{da} \Theta da \right\}. \quad (6)$$

Damit aber der Punkt  $(r', \varphi')$  außerhalb oder höchstens auf der Oberfläche liegt, muß mit Rücksicht auf (1) sein:

$$r' \geq a' (1 - \alpha' \sin^2 \varphi'),$$

wenn  $\alpha'$  die zu  $a'$  gehörende Abplattung ist.

Nehmen wir an, daß der Punkt  $(r', \varphi')$  gerade auf der Oberfläche liegt, also  $r' = a' (1 - \alpha' \sin^2 \varphi')$  ist, so wird aus (6) als Potentialfunktion des geschichteten Rotationssphäroids, auf dessen Oberfläche der Punkt  $(\varphi')$  liegt, erhalten:

$$v'_{\text{außerhalb}} = \frac{4}{3} \pi k^2 \left\{ \frac{1}{a'} \left( 1 + \frac{\alpha'}{3} \right) \int_0^{a'} \left[ 3a^2 - \frac{d(\alpha a^3)}{da} \right] \Theta da + (1 - 3 \sin^2 \varphi') \int_0^{a'} \left[ \frac{1}{5a'^3} \frac{d(\alpha a^5)}{da} - \frac{\alpha' a^2}{a'} \right] \Theta da \right\}. \quad (7)$$

Hierbei sind Glieder vernachlässigt, die als Faktor entweder  $\alpha'^2$  selbst oder eine GröÙe gleicher Ordnung enthalten, z. B.

$$\alpha' \int \frac{d(\alpha a^5)}{da} da.$$



Integrieren wir ferner den Ausdruck (5) von  $a = a'$  bis  $a_0$ , wobei wir  $\Theta$  ebenfalls als Funktion von  $a$  betrachten und vorläufig allgemein

$$r' \leq a' (1 - \alpha' \sin^2 \varphi')$$

setzen, so folgt als Potential eines geschichteten, hohlen Rotations-sphäroids vom inneren Äquatorialradius  $a'$  und äusseren Äquatorialradius  $a_0$  auf einen Punkt innerhalb:

$$v_{\text{innerhalb}} = 4\pi k^2 \left\{ \int_{a'}^{a_0} \left[ a - \frac{1}{3} \frac{d(\alpha a^3)}{da} \right] \Theta da + \frac{r'^2}{15} (1 - 3 \sin^2 \varphi') \int_{a'}^{a_0} \frac{d\alpha}{da} \Theta da \right\}. \quad (8)$$

Nehmen wir an, daß der Punkt  $(r', \varphi')$  auf der inneren Begrenzungsfläche liegt, also  $r' = a' (1 - \alpha' \sin^2 \varphi')$  ist, so folgt unter Vernachlässigung von Gliedern der Ordnung  $\alpha'^2$  als Potentialfunktion des geschichteten Rotationshohlsphäroids, auf dessen innerer Begrenzungsfläche der Punkt  $(\varphi')$  liegt:

$$v'_{\text{innerhalb}} = 4\pi k^2 \left\{ \int_{a'}^{a_0} \left[ a - \frac{1}{3} \frac{d(\alpha a^3)}{da} \right] \Theta da + \frac{a'^2}{15} (1 - 3 \sin^2 \varphi') \int_{a'}^{a_0} \frac{d\alpha}{da} \Theta da \right\}. \quad (9)$$

Bilden wir endlich mittelst (7) und (9) den Ausdruck

$$v = \underset{\text{außerhalb}}{v'} + \underset{\text{innerhalb}}{v'}, \quad (10)$$

so erhalten wir das Potential eines geschichteten Rotationssphäroids auf einen innerhalb liegenden Punkt. Dieser Potentialausdruck vermehrt um das Potential der Zentrifugalkraft, also der Ausdruck

$$v + \frac{1}{2} \omega^2 r'^2 \cos^2 \varphi',$$

oder mit Rücksicht auf (10) und mit der zulässigen Substitution von  $a'$  für  $r'$  im 2. Gliede:

$$\underset{\text{außerhalb}}{v'} + \underset{\text{innerhalb}}{v'} + \frac{1}{3} \omega^2 a'^2 + \frac{1}{6} (1 - 3 \sin^2 \varphi') \omega^2 a'^2, \quad (11)$$

muß aber konstant sein für alle Punkte derselben Niveaufäche mit dem Äquatorialradius  $a'$  und der Abplattung  $\alpha'$ . Daher muß in der Summe (11) der Faktor der veränderlichen GröÙe  $(1 - 3 \sin^2 \varphi')$  verschwinden. Auf diese Weise gelangen wir zu der Bedingungs-gleichung:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{4}{3} \pi k^2 \int_0^{a'} \left[ \frac{1}{5a'^3} \frac{d(\alpha a^3)}{da} - \frac{\alpha' a^2}{a'} \right] \Theta da \\ & + \frac{4}{15} \pi k^2 a'^2 \int_{a'}^{a_0} \frac{d\alpha}{da} \Theta da + \frac{1}{6} \omega^2 a'^2 \end{aligned} \right\} = 0, \quad (12)$$

welche Bedingungsgleichung die Abplattung  $\alpha'$  einer Niveaufläche mit ihrem Äquatorialradius  $a'$  in Verbindung setzt nach Maßgabe der Annahme über die veränderliche Dichtigkeit  $\Theta$ .\*)

Als gegebene Größen treten bei der weiteren Behandlung des Problems auf: die Abplattung  $\alpha_0$  des Erdellipsoids, das Verhältnis der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator des Erdellipsoids und die Variation der Schwerkraft mit der geographischen Breite, ferner die Dichtigkeit  $\Theta_0$  an der Erdoberfläche und die mittlere Dichtigkeit  $\Theta_m = 5,6$ , endlich  $C - A$  nach (1) und  $(C - A) : C$  nach (2) § 8 S. 473. Jedoch sind diese Größen nicht sämtlich unabhängig von einander:

Die beiden ersten Größen bestimmen nach dem *Clairautschen* Theorem, welches auch bei der jetzt vorausgesetzten Massenordnung gilt (ohne von ihr abhängig zu sein), die Veränderung der Schwerkraft auf der Oberfläche des Erdellipsoids, welche daher eine besondere Gleichung zur Bestimmung der Koeffizienten der für  $\alpha$  und  $\Theta$  einzuführenden Funktionen von  $a$  anzusetzen nicht gestattet, denn sie würde von den anderen nicht unabhängig sein. Ferner hängen  $\alpha_0$  und  $C - A$  durch die Gleichung von *Laplace* (5) § 6 S. 467 zusammen, welche Gleichung ebenfalls bei der jetzt vorausgesetzten Massenordnung gilt. Man wird daher nur aus der Kenntnis einer dieser Größen eine Gleichung entnehmen können. Wir wählen  $C - A$ .

Die drei letzten der gegebenen Größen, auf die es nunmehr besonders ankommt, führen zur Kenntnis bestimmter Integrale zwischen den Grenzen  $a = \text{null}$  und  $a = a_0$ . Aus denselben kann man nur dann einen Nutzen ziehen, wenn  $\Theta$  und  $\alpha$  als Funktionen von  $a$  versuchsweise angenommen werden. Wir setzen daher:

$$\begin{aligned}\Theta &= \Theta_c \left\{ 1 + d_1 \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 + d_2 \left( \frac{a}{a_0} \right)^4 + d_3 \left( \frac{a}{a_0} \right)^6 \right\}, \\ \alpha &= \alpha_c \left\{ 1 + c_1 \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 + c_2 \left( \frac{a}{a_0} \right)^4 + c_3 \left( \frac{a}{a_0} \right)^6 \right\}\end{aligned}\tag{13}$$

\*) Die Bedingungsgleichung (12), welche Abplattung und Dichtigkeit mit einander verbindet, stellte schon *Clairaut* 1743 in seiner *Figure de la Terre* p. 273 auf. Er formt dieselbe in eine Differentialgleichung 2. Ordnung um, deren Integration  $\alpha'$  als Funktion von  $a'$  giebt, wenn das Dichtigkeitsgesetz bekannt ist. Zur Ableitung dieser Differentialgleichung genügt es, (12) nach vorhergegangener Multiplikation mit  $5a'^3$  zu differenzieren, das Resultat mit  $a'^4$  zu dividieren und abermals zu differenzieren. Es folgt dann, wenn zur Abkürzung

$$\int_0^{a'} \Theta a^2 da = A,$$

einer Funktion von  $a'$ , gesetzt wird, mit Weglassung der Striche an  $\Theta$ ,  $\alpha$  und  $a$ :

$$\frac{d^2 \alpha}{da^2} + \frac{2\Theta a^2}{A} \frac{d\alpha}{da} + \left( \frac{2\Theta a}{A} - \frac{6}{a^2} \right) \alpha = 0.\tag{12*}$$

und werden schliesslich finden, dass diese Reihen von  $a = \text{null}$  bis  $a_0$  eine hinreichend starke Konvergenz zeigen, um sie mit grosser Annäherung als den Ausdruck des funktionalen Zusammenhanges von  $\Theta$  und  $a$  bzw.  $\mathfrak{a}$  und  $a$  ansehen zu dürfen. Wie wir übrigens sogleich sehen werden, lässt sich ohne starke Konvergenz der Reihen (13) die weitere Rechnung gar nicht durchführen.

§ 11. Fortsetzung: Entwicklung der Gleichungen. Wir führen nun zunächst die Annahmen (13) in die Bedingung (12) ein. Zu dem Zwecke bilden wir vorerst nachstehende Ausdrücke, wobei wir in allen Fällen der Multiplikation beider Reihen (13) Produkte vernachlässigen, welche der Ordnung der bereits vernachlässigten Glieder dieser Reihen entsprechen. Wir erhalten successive:

$$\frac{d(\mathfrak{a}a^5)}{da} \Theta = \Theta_c \mathfrak{a}_c a^4 \left\{ \begin{aligned} &5 + [7c_1 + 5d_1] \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + [9c_2 + 7c_1d_1 + 5d_2] \left(\frac{a}{a_0}\right)^4 \\ &+ [11c_3 + 9c_2d_1 + 7c_1d_2 + 5d_3] \left(\frac{a}{a_0}\right)^6 \end{aligned} \right\},$$

$$\int_0^{a'} \frac{d(\mathfrak{a}a^5)}{da} \Theta da = \Theta_c \mathfrak{a}_c a'^5 \left\{ \begin{aligned} &1 + [c_1 + \frac{5}{7}d_1] \left(\frac{a'}{a_0}\right)^2 + [c_2 + \frac{7}{9}c_1d_1 + \frac{5}{9}d_2] \left(\frac{a'}{a_0}\right)^4 \\ &+ [c_3 + \frac{9}{11}c_2d_1 + \frac{7}{11}c_1d_2 + \frac{5}{11}d_3] \left(\frac{a'}{a_0}\right)^6 \end{aligned} \right\}; \quad (1)$$

ferner:

$$\mathfrak{a}' \int_0^{a'} \Theta a^2 da = \frac{1}{3} \Theta_c \mathfrak{a}_c a'^3 \left\{ \begin{aligned} &1 + [c_1 + \frac{3}{5}d_1] \left(\frac{a'}{a_0}\right)^2 + [c_2 + \frac{3}{5}c_1d_1 + \frac{3}{7}d_2] \left(\frac{a'}{a_0}\right)^4 \\ &+ [c_3 + \frac{3}{5}c_2d_1 + \frac{3}{7}c_1d_2 + \frac{3}{9}d_3] \left(\frac{a'}{a_0}\right)^6 \end{aligned} \right\}; \quad (2)$$

endlich:

$$\frac{d\mathfrak{a}}{da} \Theta = \frac{\Theta_c \mathfrak{a}_c}{a_0} \left\{ \begin{aligned} &2c_1 \left(\frac{a}{a_0}\right) + [4c_2 + 2c_1d_1] \left(\frac{a}{a_0}\right)^3 \\ &+ [6c_3 + 4c_2d_1 + 2c_1d_2] \left(\frac{a}{a_0}\right)^5 \end{aligned} \right\},$$

$$\int_{a'}^{a_0} \frac{d\mathfrak{a}}{da} \Theta da = \Theta_c \mathfrak{a}_c \left\{ \begin{aligned} &c_1 + c_2 + \frac{1}{2}c_1d_1 + c_3 + \frac{2}{3}c_2d_1 + \frac{1}{3}c_1d_2 \\ &- c_1 \left(\frac{a'}{a_0}\right)^2 - [c_2 + \frac{1}{2}c_1d_1] \left(\frac{a'}{a_0}\right)^4 - [c_3 + \frac{2}{3}c_2d_1 + \frac{1}{3}c_1d_2] \left(\frac{a'}{a_0}\right)^6 \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Hiermit geht die Bedingungsgleichung (12) in nachstehende Form über:

$$\left\{ \begin{aligned} &c_1 + c_2 + c_3 + \frac{1}{2}c_1d_1 + \frac{2}{3}c_2d_1 + \frac{1}{3}c_1d_2 \\ &- \left\{ \frac{5}{3}c_1 + \frac{2}{7}d_1 \right\} \left(\frac{a'}{a_0}\right)^2 - \left\{ \frac{5}{3}c_2 + \frac{13}{18}c_1d_1 + \frac{10}{63}d_2 \right\} \left(\frac{a'}{a_0}\right)^4 \\ &- \left\{ \frac{5}{3}c_3 + \frac{28}{33}c_2d_1 + \frac{95}{231}c_1d_2 + \frac{10}{99}d_3 \right\} \left(\frac{a'}{a_0}\right)^6 \end{aligned} \right\} = \frac{2}{3} - \frac{5\omega^2}{8\pi k^2 \Theta_c \mathfrak{a}_c}. \quad (4)$$

Diese Gleichung muss aber erfüllt sein für jeden Wert von  $a'$  zwischen null und  $a_0$ , folglich müssen die Koeffizienten der Potenzen

von  $a : a_0$  einzeln verschwinden. Hierdurch ergibt sich die Möglichkeit, die Koeffizienten  $c$  durch die  $d$  auszudrücken. Es wird:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{6}{35} d_1 \\ c_2 &= -\frac{13}{30} c_1 d_1 - \frac{2}{21} d_2 = +\frac{13}{175} d_1^2 - \frac{2}{21} d_2 \\ c_3 &= -\frac{28}{55} c_2 d_1 - \frac{19}{77} c_1 d_2 - \frac{2}{33} d_3 = -\frac{52}{1375} d_1^3 + \frac{734}{8085} d_1 d_2 - \frac{2}{33} d_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Außerdem ist

$$c_1 + c_2 + c_3 + \frac{1}{2} c_1 d_1 + \frac{2}{3} c_2 d_1 + \frac{1}{3} c_1 d_2 = \frac{2}{3} - \frac{5\omega^2}{8\pi k^2 \Theta_c a_c}. \quad (6)$$

Bezeichnen wir das Verhältniß der Zentrifugalkraft zur Schwerkraft am Äquator des Erdellipsoids mit  $\tau$ , so haben wir, indem wir hierbei in ausreichender Annäherung die Erde als geschichtete Kugel behandeln:

$$\frac{\omega^2 a_0}{\frac{4}{3} \pi k^2 \Theta_m a_0} = \tau,$$

oder vereinfacht:

$$\frac{\omega^2}{\pi k^2} = \frac{4}{3} \tau \Theta_m. \quad (7)$$

Die Dichtigkeit  $\Theta_0$  der Oberfläche führt mittelst der 1. Gleichung (13) zu der Bedingung

$$\Theta_0(1 + d_1 + d_2 + d_3) = \Theta_0; \quad (8)$$

dagegen führt die mittlere Dichtigkeit des Erdkörpers  $\Theta_m$ , indem unter der hinreichenden Annahme der Kugelgestalt die Erdmasse  $M$  in doppelter Aufstellung ergibt

$$4\pi \int_0^{a_0} \Theta a^2 da = M = \frac{4}{3} \pi \Theta_m a_0^3, \quad (9)$$

zu der Bedingung:

$$\Theta_0 \left(1 + \frac{3}{5} d_1 + \frac{3}{7} d_2 + \frac{3}{9} d_3\right) = \Theta_m. \quad (10)$$

Um endlich noch die den beiden letzten Beobachtungsgrößen,  $C - A$  und  $(C - A) : C$  oder bequemer  $C - A$  und  $C$ , entsprechenden Bedingungsgleichungen aufzustellen, entnehmen wir dem 2. Kap. § 32 (3) S. 126 die Trägheitsmomente  $C'$  und  $A'$  eines homogenen Rotationsellipsoids mit den Halbaxen  $a$  und  $b$  und der Dichtigkeit  $\Theta$ . Es ist

$$\begin{aligned} C' &= \frac{8}{15} \pi \Theta a^4 b, \\ C' - A' &= \frac{4}{15} \pi \Theta a^2 b (a^2 - b^2). \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke können wir, insofern wir das Quadrat der Abplattung vernachlässigen, auch anwenden auf die Trägheitsmomente eines homogenen Rotationssphäroides, das eine Niveaufläche des Erdinnern zur Oberfläche hat.

Indem wir die Abplattung  $\alpha$  durch die Relation  $b = a(1 - \alpha)$  einführen, setzen wir mit der angedeuteten Vernachlässigung:

$$C' = \frac{8}{15} \pi \Theta (1 - \alpha) a^5$$

$$C' - A' = \frac{8}{15} \pi \Theta \alpha a^5.$$

Hieraus erhalten wir für eine unendlich dünne Schicht zwischen zwei unendlich nahen Niveauflächen:

$$dC = \frac{8}{15} \pi \Theta \frac{d([1 - \alpha] a^5)}{d\alpha} d\alpha$$

$$d(C - A) = \frac{8}{15} \pi \Theta \frac{d(\alpha a^5)}{d\alpha} d\alpha,$$

durch Integration von  $\alpha = \text{null}$  bis  $\alpha_0$  aber für die Trägheitsmomente des Erdkörpers:

$$C = \frac{8}{15} \pi \int_0^{\alpha_0} \frac{d([1 - \alpha] a^5)}{d\alpha} \Theta d\alpha$$

$$C - A = \frac{8}{15} \pi \int_0^{\alpha_0} \frac{d(\alpha a^5)}{d\alpha} \Theta d\alpha. \quad (11)$$

Für den ersten dieser Ausdrücke genügt es in weiterer Vernachlässigung zu setzen:

$$C = \frac{8}{3} \pi \int_0^{\alpha_0} \Theta a^4 d\alpha. \quad (12)$$

Bei der Entwicklung von (11) kann man den Ausdruck (1) für  $\alpha' = \alpha_0$  benutzen. Es wird damit aus (11) und ferner unter Berücksichtigung der 1. Gleichung (13) des vorigen Paragraphen aus (12) erhalten:

$$\frac{8}{15} \pi \Theta_c \alpha_c a_0^5 \left\{ \begin{aligned} &1 + \left[ c_1 + \frac{5}{7} d_1 \right] + \left[ c_2 + \frac{7}{9} c_1 d_1 + \frac{5}{9} d_2 \right] \\ &+ \left[ c_3 + \frac{9}{11} c_2 d_1 + \frac{7}{11} c_1 d_2 + \frac{5}{11} d_3 \right] \end{aligned} \right\} = C - A \quad (13)$$

und

$$\frac{8}{15} \pi \Theta_c a_0^5 \left\{ 1 + \frac{5}{7} d_1 + \frac{5}{9} d_2 + \frac{5}{11} d_3 \right\} = C. \quad (14)$$

Andererseits sind zufolge der Beobachtungen nach § 8 (1) und (3) S. 473, wenn  $M = \frac{4}{3} \pi \Theta_m a_0^3$  gesetzt wird:

$$C - A = 0,0010865 \cdot \frac{4}{3} \pi \Theta_m a_0^5 \quad (13^*)$$

und

$$C = 0,3321 \cdot \frac{4}{3} \pi \Theta_m a_0^5, \quad (14^*)$$

womit sich nun leicht die letzten beiden Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten  $c$  und  $d$  ergeben.

Indem wir die Gleichungen zusammenstellen, führen wir zugleich behufs Elimination von  $\omega^2/k^2$  die Beziehung (7) in (6) ein und nehmen einige naheliegende Vereinfachungen vor.

§ 12. Fortsetzung: Auflösung und Endresultate. Die Gleichungen zur Lösung der Aufgabe sind der Reihe nach aus (6) und (7), (13) und (13\*), (10), (14) und (14\*) sowie aus (8) zu entnehmen; dazu treten dann noch die Relationen (5):

$$\Theta_c \mathfrak{A}_c \left\{ 1 - \frac{3}{2} (c_1 + c_2 + c_3) - \frac{3}{4} c_1 d_1 - c_2 d_1 - \frac{1}{2} c_1 d_2 \right\} = \frac{5}{4} \mathfrak{r} \Theta_m \quad (1)$$

$$\Theta_c \mathfrak{A}_c \left\{ \begin{aligned} &1 + (c_1 + c_2 + c_3) + \frac{5}{7} d_1 + \frac{5}{9} d_2 + \frac{5}{11} d_3 \\ &+ \frac{7}{9} c_1 d_1 + \frac{9}{11} c_2 d_1 + \frac{7}{11} c_1 d_2 \end{aligned} \right\} = 0,0010865 \cdot \frac{5}{2} \Theta_m \quad (2)$$

$$\Theta_c \left( 1 + \frac{3}{5} d_1 + \frac{3}{7} d_2 + \frac{3}{9} d_3 \right) = \Theta_m \quad (3)$$

$$\Theta_c \left( 1 + \frac{5}{7} d_1 + \frac{5}{9} d_2 + \frac{5}{11} d_3 \right) = 0,3321 \cdot \frac{5}{2} \Theta_m \quad (4)$$

$$\Theta_c (1 + d_1 + d_2 + d_3) = \Theta_0 \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= -\frac{6}{35} d_1 &&= -0,1714 d_1 \\ c_2 &= +\frac{13}{175} d_1^2 - \frac{2}{21} d_2 &&= +0,0743 d_1^2 - 0,0952 d_2 \\ c_3 &= -\frac{52}{1375} d_1^3 + \frac{734}{8085} d_1 d_2 - \frac{2}{33} d_3 &&= -0,0378 d_1^3 + 0,0908 d_1 d_2 - 0,0607 d_3 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Substituiert man die  $c$  in (1) und (2), so folgt:

$$\Theta_c \mathfrak{A}_c \left\{ \begin{aligned} &1 + 0,2571 d_1 + 0,1428 d_2 + 0,090 d_3 \\ &+ 0,0170 d_1^2 - 0,0176 d_1^3 + 0,0447 d_1 d_2 \end{aligned} \right\} = \frac{5}{4} \mathfrak{r} \Theta_m \quad (7)$$

und

$$\Theta_c \mathfrak{A}_c \left\{ \begin{aligned} &1 + 0,5429 d_1 + 0,4604 d_2 + 0,395 d_3 \\ &- 0,0590 d_1^2 + 0,0230 d_1^3 - 0,0962 d_1 d_2 \end{aligned} \right\} = 0,0010865 \cdot \frac{5}{2} \Theta_m \quad (8)$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen kreuzweise und setzt zur Abkürzung mit Berücksichtigung des numerischen Wertes von  $\mathfrak{r}$  nach S. 84 (2\*):

$$Q = \frac{\frac{1}{2} \mathfrak{r}}{0,0010865} = \frac{1}{0,0010865 \cdot 576,8} = 1,5956, \quad (9)$$

so folgt weiter:

$$\left. \begin{aligned} & [0,5429 Q - 0,2571] d_1 + [0,4604 Q - 0,1428] d_2 \\ & + [0,395 Q - 0,090] d_3 - [0,0590 Q + 0,0170] d_1^2 \\ & + [0,0230 Q + 0,0176] d_1^3 - [0,0962 Q + 0,0447] d_1 d_2 \end{aligned} \right\} = 1 - Q. \quad (10)$$

Setzt man ferner zur Abkürzung:

$$\frac{5}{2} \cdot 0,3321 = 0,830 = R, \quad (11)$$

so giebt die kreuzweise Multiplikation von (3) und (4):

$$[0,7143 - 0,6R] d_1 + [0,5556 - \frac{3}{7} R] d_2 + [0,455 - \frac{1}{3} R] d_3 = R - 1. \quad (12)$$

Endlich folgt in gleicher Weise aus (3) und (5):

$$[\Theta_m - 0,6 \Theta_0] d_1 + [\Theta_m - \frac{3}{7} \Theta_0] d_2 + [\Theta_m - \frac{1}{3} \Theta_0] d_3 = \Theta_0 - \Theta_m. \quad (13)$$

Die Einführung der Zahlwerte giebt aus (10), (12) und (13):

$$\begin{aligned} 0,6092 d_1 + 0,5919 d_2 + 0,540 d_3 - 0,1111 d_1^2 + 0,0543 d_1^3 - 0,1982 d_1 d_2 \\ = - 0,5956 \end{aligned} \quad (14)$$

$$0,2163 d_1 + 0,1999 d_2 + 0,178 d_3 = - 0,170 \quad (15)$$

$$0,3920 d_1 + 0,4400 d_2 + 0,4667 d_3 = - 0,280 \text{ für } \Theta_0 = 2,8 \quad (16)$$

$$0,4040 d_1 + 0,4486 d_2 + 0,4733 d_3 = - 0,300 \text{ „ } \Theta_0 = 2,6. \quad (16^*)$$

Aus (14) und (15) folgt durch Elimination von  $d_2$ :

$$\begin{aligned} 0,1373 d_1 + 0,1034 d_1^2 + 0,0543 d_1^3 + 0,176 d_1 d_3 + 0,013 d_3 \\ = - 0,0922, \end{aligned} \quad (17)$$

aus (15) und (16) bzw. (16\*) dagegen:

$$0,0841 d_1 - 0,075 d_3 = - 0,0942 \text{ für } \Theta_0 = 2,8, \quad (18)$$

$$0,0814 d_1 - 0,073 d_3 = - 0,0815 \text{ „ } \Theta_0 = 2,6. \quad (18^*)$$

Für  $d_3 = \text{null}$  würde aus (17) folgen  $d_1 = - 1,04$ . Auf dem Wege successiver Verbesserung finden sich leicht mit Rücksicht auf (18) bzw. (18\*) die genaueren Werte von  $d_1$  und  $d_3$ . (15) giebt sodann  $d_2$ . Es wird

$$d_1 = - 1,19 \quad d_2 = + 0,50 \quad d_3 = - 0,08 \text{ für } \Theta_0 = 2,8, \quad (19)$$

$$d_1 = - 0,97 \quad d_2 = + 0,16 \quad d_3 = + 0,04 \text{ „ } \Theta_0 = 2,6, \quad (19^*)$$

woraus man erkennt, daß eine geringe Änderung in dem für  $\Theta_0$  angenommenen Werte die Koeffizienten  $d$  stark beeinflusst. Wir halten es unter diesen Umständen für angemessen  $d_3 = \text{null}$  beizubehalten,

womit sich für  $\Theta_0$  ein ganz plausibler Wert, etwa 2,67, nach Maßgabe von (19) und (19\*), ergeben wird. Mit Rücksicht auf (14) und (15) setzen wir also:

$$d_1 = -1,04 \quad d_2 = +0,275 \quad d_3 = 0. \quad (20)$$

Hierzu geben die (6), (3) und (4), (1) und (2) successive:

$$\begin{aligned} c_1 &= +0,178 & c_2 &= +0,054 & c_3 &= +0,016 \\ \Theta_0 &= 11,3 & \Theta_c \alpha_c &= \frac{1}{32,88} \\ \alpha_c &= \frac{1}{371,6}, \end{aligned} \quad (21)$$

und es wird als *Endresultat* erhalten:

$$\begin{aligned} \Theta &= 11,3 \left\{ 1 - 1,04 \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 + 0,275 \left( \frac{a}{a_0} \right)^4 \right\} \\ \alpha &= \frac{1}{372} \left\{ 1 + 0,178 \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 + 0,054 \left( \frac{a}{a_0} \right)^4 + 0,016 \left( \frac{a}{a_0} \right)^6 \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

woraus sich berechnet:

$$\Theta_0 = 2,66 \quad \text{und} \quad \alpha_0 = \frac{1}{298}, \quad (22^*)$$

letzterer Wert, wie es sein muß, in genügender Übereinstimmung mit S. 473 (15).

Zu  $\alpha_0$  gehört  $\mathfrak{h} = 0,00530$ , und da nach dem 2. Kap. S. 93 an der Oberfläche

$$\alpha_0 \frac{d\alpha}{da} = \mathfrak{h} - \alpha \quad (A)$$

ist, so folgt dieses gleich 0,00194, wohingegen die 2. Formel (22) giebt:

$$0,00180.$$

Die geringe Differenz beider Werte hat nichts auf sich, da die Fehler der 2. Reihe (22) in  $d\alpha : da$  stark hervortreten. Wir haben es daher unterlassen, sie durch Aufnahme eines Koeffizienten  $c_4$  in die Reihe für  $\alpha$  zum Verschwinden zu bringen.

Übrigens giebt es aufer der Gleichung (A) noch eine Gleichung, die zur Kontrolle dienen kann. Es ist dies die *innerhalb* an der Oberfläche gültige, aus (12\*) S. 481 mittelst (A) leicht ableitbare Gleichung:

$$\alpha_0^2 \frac{d^2 \alpha}{da^2} = 6 \left( \alpha - \frac{\Theta_0}{\Theta_m} \mathfrak{h} \right). \quad (B)$$

Auf die Gleichungen (A) und (B) weist *Lipschitz* 1864 hin in *Crelles J.* Bd. 63 S. 289–295. Er entwickelt dieselben ausgehend von der Bedingung des Gleichgewichts eines rotierenden, geschichteten Sphäroids und zeigt, daß sie wie *Clairauts* Theorem unabhängig vom Dichtigkeitsgesetz sind. Von den Gleichungen (16) a. a. O. ist die 1. das Theorem von *Clairaut*, die 2. die Gl. (A), die 3. die Gl. (B).

Daß in der That aufer der Gl. (A) noch eine vom Dichtigkeitsgesetz unabhängige Gleichung bestehen muß, erkennt man schon aus der ohne



Rücksicht auf dieses Gesetz im 1. Kap. § 26 S. 47 aufgestellten Formel (4) für  $dg:dh$  innerhalb an der Oberfläche. In derselben Weise nun wie uns im 2. Kap. § 18 S. 92 die Kenntnis des Verlaufes von  $g$  auf der Oberfläche zu einer Gleichung für  $d\alpha:da$  führte, muß auch die Kenntnis von  $dg:dh$  zu einer Gleichung für  $d^2\alpha:da^2$  führen. Wir geben die Hauptmomente der Ableitung der Gleichung (B) nach diesem Verfahren an.

Aus  $a - b = a\alpha$  folgt, vergl. S. 92:

$$a_0^2 \frac{d^2\alpha}{da^2} = 2\alpha - 2 \left(1 - \frac{db}{da}\right) - a_0 \frac{d^2b}{da^2}.$$

Ferner ist wegen der Gleichheit der Potentialdifferenz zwischen denselben beiden Niveauflächen an Pol und Äquator

$$g_a \Delta a + \frac{1}{2} \frac{dg_a}{dh} \Delta a^2 + \dots = g_p \Delta b + \frac{1}{2} \frac{dg_p}{dh} \Delta b^2 + \dots.$$

Hieraus folgt durch Differentiation für  $\Delta a = \Delta b = \text{null}$ :

$$\frac{db}{da} = \frac{g_a}{g_p}$$

$$a_0 \frac{d^2b}{da^2} = \left\{ \frac{a_0}{g_a} \frac{dg_a}{dh} - \frac{a_0}{g_p} \frac{dg_p}{dh} \frac{g_a}{g_p} \right\} \frac{g_a}{g_p}.$$

Diese Ausdrücke sind oben einzuführen und geben mit angemessenen Vernachlässigungen sofort die Gleichung (B), wenn noch gesetzt wird

$$g_p = g_a (1 + \kappa),$$

sowie mit Rücksicht auf S. 46 (1) bis (2) und S. 96 (10):

$$\frac{a_0}{g_a} \frac{dg_a}{dh} = -2(1 + \kappa + \alpha) + \frac{3\Theta_0}{\Theta_m} \frac{g}{g_a}$$

$$\frac{a_0}{g_p} \frac{dg_p}{dh} = -2(1 + \kappa - \alpha) + \frac{3\Theta_0}{\Theta_m} \frac{g}{g_p},$$

wobei rechter Hand für  $g$  ohne Index in beiden Formeln derselbe, aber sonst beliebig zwischen  $g_a$  und  $g_p$  gelegene Wert zu nehmen ist.

Die Gleichung (B) giebt

$$a^2 \frac{d^2\alpha}{da^2} = 0,0050,$$

die 2. Formel (22) dagegen nur 0,0040 infolge der Vernachlässigung der höheren Glieder.

Setzt man nach S. 472 (10\*) entsprechend der Abplattung  $1/299,78$ :

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} C - A &= 0,0011484 a_0^2 M \\ C &= 0,351 a_0^2 M, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

so gelangt man an der Hand der oben entwickelten Formeln für  $d_2 = \text{null}$  zu nachstehenden, *unbrauchbaren* Ergebnissen:

$$\Theta = 11,4 \left\{ 1 - 1,46 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + 0,85 \left(\frac{a}{a_0}\right)^4 \right\}$$

$$\alpha = \frac{1}{371} \left\{ 1 + 0,250 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + 0,077 \left(\frac{a}{a_0}\right)^4 + 0,005 \left(\frac{a}{a_0}\right)^6 \right\}.$$

Unbrauchbar sind diese Ergebnisse, weil  $\alpha_0$  nicht den angenommenen Wert erlangt, sondern gleich  $1:278$  folgt. Die Ursache hiervon ist der

Einfluß der vernachlässigten Glieder. Es wurde daher in die Entwicklung für  $\alpha$  noch ein Glied mit  $(\alpha : \alpha_0)^3$  aufgenommen; allein erzielt wurde damit nichts Besseres, weder mit der Annahme  $d_s = \text{null}$ , noch unter Annahme von  $\Theta_0 = 2,67$  und entsprechender Bestimmung von  $d_s$ . Der Ableitung eines brauchbaren Endresultates steht eben immer die geringe Konvergenz der Reihen für  $\Theta$  und  $\alpha$  entgegen. Für diesen Fall würde daher mittelst der Differentialgleichung (12\*) S. 481 zu versuchen sein,  $\alpha$  in Strenge als Funktion von  $a$  für ein gegebenes Gesetz der Dichtigkeit aufzustellen.

Eine derartige Untersuchung stellt 1863 *Lipschitz* an in *Crelles Journal* Bd. 62 S. 1—35, wobei er

$$\Theta = \Theta_m - C a^\lambda$$

setzt, mit  $\Theta_m$ ,  $C$  und  $\lambda$  als zu bestimmenden Konstanten. Er erhält unter Zugrundelegen der Werte  $\Theta_0 = 2,5$ ,  $\Theta_m = 5,58$  und  $\alpha_0 = \epsilon = 1 : 288$  (abgerundet):

$$\Theta = 9,45 - 6,95 \left( \frac{a}{\alpha_0} \right)^{2,39}$$

In dieser Abhandlung findet man auch im Anschluß an die *Méc. cél.* eine allgemeinere Aufstellung der Bedingung für das Gleichgewicht des rotierenden, geschichteten Sphäroids im Falle der Existenz äußerer Kräfte, sowie den Nachweis, daß mit Vernachlässigung von  $\alpha^3$  die Niveauflächen Rotationsellipsoide sind.

*Roche* bestimmte 1854 die Dichtigkeit der Erdschichten mittelst einer Potenzreihe, die bis  $(\alpha : \alpha_0)^3$  geht. Er setzt mit Rücksicht auf das Ergebnis der Präzession und den Wert für die Abplattung  $\alpha_0$ :

$$\Theta = \frac{25}{13} \Theta_m \left\{ 1 - 0,8 \left( \frac{a}{\alpha_0} \right)^2 \right\}.$$

Der eingeschlagene Rechnungsgang ist uns unbekannt, da wir nur nach einer kurzen Notiz in den *Comptes rendus* Bd. 39 (1854) S. 1215 citieren. (Wahrscheinlich ging *Roche* von der weiterhin aufzustellenden Gleichung (25) aus.)

In seinem Lehrbuche der *mathematischen und physischen Geographie*, Bd. 1 S. 348—357, behandelt *Ed. Schmidt* 1829 die Frage nach der Dichtigkeitszunahme und der Abplattung im Erdinnern an der Hand der Hypothese, daß die Zunahme des Druckes pro Flächeneinheit

$$dp = \text{Konst. } \Theta d\Theta \quad (24)$$

sei, welche Hypothese, wie er sagt, durch *Cantons* Versuche für Flüssigkeiten wahrscheinlich gemacht wird. Beachtet man nun andererseits, daß nach den Regeln der Hydrostatik und weil Schwere mal Niveauflächenabstand gleich Potentialdifferenz ist, die Gleichung besteht:

$$dp = \Theta dv,$$

unter  $v$  das Potential verstanden, so folgt (abgesehen von der unerheblichen Zentrifugalkraft) mit Rücksicht auf den Ausdruck (10) S. 480 (in dem man entsprechend jener Vernachlässigung  $\alpha = \text{null}$  zu setzen und außerdem die verschwindenden, in  $1 - 3 \sin^2 \varphi'$  multiplizierten Glieder wegzulassen hat, womit

$$v = 4\pi k^2 \left\{ \frac{1}{a'} \int_0^{a'} a^3 \Theta da + \int_0^{a_0} a \Theta da \right\}$$

wird), für die Dichtigkeit  $\Theta$  im Zentrumsabstand  $a$  die Gleichung:

$$\Theta = m \frac{\sin na}{na}, \quad (24^*)$$

worin  $m$  und  $n$  Konstanten bezeichnen,  $m$  in der Bedeutung von  $\Theta_c$ .

Führt man diese Funktion in (12\*) S. 481 ein, so gelangt man zu einer Bedingung für die Abplattung und kann dieselbe als Funktion von  $n$  herstellen. *Schmidt* findet für  $\alpha_0 = 1/298$ :

$$\Theta_m = 2,057 \Theta_0 \quad \text{und} \quad \Theta_c = 4,087 \Theta_0;$$

dabei wird

$$\alpha_c = 1/267.$$

Dieses Ergebnis stimmt mit den (22), die auf demselben Wert für  $\alpha_0$  basieren, außerdem aber auch der Präzessionskonstanten genügen, sehr gut überein. Auch entspricht unsere Reihe für  $\Theta$  sehr nahe dem Ausdrucke (24\*), welcher mit Rücksicht auf die *Schmidt'schen* Relationen zwischen den  $\Theta$  giebt:

$$\Theta = 11,1 \left\{ 1 - 1,03 \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 + 0,32 \left( \frac{a}{a_0} \right)^4 - 0,05 \left( \frac{a}{a_0} \right)^6 \right\}.$$

Diese günstige Übereinstimmung ist jedoch nur den besonderen Zahlenwerten eigentümlich und für die mit  $\alpha = 1/293,76$  verknüpften insbesondere ganz und gar nicht vorhanden. Da nun für die der *Schmidt'schen* Rechnung zu grunde liegende Voraussetzung (24) einige Wahrscheinlichkeit wenigstens angenäherter Existenz vorhanden ist, so spricht die oben konstatierte Übereinstimmung zu gunsten einer Abplattung um  $1/298$  herum, zu ungunsten aber von  $1/289$ .

Die Hypothese (24), welche *Ed. Schmidt* 1821 anwandte, wird in der Regel mit dem Namen *Laplace* verbunden, da *Laplace* dieselbe in einer 1820 publizierten und 1818 verfaßten Abhandlung (*Mém. de l'Ac. de France*), sodann 1825 im 5. Bde. der *Méc. cél.* benutzte; (vergl. daselbst S. 15 und 16, sowie S. 48—53). *Laplace* erwähnt aber, daß *Legendre* bereits 1789 (*Mém. de l'Ac. de France*) von der Formel (24\*) ausgegangen sei, um einen Ausdruck für die Abplattung herzuleiten. Man vergl. auch kritische Bemerkungen von *Young* in den *Phil. Transact.* 1819 S. 84 u. ff. Nach *Newcomb*, *Populäre Astronomie*, Ausgabe von Engelmann, S. 333, hat übrigens *H. Pfaff* gefunden, daß die Zunahme der Dichtigkeit nach innen sich allein durch den Druck erklären läßt. Auch *Laplace* sagt bei Annahme der Relation (24), daß dabei das Erdinnere als aus einer Substanz bestehend gedacht wird. Hierzu kann man bemerken, daß im Erdinnern, falls eine wahrscheinlich bedeutende Hitze herrscht, Dissociation der Stoffe eintritt, was der Annahme einer einzigen Substanz günstig ist.

*Ivory* behandelt im *Phil. Magazine* 1825 Bd. 66 S. 321—329 die Frage nach der Relation von Dichtigkeit und Abplattung in sehr übersichtlicher Weise.

Ähnliche Fragen wie *Laplace*, *Ivory* und *Schmidt* behandelt auch schon *Clairaut* in seiner *Figure de la Terre*.

Bei allen diesen Untersuchungen von *Clairaut*, *Legendre*, *Laplace* und *Ivory* ist aber die Kenntnis von  $(C - A) : C$  noch nicht verwertet.

Die Bedingungsgleichung, welche aus der Division der Gleichungen (11) und (12) S. 484 folgt und die also der Ausnutzung des Ergebnisses der Präzession und Nutation für  $(C - A) : C$  zu Schlüssen auf die Beziehung zwischen Abplattung und Dichtigkeit entspricht, stellte zwar bereits *d'Alembert*

in seinen *Recherches sur la Précession des Equinoxes* 1749 auf (nach *Todhunter, History of Attraction*, Bd. 1 S. 264); jedoch gelangte er noch zu widersprechenden Resultaten, weil die Abplattung der Meeresfläche nach den Gradmessungen damals sehr irrig, zu  $\frac{1}{174}$ , angegeben wurde, zufolge seiner Rechnungen aber  $\alpha_0 < \frac{1}{236}$  sein mußte, falls die Voraussetzung über die Schichtung im Innern richtig war.

Die für verschiedene Annahmen über  $\Theta$  mit der erwähnten, aus  $(C-A):C$  folgenden Bedingungsgleichung verträglichen Werte der Abplattung  $\alpha_0$  der Meeresfläche untersucht *Laplace* in der *Méc. cél.* t. 2 l. 5 p. 352 und t. 5 l. 9 p. 46. Diese Gleichung giebt mit Rücksicht auf die Relation (12) S. 480, worin  $a' = a_0$  zu setzen ist, sowie mit Rücksicht auf (7) und (9) S. 483:

$$\frac{C-A}{C} = \left(\alpha_0 - \frac{\tau}{2}\right) \alpha_0^2 \int_0^{\alpha_0} a^2 \Theta da : \int_0^{\alpha_0} a^4 \Theta da. \quad (25)$$

*Laplace* folgert hieraus als Abplattungsgrenzen  $\frac{1}{304}$  und  $\frac{1}{376}$ . Für die obere Grenze, wobei  $\Theta$  konstant angenommen ist, würde man mit Rücksicht auf den jetzt genauer bekannten Wert  $(C-A):C = 0,00327$  nunmehr  $\frac{1}{270}$  zu setzen haben. Nimmt man jedoch das Gesetz (24\*) für  $\Theta$ , so folgt nach *Thomson und Tait, Handbuch*, I, 2, S. 392–401  $\alpha_0 = \frac{1}{297}$ , also wieder sehr nahe der oben von uns benutzte Wert, wie es zufolge der Übereinstimmung unserer Rechnungsergebnisse mit denjenigen von *Ed. Schmidt* sein muß.

In der Zeitschr. für Math. u. Physik von *Schlömilch* 1870 Bd. 15 S. 293 weist *R. Heger* nach, wie es kommt, daß die wirkliche Abplattung der Erde der oberen Grenze sehr nahe liegt. Es beruht darauf, daß im Falle ähnlicher elliptischer Schichtung  $(C-A):C$  vom Dichtigkeitsgesetz ganz unabhängig ist und also die Annahme  $\Theta = \text{Konst.}$  dasselbe für  $\alpha_0$  giebt, wie jedes andere Dichtigkeitsgesetz. Die noch vorhandene Differenz zwischen  $\frac{1}{295}$  und  $\frac{1}{270}$  ist also auf Rechnung der Änderung der Abplattung nach innen zu setzen.

Welchen Aggregatzustand das Innere der Erde gegenwärtig hat, ist noch nicht aufgeklärt. Die Ansichten stehen sich zur Zeit diametral gegenüber. *A. Ritter* folgert aus der mechanischen Wärmetheorie einen gasförmig-flüssigen Zustand (*Wiedemanns Annalen* 1878 Bd. 5, S. 422), während *William Thomson* und *G. H. Darwin* aus den Erscheinungen der Präzession und Nutation und dem Mangel von Fluten des Erdkörpers auf eine Festigkeit schließen, die bei irdischen Stoffen sonst unbekannt ist (vergl. 5. Kap. S. 438). Eine erhebliche Festigkeit ist nach *G. H. Darwin* auch nötig, damit die Kontinentalmassen getragen werden. Vielleicht beruht der Widerspruch nur darauf, daß bei sehr hohen Temperaturen und starken Drucken der Aggregatzustand, obwohl wir ihn gasförmig nennen, doch nicht mehr die wesentliche Eigenschaft der Leichtbeweglichkeit der Gase hat. Übrigens sind die Untersuchungen sowohl in theoretischer als empirischer Hinsicht keineswegs als abgeschlossen zu betrachten.\*)

Die betreffenden Untersuchungen finden sich, abgesehen von *Hopkins'* schon im 5. Kap. S. 438 erwähnten Abhandlungen, in den *Phil. Transactions* seit 1863 (mit *Thomsons Abl. über die Festigkeit der Erde*), besonders in den letzten Jahrgängen; ferner in *Thomson und Tait, Natural*

\*) Man vergl. über diese Fragen auch die umfassende Abhandlung von *Zöppritz* im *Geographischen Jahrbuch* 8. Bd. 1880.

*Philosophy* und in *Thomson und Tait, Handbuch*, I, 2, S. 406 u. ff. Zahlreiche Abhandlungen, Notizen und Auszüge giebt auch in den letzten beiden Decennien das *American Journal of Science and Arts*. Vergl. besonders Bd. 12 1876 S. 336—354 Thomsons Rede auf der Glasgower Versammlung der *British Association*; ferner *J. D. Dana* Bd. 5 1873 S. 423 und Bd. 6 1874 S. 6, 104 und 162, sowie *G. H. Darwin* Bd. 17 1879 S. 320, Bd. 22 1881 und Bd. 24 1882. Man sehe auch *Delaunay* in den *Comptes rendus* 1868 Bd. 67 S. 65 und *Pratts* Entgegnung im *Phil. Magazine* 1870 Bd. 40 S. 10; ferner *H. Hennessys* mit *Delaunays* übereinstimmende Ansichten in den *Comptes rendus* Bd. 72 1871 S. 250 und im *Phil. Magazine* 1878 Bd. 6 S. 263 oder *American Journal* 1878 Bd. 16 S. 461.

Wenn die Massenverteilung im Erdinnern nach dem oben Mitgeteilten sehr gut der Voraussetzung eines flüssigen Zustandes entspricht, und wenn ferner die Momentanaxe der Erde sehr nahe Hauptaxe der Trägheit ist, so vermag dies seine Erklärung nicht nur darin zu finden, daß die Erde in früheren Zeiten flüssig war, sondern auch wohl darin, daß gegenwärtig das Erdinnere trotz grosser Festigkeit doch nicht fest genug ist, um dauernd den Spannungen zu widerstehen, welche erhebliche Abweichungen von diesen Lagenverhältnissen mit sich bringen würden.

§ 13. Die Schwerkraft im Erdinnern. Wenn wir die Erde als ein homogen geschichtetes Rotationssphäroid betrachten, für dessen Schichten sich Dichtigkeit und Abplattung nach Maßgabe der Formeln (22) des vorigen Paragraphen ändern, so können wir auch angeben, wie sich die Schwerkraft im Innern verhält. Bei dieser Betrachtung wollen wir aber zur Vereinfachung die Schichten als konzentrische Kugelflächen annehmen, da sie nur den Zweck einer allgemeinen Orientierung hat. Wir knüpfen deshalb auch nicht an die Potentialentwicklung in § 10 an, sondern entwickeln direkt.

Die Anziehung einer unendlich dünnen Kugelschale vom Radius  $a$  und der Dichtigkeit  $\Theta$  auf einen Punkt außerhalb im Zentrumsabstand  $a'$  ist gegeben durch den Ausdruck

$$\frac{4\pi k^2}{a'^3} a^2 \Theta da.$$

Hieraus folgt als Anziehung einer geschichteten Kugel vom Radius  $a'$  auf einen Punkt ihrer Oberfläche der Ausdruck

$$\frac{4\pi k^2}{a'^3} \int_0^{a'} a^2 \Theta da.$$

Da die Vernachlässigung der Abplattung diejenige der Zentrifugalkraft mit sich führt, da ferner die Anziehung von homogenen Kugelschichten auf innere Punkte des Hohlraumes null ist, so entspricht der vorstehende Ausdruck auch der Schwerkraft  $g$  für einen Punkt im Innern einer geschichteten Kugel vom Radius  $a_0$  im Zentrumsabstand  $a' \leq a_0$ . Setzen wir nun nach (22) S. 487:

$$\Theta = \Theta_0 \left\{ 1 - 1,04 \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 + 0,275 \left( \frac{a}{a_0} \right)^4 \right\},$$

so ergibt sich, wenn wir den Strich an  $a$  weglassen:

$$g_a = 4\pi k^2 \Theta_c a \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1,04}{5} \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 + \frac{0,275}{7} \left( \frac{a}{a_0} \right)^4 \right\}, \quad (1)$$

$$a \leq a_0.$$

Die Veränderung dieses Ausdruckes mit  $a$  wird gegeben durch den Differentialquotienten von  $g$  nach  $a$ , für dessen negativen Wert aus (1) folgt:

$$-\frac{dg_a}{da} = 4\pi k^2 \Theta_c \left\{ -\frac{1}{3} + \frac{3,12}{5} \left( \frac{a}{a_0} \right)^2 - \frac{1,375}{7} \left( \frac{a}{a_0} \right)^4 \right\}. \quad (2)$$

Derselbe ist, wie leicht zu erkennen, für  $a = a_0$  positiv, d. h. *die Schwerkraft nimmt zunächst zu, wenn man sich von der Erdoberfläche nach der Tiefe bewegt\**). Der Ausdruck (2) wird aber gleich null für

$$a = 0,82 a_0. \quad (3)$$

*Die Zunahme dauert somit bis zur Tiefe 0,18 des Erdradius an, wo die Schwerkraft ein Maximum (gleich  $1,05 g_0$ ) erreicht, um von da an stetig abzunehmen bis zum Mittelpunkt.*

*Ed. Schmidt untersucht Bd. 1 seiner math. u. phys. Geographie S. 360 bis 364 den Verlauf der Schwerkraft im Innern nahe der Oberfläche genauer und findet ebenfalls eine Zunahme, deren Existenz man nicht immer beachtet hat.*

**§ 14. Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde aus der Kombination von Beobachtungen der Schwerkraft auf und unter der Erdoberfläche.** Wir nehmen an, daß an zwei über einander liegenden Punkten, welche sich in der Nähe der Erdoberfläche befinden und durch eine Erdscholle getrennt sind, die Schwerkraft beobachtet sei; sollten die beiden Punkte nicht genau vertikal übereinander liegen, so ist wegen der Veränderlichkeit der Schwere mit der geographischen Breite auf gleiche Breite zu reduzieren.  $P_1$  liege um  $h$  über  $P_2$ . Wenn nun  $P_2$  sich nicht unterhalb des Meeresniveaus befindet, so können wir den Unterschied der Schwerkraft  $g_1$  und  $g_2$ , abgesehen von der zwischenliegenden Erdscholle und sonstigen Massenerlagerungsanomalieen, nach den Formeln (17) und (18) des § 20 im 2. Kap. S. 97 berechnen:

$$g_{2, \text{Teil}} - g_1 = g_0 \cdot \frac{2h}{R} \left( 1 + \frac{2}{3} \alpha_0 + \epsilon_0 - 2\alpha_0 \sin^2 B \right), \quad (1)$$

\*) An der Oberfläche wird der Wert des Differentialquotienten gleich  $-0,57 g/a$ , genau so groß wie Formel (4) in § 26 des ersten Kapitels für  $\Theta_i = 2,66$  ergibt. Selbstverständlich hat der Wert des Differentialquotienten in Wirklichkeit an der Erdoberfläche sehr verschiedene Beträge, abhängig von der lokalen Beschaffenheit der Dichtigkeit der Massen in der Umgebung des betreffenden Ortes.

wobei

$$g_0 = \frac{Mk^2}{R^2} \left( 1 + \frac{1}{3} a_0 - \frac{3}{2} \epsilon_0 \right) (1 + b_0 \sin^2 B) \quad (2)$$

die Schwerkraft im Meeresniveau ist.

Befindet sich zwischen den Punkten eine Scholle von der Form einer weitausgedehnten Platte mit der Dichtigkeit  $\Theta$ , so unterscheiden sich  $g_2$  und  $g_1$  noch um die doppelte Anziehung der Scholle auf einen der Punkte; nach § 1 (2) im dritten Kapitel S. 141 ist:

$$g_2 - g_1 = -4\pi k^2 \Theta h, \quad (3)$$

oder mit Benutzung von (2) und der Relation  $M = \frac{4}{3} \pi \Theta_m R^3$  umgeformt:

$$g_2 - g_1 = -g_0 \cdot \frac{3h\Theta}{R\Theta_m} \left( 1 + \frac{3}{2} \epsilon_0 - \frac{1}{3} a_0 - b_0 \sin^2 B \right). \quad (3^*)$$

Der totale Unterschied von  $g_2$  und  $g_1$  wird mit Rücksicht auf (1) und (3) hiernach gegeben durch die Formel:

$$\frac{g_2 - g_1}{g_0} = \frac{2h}{R} \left\{ \frac{1 + \epsilon_0 + \frac{2}{3} a_0 - 2a_0 \sin^2 B}{- \frac{3\Theta}{2\Theta_m} \left( 1 + \frac{3}{2} \epsilon_0 - \frac{1}{3} a_0 - b_0 \sin^2 B \right)} \right\}. \quad (4)$$

Mit Rücksicht auf die große Unsicherheit, die  $\Theta$  jederzeit anhaftet, kann man dafür einfacher setzen:

$$\frac{g_2 - g_1}{g_0} = \frac{2h}{R} \left( 1 - \frac{3\Theta}{2\Theta_m} \right). \quad (4^*)$$

Hiernach ist

$$\Theta_m = \frac{3\Theta}{2} : \left\{ 1 - \frac{g_2 - g_1}{g_0} \cdot \frac{R}{2h} \right\}. \quad (5)$$

Diese Formel ist auch noch ausreichend, wenn  $h$ , die Höhe von  $P_1$  über  $P_2$ , zum Teil oder ganz unterhalb des Meeresniveaus liegt. In diesem Falle denken wir uns durch  $P_2$  eine zur Meeresfläche ähnliche Fläche gelegt. Sehen wir nun einstweilen von den außerhalb dieser letzteren Fläche liegenden Massen ab, so gilt (1) mit (2) wieder für die Differenz  $g_2 - g_1$ , wenn man  $M$  auf den inneren Körper und  $a_0$ ,  $\epsilon_0$ ,  $b_0$ ,  $B$  und  $R$  auf irgend eine Niveaufläche bezieht, die der Meeresfläche nahe liegt, also nahezu denselben mittleren Radius  $R$  hat, deren Gestalt aber nur von der Anziehung des inneren Körpers abhängt. Da nun  $h$  nicht erheblich ist im Verhältnis zu  $R$  (gegenwärtig im Maximum 1000<sup>m</sup>, wovon aber nur etwa die Hälfte unterhalb des Meeresniveaus), so wird  $M$  für den inneren Körper noch um weit weniger als  $1/1000$  von der Masse des ganzen Erdkörpers abweichen (für 637<sup>m</sup> knapp  $1/10000$ ). Es werden damit auch nur sehr geringe Änderungen in  $a_0$ ,  $b_0$  und  $\epsilon_0$ , sowie  $B$  verknüpft sein; man kann daher wieder



(1) und (2) anwenden und mit diesen Formeln so weiter rechnen, wie oben geschehen ist.

Was nun Formel (3) anbetrifft, den zweiten Teil der Differenz  $g_2 - g_1$ , welcher von der zwischen beiden Punkten liegenden Erdscholle herrührt, so läßt sich auch für diesen die Gültigkeit nachweisen. Nehmen wir an,  $h'$  sei derjenige Teil von  $h$ , der über dem Meeresniveau liegt,  $h''$  der unterhalb liegende. Ist das Terrain weit hin eben und horizontal und hat die Masse der Erdscholle die Dichtigkeit  $\Theta$ , so giebt der obere Teil der Erdscholle von der Dicke  $h'$  einen Anteil an  $g_2 - g_1$  gleich

$$- 4\pi k^2 \Theta h'.$$

Für den unteren Teil  $h''$  müssen wir bedenken, daß es sich dabei um eine Masse handelt, die zwischen der Meeresfläche und der durch  $P_2$  gelegten Fläche liegt und sich über die ganze Erdoberfläche erstreckt. Größtenteils wird diese Masse aus Wasser bestehen. Nehmen wir also zunächst dieselbe als eine von zwei ähnlichen Ellipsoiden begrenzte Wasserschicht an, so ist ihr Einfluß auf  $g_2$  gleich null (2. Kap. § 33 S. 130), auf  $g_1$  aber wie für eine Kugelschale sehr nahe gleich  $4\pi k^2 h''$ , also auf  $g_2 - g_1$  gleich

$$- 4\pi k^2 h''.$$

Will man hierbei auf die elliptische Gestalt Rücksicht nehmen, so hat man vom Ausdruck (8) § 31 S. 125 auszugehen,  $v$  für eine Schale durch Differentiation nach  $a$  und dann die radiale Anziehung durch Differentiation von  $v$  nach  $r'$  herzuleiten. Man findet aber bis auf Bruchteile der Ordnung  $\alpha$  incl. genau das frühere Resultat.

Da zwischen  $P_1$  und  $P_2$  die Erdschicht die Dichtigkeit  $\Theta$  hat, so ist nun noch der Anteil einer weitausgedehnten Platte von der Dichtigkeit  $\Theta - 1$  und der Dicke  $h''$  an  $g_2 - g_1$  zu bilden; er beträgt:

$$- 4\pi k^2 (\Theta - 1) h''.$$

Die drei Anteile zusammen geben wieder  $- 4\pi k^2 \Theta h$ , sodaß wir zu denselben Formeln wie früher gelangen.

Wir haben bisher die zwischen  $P_1$  und  $P_2$  befindliche Scholle als weitausgedehnte, ebene Platte von der Dicke  $h$  betrachtet. Die sphärische Gestalt dieser Platte hat in der That keinen nennenswerten Einfluß. Es ist nämlich nach dem 3. Kap. § 4 S. 145 für eine unendlich dünne sphärische Platte vom Krümmungsradius  $r$ , der Dicke  $dr$  und dem halben Zentriwinkel  $\Psi$  die radiale Anziehung auf einen Punkt  $P_1$ , der auf dem zentralen Strahl im Abstand  $r'$  vom Kugelmittelpunkt aufserhalb liegt, gleich

$$2\pi k^2 \Theta \frac{r^2}{r'^2} dr \left\{ 1 - \frac{r' \cos \Psi - r}{E_1} \right\}$$



für  $E_1 = \sqrt{r^2 + r_1'^2 - 2rr_1' \cos \Psi}$ . Liegt er dagegen innerhalb im Abstand  $r_2'$  vom Kugelmittelpunkt, so ist die radiale Anziehung nach innen gleich

$$- 2\pi k^2 \Theta \frac{r^2}{r_2'^2} dr \left\{ 1 + \frac{r_2' \cos \Psi - r}{E_2} \right\}$$

für  $E_2 = \sqrt{r^2 + r_2'^2 - 2rr_2' \cos \Psi}$ . Der Einfluß der Plattenanziehung auf  $g_2 - g_1$  ist also gleich

$$- 2\pi k^2 \Theta r^2 dr \left\{ \frac{1}{r_2'^2} + \frac{1}{r_1'^2} + \frac{r_2' \cos \Psi - r}{r_2'^2 E_2} - \frac{r_1' \cos \Psi - r}{r_1'^2 E_1} \right\}.$$

Diesen Ausdruck wandeln wir um, indem wir in den beiden letzten Gliedern setzen  $r_1' = r_2' + (r_1' - r_2')$  und  $E_1 = E_2 + (E_1 - E_2)$ , und  $r_1' - r_2'$  sowie  $E_1 - E_2$  als differentiale Änderungen betrachten. In den Faktoren von  $r_1' - r_2'$  und  $E_1 - E_2$  können wir dann  $r_1' = r_2' = r$  nehmen und den Index von  $E_1$  und  $E_2$  weglassen. Bezeichnen wir  $r_1' - r_2'$  mit  $h$ , so folgt:

$$- 2\pi k^2 \Theta r^2 dr \left\{ \frac{1}{r_2'^2} + \frac{1}{r_1'^2} - \frac{1 + 2\sin^2 \frac{\Psi}{2}}{r^2} \frac{h}{E} + \frac{2(E_2 - E_1) \sin^2 \frac{\Psi}{2}}{r E^2} \right\}.$$

Integriert man von  $r = r_2'$  bis  $r_1'$ , so kann man für die beiden letzten kleinen Glieder der Parenthese konstante Mittelwerte setzen und findet mit Rücksicht auf die geringe Größe von  $h$  im Vergleiche zu  $r_1'$  und  $r_2'$ , sowie mit Benutzung der Näherungsformel  $E = 2r \sin \frac{\Psi}{2}$  behufs Elimination von  $\frac{\Psi}{2}$ :

$$- 4\pi k^2 \Theta h \left\{ 1 - \frac{h}{2E} - \frac{h}{4r} \frac{E}{r} + \frac{E_2 - E_1}{4r} \right\}. \quad (6)$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß die Krümmung der Erde nicht berücksichtigt zu werden braucht, sobald für die weitausgedehnte Platte, insofern man sie als ebene Platte betrachtet, der Ausdruck  $- 4\pi k^2 \Theta h$  genügt. Denn dieser Ausdruck ist auch für die ebene Platte nicht streng und heißt genauer:

$$- 4\pi k^2 \Theta h \left( 1 - \frac{h}{2E} \right). \quad (6^*)$$

Um anstatt dessen  $- 4\pi k^2 \Theta h$  anwenden zu können, muß  $h : 2E$  hinlänglich klein sein. Ist dies aber der Fall, so genügt dieser einfache Ausdruck auch anstatt (6), da das zweite und dritte der kleinen Glieder in der Parenthese von (6) wegen  $(E_1 - E_2) < h$  immer bedeutungslos sind.

§ 15. Fortsetzung: Unebenheiten des Terrains. Wir haben jetzt nachgewiesen, daß die Formel (5) genügt, auch mit Rücksicht auf die Krümmung der mathematischen Erdoberfläche, sobald zwischen

$P_1$  und  $P_2$ , den Beobachtungspunkten auf und unter der Erdoberfläche, liegt eine homogene Erdscholle, die den Charakter einer weitausgedehnten, gleichstarken Platte hat. Befindet sich der abfallende Rand der Platte im Abstand  $E \geq 50h$ , so ist nach (6\*) der Fehler der Formel (5) sicher kleiner als 1%.

Um zu erkennen, welchen Einfluss ungleiche Stärken der Erdscholle haben, betrachten wir zunächst den Fall, daß die Dicke einer gleichstarken Platte geringer ist als der Punktabstand  $P_1P_2 = h$ , indem etwa  $P_1$  sich in freier Luft über dem Terrain befindet. Für diesen Fall ist mit Rücksicht auf § 1 (2) im 3. Kap. S. 141 an Stelle von (6\*) zu setzen:

$$-4\pi k^2 \Theta(h - h') \left(1 - \frac{h}{2E}\right), \quad (1)$$

worin  $h'$  die Erhebung von  $P_1$  über dem Terrain bezeichnet, Fig. 80.

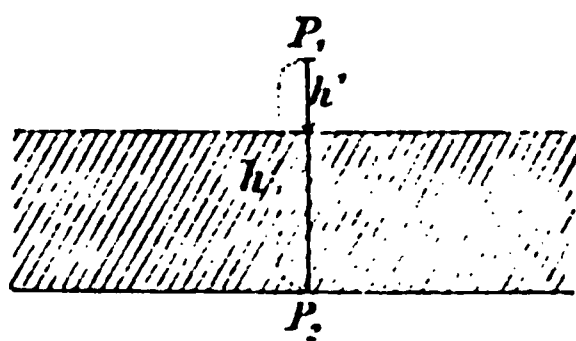


Fig. 80.

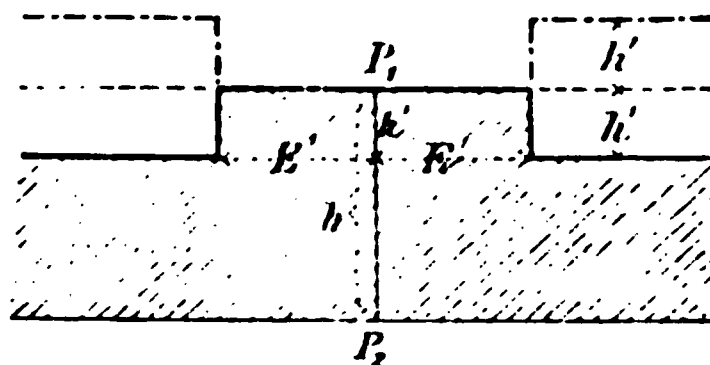


Fig. 81.

Wenn sich die Platte in dieser Stärke  $(h - h')$  weit genug ausdehnt, um  $h : 2E$  vernachlässigen zu können, so wird man anstatt (1) setzen:

$$-4\pi k^2 \Theta(h - h'). \quad (1^*)$$

Befindet sich nun bis zur Entfernung  $E'$  unterhalb  $P_1$  gewissermaßen noch eine zweite Platte, Fig. 81, so giebt diese für sich:

$$-4\pi k^2 \Theta h' \left(1 - \frac{h}{2E'}\right). \quad (2)$$

Dies mit (1\*) vereinigt, führt zu dem Ausdruck:

$$-4\pi k^2 \Theta h \left(1 - \frac{h'}{2E'}\right). \quad (3)$$

Ganz denselben Ausdruck erhält man für den Fall, welchen Fig. 81 punktiert andeutet, wobei das in der Umgebung von  $P_1$  bis zum Abstände  $E'$  ebene Terrain in größerer Entfernung sich um  $h'$  erhebt, nur muß — entsprechend der entgegengesetzten Richtung von  $h'$  — das zweite Glied in der Klammer von (3) positiv eingeführt werden.

Die Formel (3) genügt vollkommen, um zu erkennen, ob der Einfluss von Unebenheiten klein genug ist, vernachlässigt werden zu dürfen. Reicht die Genauigkeit von 1% in der Berechnung des An-

teiles von  $g_2 - g_1$ , welcher aus der Schollenanziehung hervorgeht, aus, so brauchen Unebenheiten  $h' < 0,02 E'$  nicht beachtet zu werden. Hierbei ist überdies noch angenommen, daß sie sich über den ganzen Umkreis erstrecken; ist dies nicht der Fall, so kommt von  $h'$  nur ein entsprechender Bruchteil zur Geltung.

Alle anderen Unebenheiten müssen besonders berücksichtigt werden, d. h. man muß ihre Anziehungen auf jeden der beiden Punkte besonders berechnen. In dieser Beziehung sowie bezüglich der Behandlung des Falles ungleicher Massendichtigkeit verweisen wir auf den § 18 im 3. Kap. S. 169.

§ 16. Fortsetzung: Zahlwerte. Eingehende Versuche, welche nach den Formeln des § 14 behandelt werden müssen, hat 1854 *Airy* angestellt\*). Er beobachtete in dem Kohlenrevier von *Durham* in der Grube *Harton*. Dabei war  $h = 1256$  Fuß engl.  $= 382,8^m$ ; ferner fand sich

$$\frac{g_2 - g_1}{g_0} = 0,00005185 ,$$

was einem täglichen Unterschied von  $2,24''$  für ein unveränderliches Pendel, welches nahezu Sekundenschwingungen macht, entspricht. Die Unebenheit des Terrains wurde bis zur Entfernung von drei englischen Meilen (also weit genug) in Rechnung gezogen; infolge derselben vermindert sich der aus Formel (3) S. 494 folgende zweite Teil  $g_2 - g_1$  etwas, was sich dadurch berücksichtigen läßt, daß  $\Theta = 2,50$  in Formel (5) S. 494 um  $1/280$ , d. h. ganz unerheblich, verkleinert wird. Es folgt schließlich

$$\Theta_m = 6,57 .$$

Aus der Übereinstimmung der Resultate folgt der wahrscheinliche Fehler zu  $\pm 0,02$ . Wenn gleichwohl die Abweichung von demjenigen Werte, den man nach anderen zuverlässigen Beobachtungen für den wahrscheinlichsten halten muß, nämlich  $5,60$ , sehr groß ist, so liegt dies einesteils vermutlich an versteckten Beobachtungsfehlern, andernfalls an dem Einfluß von Unregelmäßigkeiten in der Dichtigkeit der Massen unterhalb der unteren Station  $P_2$ . Beide Ursachen können recht wohl jede allein zur Erklärung der Differenz herangezogen werden. Berechnet man nämlich aus Formel (4\*) S. 494 mit  $\Theta_m = 5,6$  die Differenz  $g_2 - g_1$ , so folgt

$$\frac{g_2 - g_1}{g_0} = 0,000040 \text{ anstatt } 52 .$$

Der Unterschied  $g_2 - g_1$  beträgt also nur  $0,000012$  Bruchteile der Schwerkraft, was etwa  $0,012$  Millimeter in der Länge des Sekundenpendels und  $0,5''$  in der täglichen Schwingungsdauer giebt.

\*) *Phil. Transact.*, 1856 I, Bd. 146 S. 297—355.

Eine solche Differenz ist aber bei der Ungunst der Beobachtungsumstände in Gruben recht wohl aus Beobachtungsfehlern erklärbar. Andererseits würde eine Vermehrung der Dichtigkeit in einem nahezu kugelförmigen Raume unterhalb des Beobachtungsortes den Mehrwert von  $g_2 - g_1$  erklären, wenn der Durchmesser des Raumes mindestens einige Kilometer und der Dichtigkeitsüberschuß etwa  $\frac{2}{3}$  der Dichtigkeit des Wassers betrüge.

Ganz unzutreffend ist *Haughtons* Berechnung von  $\Theta_m = 5,48$  aus den *Airyschen* Messungen (*Pogg. Ann.* 1856 Bd. 99 S. 332), weil er für  $\Theta$  denjenigen Wert einführt, der im Mittel für die ganze Schale zwischen den Niveaulächen von  $P_1$  und  $P_2$  *um die ganze Erde herum* gilt. Dagegen dürfte das Resultat der Berechnung von *F. Folie*, welcher eine Zerlegung der Massen in zwei Teile verschiedener Dichtigkeit vornahm [nach den *Fortschr. der Physik* von 1873 Bd. 29 S. 132] und 0,117 weniger als *Airy* findet, Beachtung verdienen. Freilich bestätigt es auch nur die Ansicht, daß durch verschärfte Berücksichtigung der Massenanziehung das *Airy*-sche Resultat nicht erheblich zu ändern ist.

Im Jahre 1882 hat *R. v. Sterneck* mit Benutzung des 1000<sub>m</sub> tiefen *Adalbertschachtes* zu *Příbram* in Böhmen ebenfalls Beobachtungen zur Bestimmung von  $\Theta_m$  und zur Ermittlung der Änderung der Schwerkraft mit der Tiefe ausgeführt\*). Diese mit einem unveränderlichen Pendel angestellten Beobachtungen wurden 1883 wiederholt, wobei auf eine schärfere Bestimmung des Ausdehnungskoeffizienten und auf eine vollständige Elimination des Uhganges in der Differenz der Ergebnisse für die Stationen auf der Erdoberfläche und in der Tiefe Rücksicht genommen wurde, was in der That zur Folge hatte, daß die in verschiedenen Tiefen erhaltenen Endwerte weit besser übereinstimmten als 1882.

Die Beobachtungen von 1883 geben unter Weglassung einiger, jedenfalls durch größere Fehler entstellten Reihen von Messungen nach S. 89 VII (mit teilweiser Rücksicht auf S. 86 — 88), abgesehen von den irrigen Korrekturen wegen Zentrifugalkraft (S. 90) und mit Verbesserung zweier kleinen Rechenfehler:

	Seehöhe	Schwingungszeit	Relat. Schwere
Oberfläche	+ 509,1 <sup>m</sup>	0,5001638 <sup>s</sup>	1,0000000
9. Lauf	+ 242,6	1530	1,0000432
20. Lauf	— 6,9	1535	1,0000412
26. Lauf	— 238,8	1475	1,0000652
30. Lauf	— 463,4	1418	1,0000880

\*) Mitteilungen des k. k. militär-geographischen Instituts; Bd. 2 und Bd. 3, Wien 1882 und 1883.

Mit  $\Theta_0 = 2,75$  folgt hieraus, abgesehen von dem stark abweichenden Ergebnis des 9. Laufes, nach Formel (5) § 14 S. 494:

$$\Theta_m = 5,54 \quad 5,71 \quad 5,80 ,$$

welchen Werten mit Rücksicht auf Beobachtungsanzahl und Höhendifferenz die Gewichte

$$1 \quad 2 \quad 2$$

entsprechen, sodaß im Mittel  $\Theta_m = 5,71$  wird. Die Abhandlung giebt 5,77.

Diese Zahl wird sich vielleicht noch etwas modifizieren, wenn die Terrainunebenheiten anstatt nur bis auf ca.  $2,5^{km}$  auf größere Entfernung hin berücksichtigt werden.

Die weiteren Schlüsse der Abhandlung von 1883 bezüglich der Änderung von  $g$  und  $\Theta$  im Erdinnern sind illusorisch.

Wir erwähnen noch, nach *Sternecks* Abh. von 1882 S. 79 u. citierend, daß *Carlini*, *Biot* und *Mathieu* aus Pendellängen in Bordeaux und auf dem Mont-Cenis 1820–22, mit Rücksicht auf *Giulios* Revision,  $\Theta_m = 4,95$  fanden.

*Mendenhall* bestimmte kürzlich durch Beobachtungen in Tokio und auf dem Fusijama  $\Theta_m = 5,77$ ; *American Journal* Bd. 20, 1881, S. 98–103.

## Siebentes Kapitel.

### Das geometrische Nivellement.

§ 1. Die unmittelbaren Resultate geometrischer Nivellements. Ein einfaches Nivellement besteht bekanntlich im wesentlichen darin, daß man sich zwischen zwei Punkten mit dem Nivellierinstrument aufstellt und mittelst desselben nach jedem der beiden Punkte eine horizontale Visur giebt, welche an einem in den Punkten vertikal aufgestellten Maßstab (der Nivellierlatte) die Zielhöhen abschneidet. Man pflegt dann die Differenz der letzteren als Höhenunterschied der beiden Punkte anzunehmen. Läßt sich diese Angabe nicht mit einer Aufstellung erreichen, so schaltet man Zwischenpunkte ein und nimmt ein zusammengesetztes Nivellement vor. Hier bildet man das Resultat als Summe der Einzelunterschiede.

Beachtet man aber den schon im ersten Kapitel § 8 S. 10, sowie im zweiten Kapitel § 18 S. 92 berührten Umstand, daß die Niveauflächen keine Parallelfächen sind, so bemerkt man leicht eine gewisse Unbestimmtheit jenes Resultates.

Die Abweichung vom Parallelismus hat nämlich zunächst zur Folge, daß beispielsweise die Erhebung eines Punktes  $C$  auf einem Berggipfel über die Niveaufäche eines anderen Punktes  $A$  am Fuße des Berges, Fig. 82, gemessen in der Lotlinie  $CC'$  von  $C$  im allge-

meinen einen anderen Wert hat, als die Senkung von  $A$  unter die Niveaufläche von  $C$ , gemessen in der Lotlinie  $AA'$  von  $A$ . Ein von  $A$  nach  $C$  geführtes zusammengesetztes Nivellement aber giebt in der Regel weder den einen noch den andern Betrag; denn indem es die Bergeshöhe allmählich ersteigt, wird mittelst eingeschalteter Niveauflächen der Abstand der Niveauflächen von  $C$  und  $A$  weder in der einen noch in der anderen Lotlinie gemessen, so daß ein treppenförmiges Profil entsteht, mit dessen Gestalt sich das Resultat verändert. Zwei verschiedenen Profilen folgende Nivellements von  $A$  nach  $C$ , z. B. einerseits  $A.1'.2'.3'.4'.C$  und andererseits von  $A$  durch den Berg in einem Stollen bis  $B$  und über  $1''.2''.3''.4''$  nach  $C$ , werden also (abgesehen von Beobachtungsfehlern) eine Differenz zeigen können: *den Schlusfehler des Nivellementspolygones ACBA infolge nicht völligen Parallelismus der Niveauflächen.*

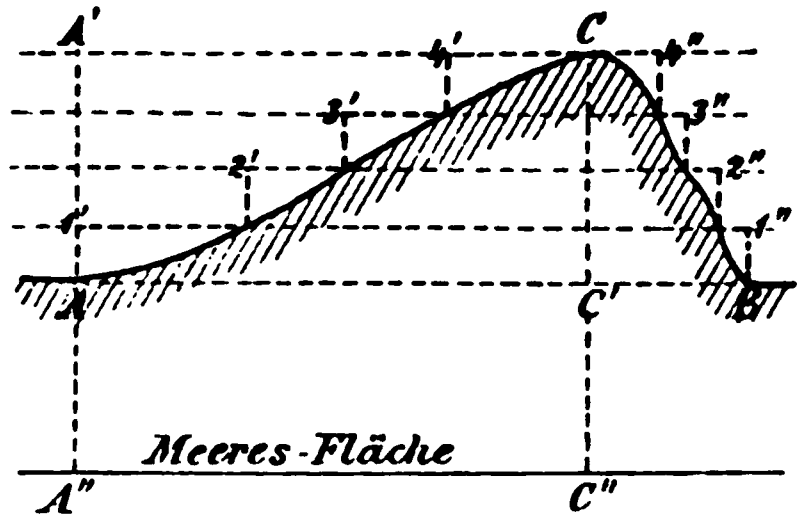


Fig. 82.

Der mathematische Ausdruck dafür ist

$$\int dh, \quad (1)$$

das Integral ausgedehnt über das geschlossene Polygon.

Wenn es nun hiernach nicht gleichgültig ist, auf welchem Wege ein geometrisches Nivellement ausgeführt wird, so muß man entweder zu jedem in gewöhnlicher Weise berechneten Resultat den Weg, das Profil, angeben — oder man muß eine andere Berechnungsweise einschlagen, welche vom Profil unabhängige Resultate giebt. Diese bietet sich durch Gleichung (2) § 8 S. 10. Darnach ist

$$W_C = W_A - \int_A^C g \, dh, \quad (2)$$

wenn  $W_C$  und  $W_A$  die Potentiale der Schwerkraft in  $C$  und  $A$  bezeichnen und die Integration über das nivellierte Profil ausgedehnt wird. Welche Form aber dieses Profil hat, ist offenbar ganz gleichgültig.

Um also klare Resultate zu erhalten, müßte man somit die Nivellements dazu benutzen, Potentialdifferenzen abzuleiten. Ob dieser Weg praktisch ist, lassen wir vorläufig dahingestellt.

Hier mag zunächst noch darauf hingewiesen werden, daß aus geometrischen Nivellements *Höhenunterschiede und Meereshöhen in Strenge eigentlich gar nicht zu finden sind*. Messen wir nämlich z. B. auf dem

Wege von  $A$  nach  $C$  irgendwo ein  $dh$  und das zugehörige  $g$ , so ist  $g dh$  die Potentialdifferenz der beiden Niveauflächen, welche  $dh$  begrenzen. In der Lotlinie  $CC'$  nun haben letztere einen anderen Abstand und die Schwere ist eine andere, jedoch dergestalt daß, wenn diese Größen bezw.  $dh_c$  und  $g_c$  nennen:

$$g dh = g_c dh_c$$

ist. Demnach wird die Höhe von  $C$  über  $A$ , gemessen in der Lotlinie  $CC'$  von  $C$ , gleich

$$CC' = \int_A^C \frac{g}{g_c} dh, \quad (3)$$

Die Schwerkraft  $g_c$  im Innern des Berges aber kann man in der Regel überhaupt nicht messen, sondern nur schätzen, so daß also  $CC'$  aus Messungen allein nicht zu erhalten ist.

Aus Vorstehendem geht auch hervor, daß man den Höhenunterschied von  $A$  und  $C$  als Unterschied der Meereshöhen  $CC''$  und  $AA''$  nicht gleich  $CC'$  setzen darf und umgekehrt aus  $AA'' + CC'$  nicht  $CC''$  findet.

**§ 2. Die strenge Reduktion der Nivellements.** Wir betrachten zunächst eine einzelne Aufstellung zwischen zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  und sehen von Refraktionswirkungen ab. Dann erfolgt,

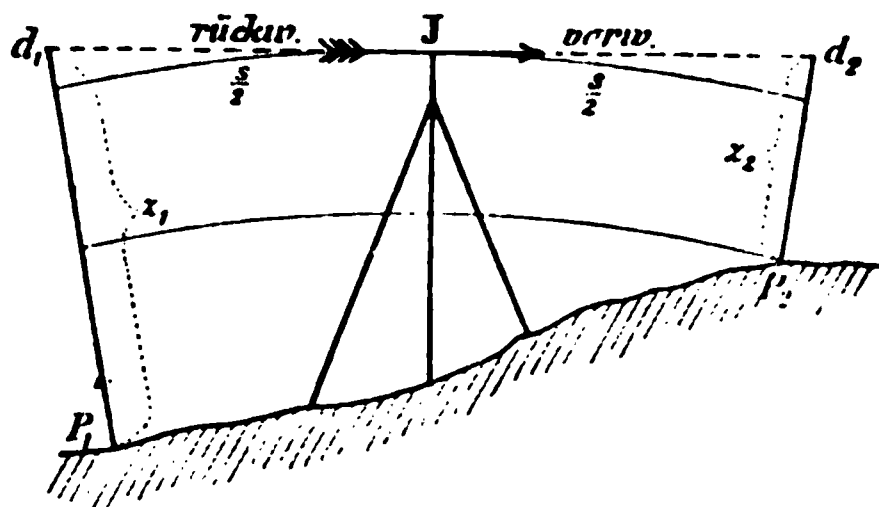


Fig. 83.

wenigstens im Prinzip, die Visur nach der Latte in  $P_1$  und in  $P_2$  horizontal, d. h. in der Tangente der Niveaufläche  $J$  der Visieraxe, Fig. 83. Nennen wir die Zielhöhen  $z_1$  und  $z_2$ , die Depressionen der Niveaufläche  $J$  gegen die horizontale Visur bei  $P_1$  und  $P_2$  bezw.  $d_1$  und  $d_2$ , endlich die Schwerk-

kräfte in der halben Höhe von  $z_1$  und  $z_2$  bezw.  $g_1$  und  $g_2$ , so ist bei der geringen Größe von  $z$  in praktischen Fällen sehr nahe die Differenz der Potentiale  $W_1$  für  $P_1$  und  $W_2$  für  $P_2$  gleich

$$W_2 - W_1 = (z_2 - d_2) g_2 - (z_1 - d_1) g_1. \quad (1)$$

Der Fehler dieser Gleichung ist so gut wie null. Denn die Schwerkraft nimmt mit der Höhe sehr nahe gleichförmig ab, wie Formel (17) S. 97 für die normale Schwerkraft zeigt und wie für die lokalen Anziehungen aus Kap. 3 § 1 S. 141 und aus Kap. 4 § 3 S. 274 folgt. Man darf daher entlang der Nivellierlatte das Integral  $g dh$  mit dem Mittelwert von  $g$  berechnen. Es wird allerdings noch vorausgesetzt, daß die gerade Latte die eigentlich nach der Lotlinie schwachge-



krümmten Abschnitte  $z_1$  und  $z_2$  richtig giebt; aber dies ist augenscheinlich bis auf eine selbst bei Anhäufung im zusammengesetzten Nivellement verschwindende Gröfse der Fall.

Aus (1) ergibt sich nun durch Transformation:

$$\begin{aligned} W_2 - W_1 = (z_2 - z_1) \frac{g_1 + g_2}{2} + (z_2 + z_1) \frac{g_2 - g_1}{2} \\ + (d_1 - d_2) \frac{g_1 + g_2}{2} + (d_2 + d_1) \frac{g_1 - g_2}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Da man bei guten Nivellements behufs möglicher Elimination der Instrumentalfehler und der Refraktion aus gleichen Zielweiten nivelliert, werden bei nahezu gleicher Krümmung der Niveaufläche  $J$  in Richtung von  $P_1$  und  $P_2$  die Depressionen nahezu gleich. Dann wird in vorstehender Gleichung das dritte Glied sehr klein. Wir nehmen vorläufig an, daß es als unerheblich anzusehen ist, werden aber später den Einfluß desselben sowohl für die normale Form der Niveauflächen als auch für charakteristische Fälle gestörter Form derselben betrachten. Er findet sich in der That verschwindend klein, wie im voraus bemerkt werden kann.

Das zweite und vierte Glied der Gleichung (1) können ebenfalls immer, auch in anbeacht ihrer Anhäufung bei zusammengesetzten Nivellements, vernachlässigt werden. Zunächst dürfen wir jedenfalls das kleinere der beiden Glieder ignorieren und uns darauf beschränken, das zweite:  $\frac{1}{2} (z_2 + z_1) (g_2 - g_1)$ , in seinem Einfluß auf ein zusammengesetztes Nivellement zu betrachten. Derselbe ist gleich der Summe vorstehender Produkte, oder angenähert gleich einem Mittelwert von  $\frac{1}{2} (z_2 + z_1)$  mal der Gesamtdifferenz  $\Delta g$  in der Schwerkraft vom Anfang bis zum Ende, falls  $g$  entlang dem Nivellement fortwährend ab- oder zunimmt.  $\frac{1}{2} (z_2 + z_1)$  setzen wir in ebenem Terrain im Maximum gleich  $3^m$  und  $\Delta g$ , indem wir uns einen ganzen Meridianquadranten nivelliert denken, gleich  $9,8 \cdot 0,0053^m$ . Hierbei wird der Einfluß auf die gesamte Potentialdifferenz gleich  $9,8 \cdot 0,016^m$  rund, mithin auf den Höhenunterschied etwa  $16^{mm}$ , was bei einer solchen Ausdehnung des Nivellements unerheblich ist. Denken wir uns ferner, um einen andern Maximalfall zu erhalten, einen Berg von  $8000^m$  Höhe nivelliert, so beträgt  $\Delta g$  nach der *Bouquerschen* Regel etwa  $9,8 : 600$ , was mit  $\frac{1}{2} (z_2 + z_1) = 2^m$  einen Einfluß von  $9,8 \cdot 0,003$  für die Potentialdifferenz und von nur  $3^{mm}$  für die Höhe ergibt.

Hiernach reduziert sich Gleichung (2) auf die folgende einfachere

$$W_2 - W_1 = (z_2 - z_1) \frac{g_2 + g_1}{2}. \quad (3)$$



Aus der Summierung aller dieser Gleichungen für das ganze nivellierte Profil folgt die gesamte Potentialdifferenz. Wir drücken dies durch die Gleichung aus:

$$\Delta W = - \sum_A^C g \cdot \delta z. \quad (4)$$

In (4) bedeutet nun  $\delta z = z_1 - z_2$  die Zielhöhendifferenz im Sinn Rückblick — Vorblick;  $g = \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$  wird in der Regel mit der Beschleunigung der Schwere am Standorte in der Höhe  $\frac{1}{4}(z_1 + z_2)$  über dem Terrain hinreichend identisch sein. Eine geringe Änderung in der Annahme des Ortes macht aber, wie man sich leicht überzeugt, nichts aus. Man kann insbesondere für  $g$  auch die mittlere Schwerebeschleunigung von  $P_1$  und  $P_2$  nehmen.

Die Anwendung der Formel (4) zur Reduktion der Nivellements stößt auf Schwierigkeiten wegen der dazu erforderlichen zahlreichen Messungen von  $g$ . Wenn es genügt, nur den normalen Teil von  $g$  zu berücksichtigen, für welchen die Formeln (17) bis (20) S. 97 gelten, so wäre die Reduktion allerdings ohne weiteres ausführbar. Nach jenen Formeln ist ausreichend genau, wenn  $\alpha = 0,00334$  und  $\tau = 0,00347$  gesetzt wird:

$$g = 9,8060 (1 - 0,00265 \cos 2B) \left\{ 1 - \frac{2H}{R} \left[ 1 + \frac{57-67 \sin^2 B}{10000} \right] \right\}, \quad (5)$$

worin  $B$  die geographische Breite und  $H$  die Meereshöhe des Ortes von  $g$  bezeichnen. Aber die Berücksichtigung des normalen Teiles von  $g$  genügt keineswegs und eine einigermaßen ausreichende Schätzung der Anomalieen in  $g$ , insbesondere auf grund der sichtbaren Massenungelmäßigkeiten der Erdoberfläche, ist wenigstens für grössere Höhenquoten nicht möglich; vergl. im 3. Kap. § 37 S. 244 und § 31 S. 228.

Nehmen wir indessen an, daß die Angaben zur Berechnung von  $\Delta W$  vorhanden sind, so würde es gewiß praktischer sein, noch den Quotienten

$$\Delta W : \mathfrak{G}$$

zu bilden und diesen als Ergebnis anzusehen, weil die  $\Delta W : \mathfrak{G}$  wieder die Bedeutung von Höhendifferenzen, aber reduziert auf die konstante Schwerkraft  $\mathfrak{G}$  unter  $45^\circ$  geographischer Breite und im Meeresspiegel, haben. Solche Höhendifferenzen sind ebenso wie die  $\Delta W$  der mechanischen Arbeit zur Überwindung der wirklichen Höhendifferenzen proportional, entbehren also auch nicht einer praktischen Bedeutung, zugleich aber stehen sie den wirklichen Höhendifferenzen äußerlich näher als die  $\Delta W$ .

Immerhin haben auch die so reduzierten Angaben den Nachteil, daß sie selbst für ganz benachbarte Punkte erst noch reduziert werden müssen, um mit den nivellierten Werten verglichen werden zu können.

Die Einführung des Potentials in die Reduktion geometrischer Nivellements zur Berücksichtigung des Nichtparallelismus der Niveauflächen (oder um einem üblichen Sprachgebrauch zu folgen: der Lotablenkung) hat bereits 1871 *Th. Wand* in seinen *Prinzipien der mathematischen Physik und Potentialtheorie* S. 129—131 angegeben. 1873 wurde die strenge Reduktion auch vom Verfasser in Bd. 81 der *Astronom. Nachr.* S. 297—300 Nr. 1939 behandelt, 1874 von *Haupt* ebenda Bd. 84 S. 49—56 Nr. 1996 und 1876 von *Bruns*, *Figur der Erde*, S. 34—42.

An diesen Orten ist, insbesondere auch vom Verfasser, im Gegensatz zu anderen Autoren hervorgehoben, daß (abgesehen von theoretischen Beispielen) die Schwerkraft sich zur strengen Reduktion besser eignet als die Lotabweichung. Vergleiche hierüber auch weiterhin § 6 dieses Kapitels.

**§ 3. Bestimmung von Meereshöhen. Der Einfluß der normalen Variation der Schwerkraft auf die Nivellementsresultate.** Im Hinblick auf die Schlußbemerkung des vorigen Paragraphen kehren wir zu der Beantwortung der Frage zurück, inwieweit sich durch Nivellements die Höhenunterschiede und Meereshöhen bestimmen lassen, um daraus die Bedeutung der unmittelbaren Nivellementsergebnisse zu erkennen. Zunächst berücksichtigen wir dabei nur den normalen Teil der Schwerkraft.

Denken wir uns, daß vom Punkte *A*, Fig. 82, S. 501 nach *C* nivelliert worden sei und es solle aus der bekannten Meereshöhe  $H_A$  von *A* mittelst eines Nivellements die Meereshöhe  $H_C$  abgeleitet werden. Dann ist auszugehen von der Relation:

$$H_C = CC' + C'C'. \quad (1)$$

Bedeutet  $\delta z$  die Zielhöhendifferenz  $z_1 - z_2$  für einen Stand des Instruments im Sinne Rückblick — Vorblick,  $g$  die Schwerebeschleunigung daselbst und  $g_C$  dieselbe zwischen den entsprechenden Niveauflächen in der Lotlinie von *C*, so folgt mit Rücksicht auf Gleichung (3) des vorigen Paragraphen:

$$CC' = \sum_A^C \frac{g}{g_C} \delta z, \quad (2)$$

worin die Summierung über das ganze Profil *AC* auszudehnen ist.

Man erhält ferner für  $C'C'$  die Gleichung:

$$C'C' = \int_0^{H_A} \frac{g_A}{g_C} dh, \quad (3)$$

indem man sich  $H_A$  in Differentiale  $dh$  zerlegt denkt und mit  $g_A$  und  $g_C$  die Schwerebeschleunigungen an der Durchschnittsstelle der  $dh$  begrenzenden Niveauflächen mit den Lotlinien von *A* und *C* bezeichnet.

Fassen wir nur die normalen Werte von  $g$ ,  $g_A$  und  $g_C$  ins Auge, so ist der Ausdruck (5) im vorhergehenden Paragraphen anzuwenden. Dabei genügt es, den Wert der geschlungenen Parenthese in (5)

gleich 1 zu setzen. Wir weisen dies für  $C'C''$  nach; indem wir hierbei extreme Verhältnisse einführen, wird der Fehler in  $CC'$  mit einbezogen.

Man erhält aus (5) in jedenfalls hinreichender Strenge zur Substitution in (3):

$$\frac{g_A}{g_C} = \frac{1 - 0,00265 \cos 2B_A}{1 - 0,00265 \cos 2B_C} \left\{ 1 - \frac{2h_A}{R} \left[ 1 + \frac{57 - 67 \sin^2 B_A}{10000} \right] + \frac{2h_C}{R} \left[ 1 + \frac{57 - 67 \sin^2 B_C}{10000} \right] \right\}. \quad (4)$$

$h_A$  und  $h_C$  bedeuten hier die Meereshöhen der Niveauflächen, welche  $dh$  begrenzen, in den Lotlinien von  $A$  und  $C$ . Diese Höhen sind selbstverständlich etwas ungleich wegen der Ungleichheit der Schwerkraft, deren wirkliche Werte hierbei natürlicherweise in betracht kommen. Im allgemeinen ist

$$h_C = \kappa h_A; \quad (5)$$

wobei  $\kappa$  einen Koeffizienten bezeichnet, der vom Verhältnis beider Schwerkraft abhängt. Hinsichtlich des normalen Wertes der letzteren kann  $\kappa$  auf der Erdoberfläche im ganzen überhaupt nur um etwa  $1/200$  von 1 abweichen. Wegen lokaler und kontinentaler Anziehungen ist die Abweichung des Wertes  $\kappa$  von 1 höchstens etwa  $1/1000$ . Diese Anomalie entspricht nämlich der Anziehung einer  $8000^m$  starken Erdschicht.

Indem wir nun (4) in (3) einsetzen, dabei in dem Produkte

$$h_C \sin^2 B_C$$

in der großen Parenthese  $\kappa = 1$  nehmen und die Integration ausführen, erhalten wir den mit Rücksicht auf die normale Schwerkraft als formell streng anzusehenden Ausdruck:

$$C'C'' = \frac{1 - 0,00265 \cos 2B_A}{1 - 0,00265 \cos 2B_C} \left\{ H_A + (\kappa - 1) \left( 1 + \frac{57}{10000} \right) \frac{H_A^2}{R} + \frac{67}{10000} (\sin^2 B_A - \sin^2 B_C) \frac{H_A^2}{R} \right\}, \quad (6)$$

worin  $\kappa$  nunmehr einen gewissen mittleren Wert von  $\kappa$  für die Höhe  $H_A$  bezeichnet. Nehmen wir zunächst für  $\kappa$  den normalen Teil nach (5) des vorigen Paragraphen mit Vernachlässigung der geschlungenen Parenthese, so geben das zweite und dritte Glied der Parenthese in (6) zusammen sehr nahe, wenn noch  $\sin^2 B_A - \sin^2 B_C$  durch

$$\sin(B_A + B_C) \sin(B_A - B_C)$$

ersetzt wird:

$$\sin(B_A + B_C) \sin(B_A - B_C) \cdot 0,012 \frac{H_A^2}{R}. \quad (7)$$

Der Faktor des Sinusproduktes ist für  $H_A = 1000^m$  rund  $2^m$ ; er wächst mit dem Quadrate der Höhe und erreicht für den bedeutenden

Wert  $H_A = 8000^m$  den Betrag  $0,12^m$ . Allein je größer die Höhe  $H_A$ , umso geringer ist immer die größtmögliche Breitendifferenz  $B_A - B_C$ , und es dürfte sich kein Beispiel finden, wo (7) mehr als einige Millimeter giebt.

Setzen wir in (6) für  $\kappa$  den Wert  $1 \pm 1/1000$  als Repräsentanten anormalen Anziehungen, so giebt dies selbst für  $H_A = 8000^m$  nur  $10^{mm}$ .

Hiernach reicht es völlig aus

$$\begin{aligned} C' C'' &= \frac{1 - 0,00265 \cos 2 B_A}{1 - 0,00265 \cos 2 B_C} H_A \\ &= H_A + 0,00531 \frac{\sin (B_A + B_C) \sin (B_A - B_C)}{1 - 0,00265 \cos 2 B_C} H_A \end{aligned} \quad (8)$$

zu setzen, umsomehr, wenn man bedenkt, daß der Koeffizient  $0,00265$  nicht ganz genau sein wird, der Ausdruck also auch deswegen etwas mangelhaft ist und zwar um

$$\sin (B_A + B_C) \sin (B_A - B_C) H_A \cdot \delta_b, \quad (9)$$

worin  $\delta_b$  den Fehler von  $b = 0,00531$  bezeichnet. Da nun  $\delta_b$  recht wohl  $0,00002$  betragen kann, so ist der Faktor des Sinusproduktes in (9) für  $H_A = 1000^m$  schon  $20^{mm}$ ; er ist überhaupt bei jedem praktisch möglichen  $H_A$  weit größer als in (7).

In gleicher Weise kann man für (2) völlig ausreichend genau ansetzen, insoweit der normale Wert der Schwerkraft in betracht kommt:

$$\begin{aligned} C C' &= \sum_A^C \frac{1 - 0,00265 \cos 2 B}{1 - 0,00265 \cos 2 B_C} \delta z \\ &= \sum_A^C \delta z + 0,00531 \sum_A^C \frac{\sin (B + B_C) \sin (B - B_C)}{1 - 0,00265 \cos 2 B_C} \delta z. \end{aligned} \quad (10)$$

Hierin bezeichnet das erste Glied rechter Hand das unmittelbare Nivellementsresultat. Die Summierung im Korrektionsglied läßt sich bequem an der Hand einer passenden Profilzeichnung ausführen, falls  $B - B_C$  so klein ist, daß man den Sinus mit dem Bogen vertauschen kann und wenn man zugleich für  $\sin (B + B_C)$  einen konstanten Mittelwert  $\sin (B_m + B_C)$  einführen darf\*). Alsdann geht nämlich (10) durch Substitution von

$$B - B_C = \Delta M : \varrho_m,$$

worin  $\Delta M$  den zu  $B - B_C$  gehörigen Meridianbogen der Meeresfläche und  $\varrho_m$  einen mittleren Krümmungsradius im Meridian für die Meeresfläche (das Erdellipsoid) in jener Gegend bezeichnet, über in die Näherungsformel:

\*) *Zachariae, De geodætiske Hovedpunkter*, 1876, S. 244. (Übersetzung von *Lamp*, 1878, S. 285—286.)

$$CC' = \sum_A^C \delta z + \frac{0,00531 \sin(B_m + B_C)}{(1 - 0,00265 \cos 2B_C) \varrho_m} \sum_A^C \Delta M \cdot \delta z, \quad (11)$$

und hier ist nun die Summe  $\Delta M \cdot \delta z$  offenbar proportional dem Inhalt der Fläche in der Profilzeichnung zwischen der nivellierten Linie  $AC$ , der Niveaufäche durch  $A$  und der Lotlinie durch  $C$ , vorausgesetzt, daß diese ohne Rücksicht auf die Krümmung der Niveaufächen herzustellende Zeichnung anstatt der Horizontalabstände des nivellierten Profils die Abstände der geographischen Parallelen der nivellierten Punkte als Horizontalabstände enthält. Mit Hilfe einer topographischen Karte wird man solche Meridianprofile leicht herstellen.

Man überzeugt sich leicht, daß (11) immer ausreicht, sobald  $B - B_C$  zwei Grade nicht überschreitet. Denn alsdann giebt die im allgemeinen größte Vernachlässigung der Formel, d. i. die Ersetzung von  $\sin(B + B_C)$  durch eine Konstante, selbst für extremste Werte der Höhen nur einige Millimeter. Da übrigens die Fixpunkte eines Landes einander stets viel näher liegen und man die Formel für  $CC'$  auf die Strecken von Fixpunkt zu Fixpunkt anzuwenden hat, so wird (11) immer den Charakter einer strengen Formel haben.

Bei der successiven Berechnung der Meereshöhen der Fixpunkte eines ausgedehnten Nivellements muß selbstverständlich Formel (8) mit konkurrieren. Ebenso bei einer *Ausgleichung überschüssiger Beobachtungsergebnisse*. Denn die Gleichung (1) lehrt mit Rücksicht auf (8), daß selbst das auf den Wert  $CC'$  reduzierte Nivellement von  $A$  nach  $C$  noch nicht  $H_C - H_A$  ist. Die dem Nivellement von  $A$  nach  $C$  entsprechende Fehlergleichung für eine Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen lautet demnach:

$$\sum_A^C \delta z + v = \left\{ \begin{aligned} H_C - H_A - \frac{0,00531 \sin(B_m + B_C)}{(1 - 0,00265 \cos 2B_C) \varrho_m} \sum_A^C \Delta M \cdot \delta z \\ - \frac{0,00531 \sin(B_A + B_C) \sin(B_A - B_C)}{1 - 0,00265 \cos 2B_C} H_A \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Hierin bezeichnet  $v$  eine durch die Ausgleichung zu bestimmende Verbesserung des unmittelbaren Nivellementsresultates. Dieselbe ist rechter Hand im ersten kleinen Korrektionsgliede vernachlässigt, sowie man auch im zweiten Korrektionsgliede für  $H_A$  einen Näherungswert einführen darf.

Es mag hier noch darauf hingewiesen werden, daß die Korrekturen rechter Hand in (12) allerdings bei kleinen Distanzen der benachbarten Fixpunkte sehr klein ausfallen, daß man sie aber schärfer berechnen muß als wie die unmittelbaren Beobachtungsergebnisse angegeben werden, weil sonst bei allmählich ansteigenden, ausgedehnten Nivellementszügen eine Anhäufung von Rechnungsfehlern entstehen kann. Man wird auf Hundertel- oder Tausendel-Millimeter rechnen

und in die Ausgleichung eines grossen Netzes zunächst wie üblich nur die Knotenpunkte aufnehmen.

§ 4. Die sphäroidischen Schlusssfehler der Nivellementspolygone. Nivelliert man von  $A$  nach  $C$  auf zwei verschiedenen Wegen, so entsteht ein Nivellementspolygon. Die beiden Ergebnisse in gewöhnlicher Reduktion zeigen nun im allgemeinen, abgesehen von sonstigen Fehlern, eine Differenz wegen der Nichtberücksichtigung der im vorigen Paragraphen angegebenen Reduktion auf Meereshöhe, welche für verschiedene Wege nicht übereinstimmend ausfällt. Insoweit wie bisher nur die normale Schwerkraft berücksichtigt wird, kann wie üblich diese Differenz, der Schlusssfehler, auch präziser der normale oder sphäroidische Schlusssfehler genannt werden.

Dieser Schlusssfehler wird am einfachsten erhalten, wenn man durch Zusammenfallenlassen des Endpunktes  $C$  mit dem Anfangspunkte  $A$  den einen der beiden Wege auf null reduziert. Wegen  $B_A = B_C$  geht dann im Ausdruck (8) für  $CC'$  diese Grösse in  $H_A$  über, und da  $H_A = H_C$  ist, muß wegen Gleichung (1)  $CC'$  verschwinden, d. h. es muß nach (10) für das Nivellements-Polygon sein:

$$\sum \delta z = -0,00531 \sum \frac{\sin(B + B_A) \sin(B - B_A)}{1 - 0,00265 \cos 2B_A} \delta z, \quad (1)$$

oder unter Voraussetzung mässiger Ausdehnung in geographischer Breite, etwa bis zu  $2^\circ$ , nach (11) des vorigen Paragraphen:

$$\sum \delta z = -0,00531 \frac{\sin 2B_A}{(1 - 0,00265 \cos 2B_A) \varrho_m} \sum \Delta M \cdot \delta z. \quad (2)$$

In (1) bezeichnet  $B_A$  die geographische Breite eines willkürlichen Punktes  $A$  des Nivellementspolygones, den man für (2) am besten in eine mittlere Breite des letzteren verlegen wird;  $\varrho_m$  bezeichnet den zugehörigen Krümmungsradius des Erdellipsoids im Meridian und  $\Delta M$  die Abstände der geographischen Parallelen der Nivellementspunkte von dem willkürlichen Punkte  $A$ .

Diese Abstände sind positiv zu rechnen, wenn  $B - B_A$  positiv ist. Wie man aber auch  $A$  wählt, die  $\sum \Delta M \cdot \delta z$  ist immer der positive oder negative Inhalt der Fläche innerhalb des Profilcontoures der Meridianprofilzeichnung, wie aus den Regeln der analytischen Geometrie folgt, wobei nur bei Durchkreuzungen gehörig auf die leicht zu ermittelnden Vorzeichen der Flächenteile zu achten ist\*).

\*) Behufs einer direkten Ableitung der Formel (1) kann man davon ausgehen, daß nach § 1 (2) S. 501 für ein geschlossenes Polygon

$$\int g dh = 0$$

ist. Setzt man hierin  $g = g_A + (g - g_A)$ , so folgt der Schlusssfehler

$$\int dh = \int \frac{g_A - g}{g_A} dh,$$

woraus man mit Rücksicht auf (5) § 2 S. 504 leicht zu (1) gelangt.

Ebenso wie man bei den Ausgleichungen der Präzisionsnivelements nach vermittelnden Beobachtungen in den Fehlergleichungen (12) des vorigen Paragraphen die sphäroidischen Reduktionsglieder wegzulassen pflegt, setzt man auch bei der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen in jedem Polygone  $\sum \delta z = \text{null}$ . *Indessen sollte man wenigstens bei den mit der europäischen Gradmessung verbundenen Nivellements nicht mehr an dieser Praxis, die Nivellements unreduziert auszugleichen, festhalten.* Sie genügt wohl allenfalls in dem nördlichen Deutschland, aber keinesfalls in dem südlichen Deutschland und den Alpenländern, wie wir sogleich nachweisen werden. Man kann sich nicht darauf berufen, daß die Beobachtungsfehler erheblicher seien, wie jene Korrekturen und daß diese letzteren auch nur den normalen Teil der Schwerkraft enthalten. Denn einesteils sind diese Korrekturen nur in ebenen Gegenden geringer als die Beobachtungsfehler und andernteils wird sich weiterhin finden, daß der Einfluß der Abweichungen der Schwerkraft vom normalen Wert auf die Nivellementsresultate, insoweit es sich lediglich um Schlußfehler handelt, im allgemeinen weit kleiner ist als der Betrag der sphäroidischen Korrekturen.

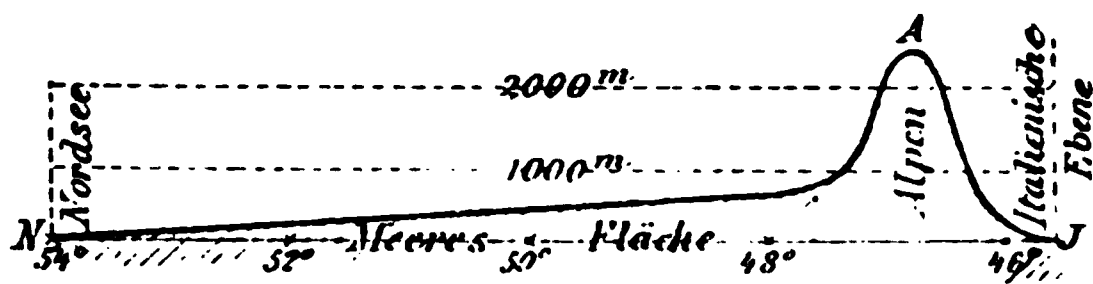


Fig. 84.

Betrachten wir zum Zwecke der Schätzung der letzteren ein Nivellement von der Nordsee über die Alpen bis Oberitalien, von da auf dem Parallelkreis bis zur französischen Küste des atlantischen Oceans und von hier aus an der Küste entlang bis zum Ausgangspunkt zurück. Dann hat das geschlossene Polygon ungefähr ein Meridianprofil wie das nebenstehende  $NAIN$  in Fig. 84; insbesondere entspricht die Kurve  $NAI$  dem Nivellement von der Nordsee über die Alpen bis Oberitalien und die Gerade  $IN$  dem Rückgang auf dem Parallelkreis u. s. w. Nur bei dem ersten Teil tritt ein sphäroidischer Einfluß auf, der ebenso wie der Schlußfehler der Fläche  $NAIN$  proportional ist. Nach Formel (2) folgt für dieses Polygon sehr nahe

$$\sum \delta z = -0,4^m. \quad (3)$$

Dieser erhebliche Betrag rührt keineswegs lediglich von den Alpen her, die übrigens hier nur 2500<sup>m</sup> hoch angenommen sind. Würde man für die Alpen eine Hochebene von 600<sup>m</sup> Höhe setzen, so würden immer noch  $-0,25^m$  Schlußfehler übrig bleiben. Auch dieser Fehler übersteigt die Beobachtungsfehler.

Um einen anderen Fall zu erwähnen, nennen wir das Gradmessungs-



nivellement zwischen Swinemünde und Konstanz\*). Dieses Nivellement, welches etwa zwischen  $54^{\circ}$  und  $48^{\circ}$  Breite sich bewegt, folgt im allgemeinen etwas geringeren Höhen als unsere Figur angiebt. Die sphäroidische Reduktion für Konstanz wird angenähert gleich  $+ 0,075^m$ , während der mittlere zufällige Beobachtungsfehler zu  $\pm 0,048^m$  angegeben ist. Würde man aber Konstanz von Swinemünde aus auf einem anderen, mehr unserem Profil entsprechenden Wege erreichen, so würde die Reduktion den Betrag von  $+ 0,15^m$  erreichen können und sich somit ein Schlufsfehler von  $0,075^m$  ergeben.

Wenn man bedenkt, dafs bei anderen Gelegenheiten die Geodäten eine fast übertriebene Sorgfalt in Reduktionsrechnungen anwenden, kann man nur *dem* Umstand die Nichtbeachtung der oben geforderten Reduktionen zuschreiben, dafs die allgemeine Aufmerksamkeit noch zu wenig der Sache sich zuwendet und infolge dessen das Messen von Höhen mittelst des Nivellierinstrumentes noch immer als eine rein geometrische Operation angesehen wird.\*\*)

Ist aber ein Netz von Hauptnivellementslinien nach vermittelnden oder bedingten Beobachtungen ausgeglichen, so darf man bei Einschaltungen allerdings von Reduktionen ganz absehen, da für mäfsige Distanzen dieselben klein sind und keine Fehleranhäufung mehr möglich ist.

In dieser Beziehung hat offenbar die Einführung von Meereshöhen einen Vorteil gegenüber der in § 2 dieses Kapitels S. 504 besprochenen Reduktionsweise.

**§ 5. Die sphäroidische Depressionsdifferenz zwischen Rück- und Vorblick.** In § 2 wurde darauf hingewiesen, dafs die Depressionen  $d_1$  und  $d_2$  beim Rückblick und Vorblick eines Instrumentstandes bei gleichen Zieldistanzen so nahe gleich sind, dafs man den Einflufs ihrer Differenz vernachlässigen kann. Wir weisen dies jetzt für die normale Form der Niveauflächen nach. Als solche nehmen wir das Erdellipsoid. Da nur die erste Potenz der Abplattung berücksichtigt zu werden braucht, gilt die Entwicklung auch für andere Normalformen der Niveauflächen (Normalsphäroide, Kap. 2 § 17 S. 89).

---

\*) Gradmessungsnivellement zwischen Swinemünde und Konstanz. Publikation des königl. preuss. geodät. Instituts. Bearbeitet von *Dr. W. Seibt*. Berlin, 1882.

\*\*) Nachdem Vorstehendes schon längere Zeit geschrieben war, fanden wir zu unserer Freude in dem inzwischen erschienenen Bd. 5 der *Nivellements der preussischen Landesaufnahme*, Berlin 1883, S. 127 eine Reihe von sphäroidischen Polygon-Schlufsfehlern angegeben und mit den beobachteten Schlufsfehlern verglichen. Bei der Ausgleichung und Höhenberechnung sind allerdings die sphäroidischen Glieder noch nicht berücksichtigt. Wir sind aber überzeugt, dafs auch mit der Zeit der weitere Schritt dieser Berücksichtigung der Glieder gethan werden wird, da die Gegengründe nicht stichhaltig sind.



Die stärkste Abweichung der Vertikalschnitte des Rotationsellipsoides von der Kreisform findet aber an jedem Punkte der Oberfläche in Richtung der Nordsüdlinie statt. Wir nehmen daher ein Nivellement in dieser Richtung an und denken uns in der geographischen Breite  $B$  einen Instrumentstand. Die horizontale Visieraxe des Instruments sei Axe der  $\xi$ , positiv gerechnet von der vertikalen Axe des Instruments nach Süden; normale Abstände von der Visieraxe in der Meridianebene seien mit  $\zeta$  bezeichnet, positiv nach unten. Dann giebt Bd. 1 S. 137 § 2 (8) sofort die Gleichung der Meridianellipse, wobei nur für  $B_1$  einfach  $B$  zu schreiben, das Azimut  $\alpha = \text{null}$  zu nehmen und für  $\vartheta$  nach (7) daselbst  $\xi$  zu setzen ist. Diese Gleichung lautet:

$$2\xi \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} = \xi^2(1-e^2\sin^2 B) + \xi^2(1-e^2\cos^2 B) + \xi\xi e^2\sin 2B. \quad (1)$$

$a$  bedeutet hierin die Äquatorialhalbaxe,  $e$  die numerische Excentricität. Man kann diese Gleichung auch leicht aus der Mittelpunktsgleichung der Ellipse direkt herstellen mit Vereinfachung der Entwicklungen von Bd. 1 § 2 S. 135 u. ff.

Die Gleichung (1) zeigt, daß  $\xi : a$  in Bezug auf  $\xi : a$ , dieses als GröÙe erster Ordnung angenommen, eine GröÙe zweiter Ordnung ist. Unter Vernachlässigung des Gliedes mit  $\xi^2$  wird daher bis auf Glieder vierter Ordnung genau und mit Vernachlässigung von  $e^4$ :

$$\xi = \frac{\xi^2 \sqrt{1-e^2\sin^2 B}}{2a(1-e^2)} + \frac{\xi\xi}{2a} e^2 \sin 2B + \dots,$$

oder indem man für  $\xi$  im zweiten Gliede rechter Hand  $\xi^2 : 2a$  substituiert, mit gleicher Genauigkeit:

$$\xi = \frac{\xi^2 \sqrt{1-e^2\sin^2 B}}{2a(1-e^2)} + \frac{\xi^3}{4a^2} e^2 \sin 2B + \dots \quad (2)$$

Bezeichnen wir  $\xi$  für den Rückblick mit  $\xi_1$ , für den Vorblick mit  $\xi_2$  und nehmen  $\xi$  vor- und rückwärts gleich groß, so wird

$$\xi_2 - \xi_1 = \frac{\xi^3}{2a^2} e^2 \sin 2B + \dots \quad (3)$$

Man erkennt leicht, daß  $d_2 - d_1$ , die Depressionsdifferenz im Sinne der Fig. 83 S. 502, nicht wesentlich verschieden ist von  $\xi_2 - \xi_1$ . Wir erhalten daher aus (3):

$$d_2 - d_1 = \frac{s^3}{8a^2} \alpha \sin 2B + \dots, \quad (4)$$

wobei noch die Horizontal дистанз  $P_1P_2 = s$  und die Abplattung  $\alpha$  eingeführt sind.

Es ist nun zwar von vornherein klar, daß für einen einzelnen Stand  $d_2 - d_1$  ohne Einfluß bleibt, aber bei einem zusammengesetzten Nivellement wäre doch eine Anhäufung denkbar. Den un-

günstigsten Fall würde ein Nivellement vom Äquator nach einem der Pole bilden. Hier wird nun die Summe der Depressionsdifferenzen

$$\sum (d_2 - d_1) = - \alpha \frac{s^2}{8a} \sum_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2B \cdot \delta B, \quad (5)$$

wie aus (4) hervorgeht, wenn für  $s : a$  der Absolutwert der Breiten-differenz der benachbarten Instrumentstände  $\delta B$  gesetzt wird, was nahezu richtig ist. Anstatt des Summenzeichens darf man sich ein Integralzeichen geschrieben denken. Das Integral von  $B = \text{null}$  bis  $\frac{\pi}{2}$  giebt  $+1$ , womit sich in hinreichender Annäherung findet:

$$\sum (d_2 - d_1) = - \alpha \frac{s^2}{8a}. \quad (6)$$

Diese Summe ist im Sinne einer Verbesserung des nivellierten Höhenunterschiedes zu verstehen. Sie wird mit  $\alpha = 1/300$ ,  $a = 6370000^m$  und  $s = 200^m$ , welcher letztere Wert bei Präzisionsnivellements gewiß nicht eintritt, nur  $1/400$  Millimeter. Da nun die Summe der Differenzen  $(d_2 - d_1)$  nahezu unmittelbar in die Differenz der Meereshöhen von End- und Anfangspunkt eingeht, so erkennt man hierdurch unzweifelhaft die Berechtigung zu ihrer Vernachlässigung in jedem praktischen Falle. Das gilt auch für Berechnungen, welche nach § 2 dieses Kapitels ausgeführt werden.

Die sphäroidische Depressionsdifferenz untersuchte 1874 *Oudemans* in den *Astronom. Nachr.* Bd. 83, S. 21–24 Nr. 1970. Wir dürfen dazu bemerken, daß uns die Geringfügigkeit ihres Einflusses schon 10 Jahre früher ersichtlich wurde. *Oudemans* findet übrigens doppelt so viel, als (6) angiebt, da er bei der Integration in dem entsprechenden Ausdruck noch die halbe Stationslänge hat und diese irrtümlich anstatt des zweifachen Betrages als Differential unter das Integralzeichen nimmt.

**§ 6. Der Einfluß der Anomalieen der Schwerkraft auf die Nivellementsresultate; Lotabweichungen.** Behufs Erkenntnis des Einflusses der Anomalieen der Schwerkraft auf die Ergebnisse der geometrischen Nivellements ist man auf die Behandlung passender ideellen Beispiele angewiesen, da die Behandlung praktischer Fälle sowohl in Strenge mittelst Beobachtung der Schwerkraft, als auch durch schätzungsweise Rechnung auf Schwierigkeiten stößt. Indessen genügt glücklicherweise schon die Betrachtung einiger solchen passend konstruierten Fälle, um einen Überblick zu erhalten. Wir werden diese Betrachtung in den nächsten Paragraphen vornehmen, zunächst aber einige allgemeine Bemerkungen vorausschicken.

Die Formeln (1) bis (3) § 3 S. 505 lassen erkennen, daß zunächst bei geringen Höhendifferenzen und Höhen der Einfluß der Veränderungen der Schwerkraft auf der Erdoberfläche ein geringfügiger und vielfach zu vernachlässigender sein muß. Ein Nivellement in der niederdeutschen Ebene z. B. bedarf keiner Reduktion. Im allgemeinen be-

steht aber ein Unterschied in der Art des Einflusses der normalen Veränderungen und der sonstigen Variationen von  $g$ . Den Einfluß der ersteren kann man umgehen, wenn die Höhen nur auf Parallelkreisen erstiegen werden. Den Einfluß sonstiger Variationen würde man nur vermeiden können bei vertikaler Ersteigung der Höhen, die aber nur ausnahmsweise auf kleine Strecken möglich ist. Während nun bei einem eine Fläche bedeckenden Nivellementsnetz für die in einem Punkte zusammentreffenden Nivellements der Einfluß der ersten Art ein sehr verschiedener sein wird, ist dieses bei den Einflüssen der zweiten Art in gleichem Maße nicht der Fall, was die Beispiele weiterhin zeigen werden. Die Einflüsse der zweiten Art geben daher im gebirgigen Terrain, obwohl sie die Meereshöhen ebenso treffen wie diejenigen der ersten Art, doch nicht wie diese erhebliche Schlußfehler in den Polygonen. Da es aber hauptsächlich darauf ankommt, *bestimmte Angaben für die Meereshöhen zu erlangen, wenn dieselben auch mit Fehlern behaftet sind, die sich jedoch durch kein Nivellement nachweisen lassen*, so wird ersichtlich, daß man weit mehr berechtigt ist, die Reduktion der unmittelbaren Nivellementsergebnisse wegen der anormalen Variationen der Schwerkraft zu unterlassen, als diejenige wegen der normalen Änderungen. Dieses ist von großer Bedeutung, da eine vollständige Reduktion in Strenge nicht durchführbar sein, aber auch in nur näherungsweise Ausführung außerordentliche Mühe machen würde.\*) (Die vorstehende Betrachtung gilt in angemessener Abänderung auch für den Fall, daß anstatt Meereshöhen Potentialdifferenzen abgeleitet werden, doch wird man diese komplizierte Reduktionsweise sicherlich nur benutzen, wenn sie in Strenge, d. h. im allgemeinen: auf grund beobachteter Werte der Schwerkraft, möglich ist).

Durch jene sozusagen konstanten Fehler der Meereshöhen wird der Zweck der mit den Gradmessungsarbeiten in Verbindung gebrachten Präzisionsnivellements, für das Studium zeitlicher Veränderungen der Erdoberfläche ein Element mehr zu gewinnen, offenbar nicht beeinträchtigt. Ferner genügen derartige Angaben für die Reduktion der Grundlinien vollständig.

Hier ist auch der Ort, die Beziehung der Lotabweichungen zu den geometrischen Nivellements darzulegen. Verschiedene Autoren, die nicht von der Potentialtheorie ausgingen, haben Betrachtungen

---

\*) Der Unterschied zwischen den Wirkungen der normalen und anormalen Variationen ist wohl zu beachten, und wir können daher der Bemerkung *Haupts*, *Astronom. Nachr.* Bd. 84 S. 56 unten, nicht beistimmen, daß man die Korrekturen wegen der normalen Variationen mit Rücksicht auf die Wirkungen der unbekannten anormalen Variationen unterlassen dürfe. Diese Ansicht beruht eben auf einer Überschätzung der anormalen Wirkungen. Wenn *Haupt* von *Gauß* sagt, daß dieser die ganze Sache (betr. normale Einflüsse) für eine Kuriosität erkläre, so ist zu erinnern, daß *Gauß* nach S. 3 a. a. O. gar nicht von Nivellements, sondern nur von Polhöhen spricht.

über den Einfluss von Lotabweichungen angestellt. Man kann in der That die Nivellements anstatt mittelst der Schwerkraft auch mittelst Lotabweichungen auf Meereshöhen reduzieren. Jedoch ist dieser rein geometrische Weg, wie die Potentialtheorie zeigt, nicht der unmittelbar sich darbietende, sondern wenigstens teilweise ein Umweg. Für die normale Form der Niveauflächen ist dies unbedingt der Fall. Für die Abweichungen von der normalen Form allerdings kann er rechnerische Vorteile bieten, wie in einem der folgenden Beispiele. Aber er gewährt keine so bequeme Einsicht wie die Benutzung der Schwerkraft und hat in der That zu irrtümlichen Auffassungen geführt.

Betrachten wir diese Reduktionsweise etwas genauer. Es sei  $AC$  eine nivellierte Profillinie, Fig. 85, woraus die Höhe  $CC'$  von  $C$  über der Niveaufläche von  $A$  abzuleiten ist. Die Lotabweichungen denken wir uns in Bezug auf die geradlinigen Lotlinien eines Referenzellipsoides. Unter zulässigen, vereinfachenden Annahmen können wir sagen, daß das unmittelbare Resultat des Nivellements von  $P_1$  nach dem

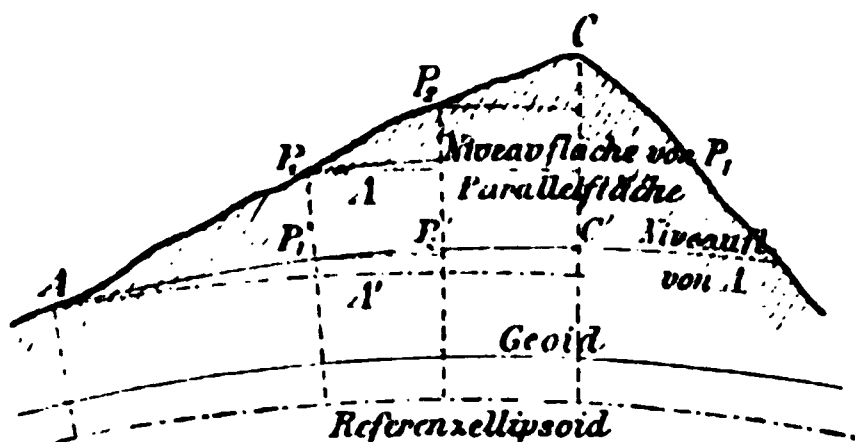


Fig. 85.

folgenden Punkte  $P_2$  der normale Abstand dieses Punktes von der Niveaufläche durch  $P_1$  ist. Legen wir aber nun durch  $P_1$  auch eine Parallelfäche zum Referenzellipsoid, so wird zwar der normale Abstand des Punktes  $P_2$  von dieser Fläche sehr nahe dieselbe Richtung wie jener haben\*), er ist aber größer um  $A\delta s$ , wenn  $A$  die Abweichung des aufgehängten Lotes in der Richtung des Nivellements nach vorwärts und  $\delta s$  die horizontale Entfernung  $P_1P_2$  bezeichnet. Nun erkennt man sofort, daß

$$\sum \delta z + \sum A\delta s \quad (1)$$

die Erhebung von  $C$  über die Parallelfäche des Referenzellipsoides durch  $A$  ist,  $\delta z$  im Sinne Rückblick—Vorblick verstanden.

Denkt man sich, obgleich es in der Regel unmöglich ist, von  $A$  auf der Niveaufläche bis  $C'$  nivelliert, so wird  $\sum \delta z$  null; damit folgt aus (1) als Erhebung von  $C'$  über die Parallelfäche von  $A$

$$+ \sum A'\delta s', \quad (2)$$

worin  $A'$  die Lotablenkung in den Punkten  $P'$  der Niveaufläche von  $A$  und  $\delta s'$  die horizontalen Entfernungen vorstellt.

Die Erhebung  $CC'$  von  $C$  über die Niveaufläche von  $A$  folgt aus (1) und (2) zu

\*) In der Fig. 85 ist dementsprechend zwischen den verschiedenen Lotlinien kein Unterschied gemacht.

$$CC' = \sum \delta z + \sum A \delta s - \sum A' \delta s'. \quad (3)$$

Hierin kann man die beiden letzten Summen vereinigen, wobei man  $A$  und  $A'$  auf zwei Punkte  $P$  und  $P'$  des Profils und der Niveaufläche von  $A$  bezogen zu denken hat, die in derselben Lotlinie des Referenzellipsoides übereinanderliegen. Die Differenz  $A - A'$  stellt alsdann ein Maß für die Krümmung der wirklichen Lotlinien  $PP'$  dar.

Man erhält aus (3) in Strenge:

$$CC' = \sum \delta z + \sum (A - A') \frac{\delta s + \delta s'}{2} + \sum (A + A') \frac{\delta s - \delta s'}{2}, \quad (4)$$

darf dies aber in der Regel auf die Näherungsformel:

$$CC' = \sum \delta z + \sum (A - A') \delta s \quad (5)$$

abkürzen, da der Unterschied der Horizontalabstände  $P_1P_2 = \delta s$  und  $P_1'P_2' = \delta s'$  für den vorliegenden Fall unerheblich ist. In (5) kann man unter  $\delta s$  nunmehr die horizontalen Entfernungen, gemessen in irgend einer Niveaufläche oder auf irgend einem Referenzellipsoid in der Nähe der Erdoberfläche verstehen.

Die Gleichung (5) zeigt deutlich, daß nicht die Lotabweichung selbst, sondern nur die Differenz der Lotabweichungen in übereinanderliegenden Punkten  $P$  und  $P'$  des Profils und der Niveaufläche des Ausgangspunktes in betracht kommt. Ist nun der Höhenunterschied  $PP'$  gering, so wird auch  $A - A'$  es sein, und somit zeigt sich wieder, daß in flachen Gegenden die Lotstörungen keinen erheblichen Einfluß haben.

Es giebt aber eine Form der Gleichung (5), welche dies leicht vergessen macht. Läßt man nämlich den Endpunkt  $C$  mit dem Anfangspunkt  $A$  zusammenfallen, dergestalt daß ein geschlossenes Nivellementspolygon entsteht, so giebt (5), da  $CC' = \text{null}$  wird:

$$\sum \delta z = - \sum (A - A') \delta s = - \sum A \delta s + \sum A' \delta s; \quad (6)$$

da aber  $\sum A' \delta s$  für sich allein null ist, wie Ausdruck (2) auf voriger Seite erkennen läßt, so hat man für ein Nivellementspolygon somit anstatt (6) auch:

$$\sum \delta z = - \sum A \delta s. \quad (6^*)$$

Jetzt sieht es aus, als hätte die Lotabweichung auf die einzelnen Teile des Polygons großen Einfluß, sogar in ebenen Gegenden, weil ja  $A$  im allgemeinen viel größer als  $A - A'$  ist und die  $\sum A \delta s$  für offene Nivellementslinien recht erhebliche Werte erlangen kann\*).

Für die praktische Anwendung eignet sich die Reduktion nach

\*) Hiernach ist z. B. die in den *Astronom. Nachr.* Bd. 84 1874 auf S. 9–10 und im Schlufspassus S. 16 von *Baeyer* ausgesprochene Ansicht nicht haltbar.

(6\*) noch weniger wie die Reduktion mittelst der Schwerkraft. Zunächst ist ersichtlich, daß aus beobachteten Lotabweichungen  $A$  die Summe  $\sum A \delta s$  nur dann mit genügender Genauigkeit hervorgehen wird, wenn man  $A$  in Distanzen von wenigen Kilometern direkt ermittelt, so daß es genügend scharf interpoliert werden kann. Und diese Messungen würden ebenso außerordentlich viel Zeit beanspruchen, wie gegenwärtig diejenigen der Schwerebeschleunigung  $g$ . Wollte man sich aber doch auf dergleichen einlassen, so hätte die Reduktion mit  $g$  immerhin noch den Vorteil, daß nicht bloß die Schlussfehler der Polygone (abgesehen von Beobachtungs- und Refraktionsfehlern) daraus hervorgehen, sondern auch die Potentialwerte der Nivellements-punkte (wenn auch noch nicht die Meereshöhen) während *die Reduktion mittelst der Lotabweichungen  $A$*  gar nicht zur Kenntnis irgend welcher bestimmter, charakteristischer Werte für die Nivellements-punkte selbst führt: *weder zu Meereshöhen, noch zu Potentialwerten*, da die Werte  $\sum A \delta s$  nur für geschlossene, nicht aber für offene Nivellements-linien eine Beziehung zu den Höhenunterschieden zwischen Niveauflächen haben, wie die Betrachtung von (1) S. 515 zeigt.

§ 7. Schwerestörungen im Gebirge. In Fig. 86 seien  $A$  und  $B$  zwei Punkte, die sich auf derselben gestörten, d. h. auf derselben wirklichen Niveaufläche befinden. Beide seien durch ein Nivellement verbunden, welches dem Profil  $ACB$  folgt, von dem wir

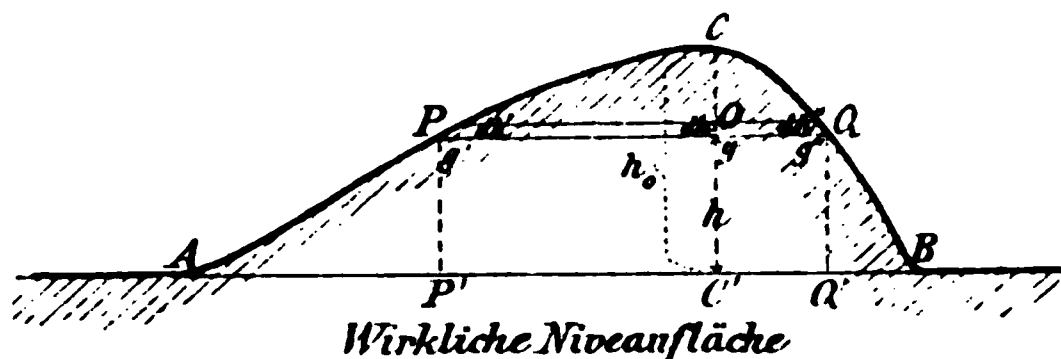


Fig. 86.

der Einfachheit halber voraussetzen, daß es anfangs nur ansteigt, darnach nur abfällt. In den Höhen  $h$  und  $h + dh$  über  $C'$ , der Projektion von  $C$  auf die Niveaufläche  $AB$ , legen wir je eine Niveaufläche. Sind nun  $dh'$ ,  $dh$  und  $dh''$  die Abstände beider bei  $P$ ,  $O$  und  $Q$ , und sind  $g'$ ,  $g$  und  $g''$  die zugehörigen Schwerkraften, so ist (vergl. § 1 S. 502):

$$g' dh' = g dh = g'' dh''$$

und hiernach, wenn  $CC'$  mit  $h_0$  bezeichnet wird:

$$h_0 = \int_A^C \frac{g'}{g} dh' = \int_B^C \frac{g''}{g} dh''.$$

Hierbei ist es mit Rücksicht auf § 2 (4) S. 504 gleichgültig, ob die  $dh'$  und  $dh''$  mathematisch streng als Differentiale oder praktisch als Zielhöhendifferenzen  $\delta z$  genommen werden. Das Nivellementsergebnis von  $A$  bis  $C$  ist aber gleich der Summe der  $dh'$  und das von  $B$  bis  $C$  gleich



der Summe der  $dh''$  zu setzen. Daher wird die *Verbesserung des Nivellementsergebnisses von A bis C* auf die Angabe  $CC' = h_0$  gleich

$$\int_A^C \frac{g' - g}{g} dh' \quad \text{oder sehr nahe} \quad \int_A^C \frac{\delta g' - \delta g}{G} dh, \quad (1)$$

und für das Nivellementsergebnis von B bis C gleich

$$\int_B^C \frac{g'' - g}{g} dh'' \quad \text{oder sehr nahe} \quad \int_B^C \frac{\delta g'' - \delta g}{G} dh, \quad (2)$$

wobei  $G$  irgend eine konstante Beschleunigung bezeichnet, die sehr nahe gleich  $g'$ ,  $g$  und  $g''$  ist, dergestalt daß in den Relationen

$$\begin{aligned} g' &= G + \delta g' \\ g &= G + \delta g \\ g'' &= G + \delta g'' \end{aligned} \quad (3)$$

die Größen  $\delta g'$ ,  $\delta g$  und  $\delta g''$  kleine Größen vorstellen.

Der *Schlussfehler* eines von A über C bis B und dann in der Ebene zurück nach A geführten Nivellements ist im Sinne einer Verbesserung, wie durch Subtraktion von (1) und (2) folgt, sehr nahe gleich

$$\int_A^C \frac{\delta g' - \delta g''}{G} dh .*) \quad (4)$$

Hat das Terrain, auf welchem das Nivellementsprofil  $ACB$  verläuft, in der Richtung seines stärksten Falles nur eine geringe Neigung, so wird die vertikale Anziehung der über  $AB$  liegenden Erdschichten auf einen Terrainpunkt mit großer Annäherung dadurch erhalten, daß man das Terrain als eben und horizontal ansieht, vergl. im 3. Kap. § 16 S. 166. Aus der Formel (6) daselbst leiten wir sofort ohne Rücksicht auf sonstige Variationen in  $g$  für die Schwerkraft  $g'$  in  $P$  die Relation ab:

$$g' = G \left\{ 1 - \frac{2h}{R} \left[ 1 - \frac{3\Theta'}{4\Theta_m} \right] \right\},$$

wenn wir jetzt unter  $G$  die ungestörte, nun als konstant zu betrachtende Schwerkraft im Niveau  $AB$  verstehen und wenn  $\Theta'$  die mittlere Dichtigkeit der Schichten zwischen  $P$  und  $P'$  bezeichnet. Die Höhe  $PP'$  ist hierbei in ausreichender Genauigkeit gleich  $h$  gesetzt worden.

Es ist also für einen Punkt  $P$  zwischen  $A$  und  $C$ :

$$\delta g' = -G \cdot \frac{2h}{R} \left[ 1 - \frac{3\Theta'}{4\Theta_m} \right] \quad (5)$$

---

\*) Dies stimmt überein mit dem S. 509 u. angegebenen allgemeinen Ausdruck für den Schlussfehler, welcher den Sinn einer negativen Verbesserung hat.

und entsprechend für einen Punkt  $Q$  zwischen  $C$  und  $B$ :

$$\delta g'' = -G \cdot \frac{2h}{R} \left[ 1 - \frac{3\Theta''}{4\Theta_m} \right]. \quad (6)$$

Man erkennt nun augenblicklich, daß, insoweit diese Ausdrücke Geltung haben, *bei einem homogenen Gebirge*  $\delta g' = \delta g''$  ist und daher *der Schlusfehler verschwindet*. Dies findet ganz unabhängig von der Form des Gebirges statt, solange nur vorherrschend ein *sanftes Gefälle der Gebirgsabhänge* in der Gegend des Nivellements vorhanden ist.

Um zu ermitteln, welchen Einfluß bei einem homogenen Gebirge der Fehler der Formeln (5) und (6) wegen der Neigung der Abhänge hat, werden wir in den folgenden Paragraphen für einen Gebirgsrücken in der Form eines liegenden, dreiseitigen Prismas eine strenge Untersuchung des Schlusfehlers anstellen. Über den Fehler der Formeln (5) und (6) giebt das vierte Kapitel S. 283 § 7 (6) Aufschluß, wobei man nach (9) S. 286 daselbst nur  $k^2\Theta$  durch  $GK$  zu ersetzen hat. Wir verfolgen dies aber nicht weiter.

Die Ausdrücke (5) und (6) gestatten nun auch eine Vorstellung von dem Einfluß ungleicher Dichtigkeiten der Gebirgsmassen bei nicht zu steilen Abhängen in der Nähe des Nivellementsprofiles zu gewinnen. Für diesen Fall wird der Schlusfehler (4) gleich

$$\int_C^B \frac{3}{4} \frac{\Theta' - \Theta''}{\Theta_m} \frac{2h}{R} dh.$$

Hierin sind außer  $h$  strenggenommen  $\Theta'$  und  $\Theta''$  variabel. Nehmen wir der Einfachheit halber  $\Theta'$  für den Profiltail  $AC$  und  $\Theta''$  für den Teil  $BC$  konstant, so läßt sich die Integration ausführen, und es folgt als *Schlusfehler wegen Ungleichheit der Dichtigkeit der Gebirgsmassen*

$$\frac{3}{4} \frac{\Theta' - \Theta''}{\Theta_m} \cdot \frac{h_0^2}{R}. \quad (7)$$

Diese Formel giebt indessen den Betrag des Schlusfehlers zu groß, weil in der Nähe von  $C$ , dieses als höchsten Punkt des Profils gedacht,  $\Theta'$  und  $\Theta''$  in Wirklichkeit nahezu gleich sind. Demgemäß kann man für  $h_0$  in (7) einen etwas kleineren Wert als denjenigen setzen, welcher der größten Höhe  $CC'$  gleich ist.

Setzen wir nun  $\Theta' - \Theta'' = 1$  bei  $\Theta_m = 5,6$  und  $h_0 = 1250^m$ , so folgt der Schlusfehler (7) gleich

$$0,033^m. \quad (8)$$

Diese Zahl dürfte denjenigen Teil der Schlusfehler der Alpenpolygone, welcher von ungleicher Dichte der Schichten herrührt, wegen des großen angenommenen Wertes für  $\Theta' - \Theta''$  eher über- als unterschätzen, selbst wenn  $h_0$  etwas zu gering angenommen wäre.



Fragen wir nach der Verbesserung des Nivellementsergebnisses für  $CC' = h_0$ , welches aus dem Nivellement  $AC$  hervorgeht, so ist für  $\delta g'$  bei nicht zu steilem Abfall des Gebirgsabhanges wieder Ausdruck (6) ausreichend. Für den Punkt  $O$  in  $CC'$  ist ferner zu setzen

$$\delta g = -G \left\{ \frac{2h}{R} \left[ 1 - \frac{3\Theta_1}{4\Theta_m} \right] + \frac{2(h_0 - h)}{R} \frac{3\Theta_2}{4\Theta_m} \right\}, \quad (9)$$

wenn  $\Theta_1$  die mittlere Dichtigkeit der Schichten zwischen  $C'$  und  $O$  und  $\Theta_2$  diejenige für die Schichten zwischen  $C$  und  $O$  angiebt.

Um eine Vorstellung zu gewinnen, reicht die Annahme  $\Theta' = \Theta_1 = \Theta_2$  vollkommen aus. Mit Rücksicht auf (1) folgt dann als *Verbesserung des Nivellementsergebnisses von A bis C auf die Angabe  $CC' = h_0$*  der Ausdruck:

$$\frac{3\Theta'}{4\Theta_m} \int_C^C \frac{2(h_0 - h)}{R} dh,$$

d. i. aber

$$\frac{3\Theta'}{4\Theta_m} \cdot \frac{h_0^2}{R} \quad (10)$$

und speziell für  $\Theta' = \frac{1}{2} \Theta_m$

$$\frac{3h_0^2}{8R}, \text{ d. i. } 0,06 \cdot (h_0 \text{ in km})^2 \text{ Meter.} \quad (10^*)$$

Diese Ausdrücke gelten übrigens nicht nur für den höchsten Punkt  $C$  der Nivellementslinie  $AC$ , sondern wie man leicht erkennt, *auch für Zwischenpunkte*; ferner gelten sie auch dann noch, wenn  $AC$  nicht wie in Fig. 86 immer ansteigt, sondern wiederholt steigt und fällt. Differenzen der drei Werte  $\Theta'$ ,  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  geben nur Einflüsse von der Ordnung (7); dieselben kommen jedenfalls bei einem rohen Überschlag gegen den Hauptwert (10) bzw. (10\*) nicht weiter in betracht.

**§ 8. Homogener Gebirgsrücken von der Form eines liegenden, dreiseitigen Prismas.** Im vierten Kapitel sind Näherungsformeln für die Anziehung eines liegenden, dreiseitigen Prismas auf einen im mittleren Querprofil gelegenen Punkt entwickelt worden, wobei eine beträchtliche Länge des Prismas im Verhältnis zur Breite Erfordernis für einen hinlänglichen Grad der Annäherung war. Diese Formeln gestatten den Einfluß der Schwerestörung auf nivellierte Höhen und Schlußfehler für Nivellements *im mittleren Teile* eines prismatischen Gebirgsrückens von jeder Querschnittsform zu ermitteln. Wir nehmen dabei der Einfachheit halber an, daß das Nivellement direkt auf dem mittelsten Querprofil selbst stattfindet. Denn für ein Nivellement, welches in der Nähe des letzteren in Serpentina die Höhe ersteigt, müssen wegen der Geringfügigkeit der Anziehungskomponente in der Längsrichtung (vergl. (7) S. 281) wesentlich dieselben Resultate gelten.

Würden wir nun die Formeln des vorigen Paragraphen anwenden, so müßten wir zunächst Ausdrücke für  $\delta g'$ ,  $\delta g$  und  $\delta g''$  aufstellen. Diese Ausdrücke sind zwar im vierten Kapitel unmittelbar enthalten, aber sie sind für  $\delta g'$  und  $\delta g$  so verschieden, daß eine Vereinfachung in ihrer Differenz nicht stattfindet und infolge dessen das zu bildende Integral eigentlich in zwei zerfällt. Wir ziehen es daher vor, mit den Lotablenkungen zu rechnen, wobei zwar auch zwei Integrale zu bilden sind, deren eines aber bereits durch die im vierten Kapitel aufgestellten Potentialwerte berechnet ist.

In Fig. 87 sei  $ABC$  das mittlere Querprofil;  $AB$  legen wir in die ungestörte Niveaufläche, von deren Krümmung wir absehen.  $AB'$  sei diejenige gestörte, also wirkliche Niveaufläche, welche durch  $A$  führt. Bezeichnen wir nun die Lotabweichung in  $P$  mit  $\Lambda$ , in  $P'$  (vertikal unter  $P$  in der Niveaufläche  $AB'$ ) mit  $\Lambda'$  und das Differential der horizontalen, in Richtung  $AB$  gemessenen Entfernungen mit  $ds$ , so ist mit Rücksicht auf § 6 S. 516, insbesondere Gleichung (5), die Höhe von  $C$  über der wirklichen Niveaufläche von  $A$ :

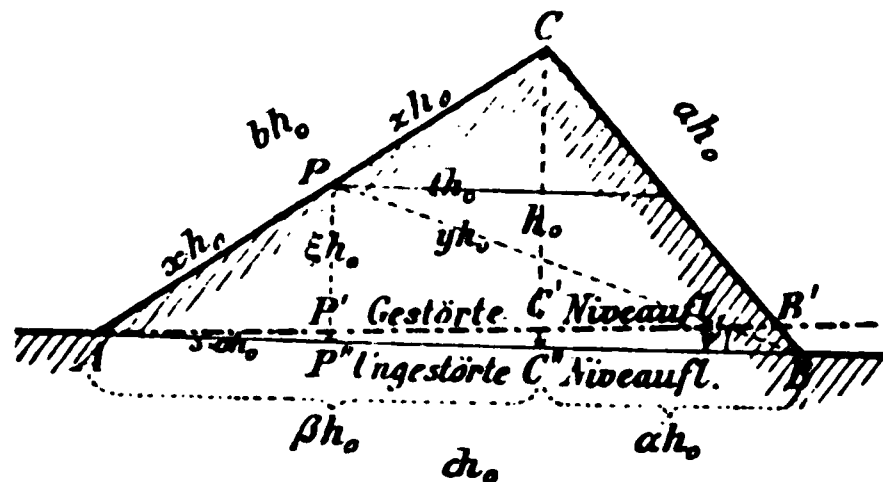


Fig. 87.

$$CC' = \sum \delta z + \int_A^C \Lambda ds - \int_A^C \Lambda' ds, \quad (1)$$

wobei  $\sum \delta z$  das Nivellementsresultat entlang  $AC$  bezeichnet. Das erste der beiden Integrale ist noch zu bilden, der Wert des zweiten aber, welches offenbar  $CC'$  gleich ist, kann leicht mittelst der Differenz der beiden Werte des Potentials  $v'$  für  $A$  und  $C'$  aus dem 4. Kapitel § 7 (1) S. 282 gefunden werden. (Ehe wir zu diesen Ausrechnungen schreiten, sei noch bemerkt, daß man in (1) die oberen Grenzen der Integration nur auf  $P$  bzw.  $P'$  zu verlegen braucht, um die entsprechende Gleichung für die Höhe  $PP'$  zu erhalten. Obwohl wir hierauf nicht weiter eingehen, wollten wir diese leichte Umformung der folgenden Rechnungen doch auch als einen Vorzug der Anwendung der Lotablenkungen im vorliegenden Falle gegenüber der Benutzung der Schwerestörungen, die für diesen allgemeinen Fall eine mühsame ist, hervorheben).

Setzen wir  $s = \sigma h_0$  und benutzen überhaupt die Bezeichnungen der Fig. 87, so wird mit Rücksicht auf die Formeln (5) und (9) § 7 S. 284 u. 286, welche  $\Lambda$  in denselben Bezeichnungen geben:

$$\int_A^C \Lambda ds = Kh_0^2 \int_0^\beta \left\{ \xi \log \operatorname{nat} \left( \frac{y}{x} \right)^2 + \frac{t}{2} \sin 2B \log \operatorname{nat} \left( \frac{y}{z} \right)^2 + 2t(A + \psi) \sin^2 B \right\} d\sigma.$$

Behufs Ausrechnung setzen wir dafür

$$\int_A^C A \, ds = K h_0^2 (I + II), \quad (2)$$

mit

$$I = \int_0^\beta \left\{ \left( \xi + \frac{t}{2} \sin 2B \right) \log \text{nat} y^2 + 2 \sin^2 B \cdot t \psi \right\} d\sigma \quad (3)$$

und

$$II = \int_0^\beta \left\{ 2 A \sin^2 B \cdot t - 2 \xi \log \text{nat} x - \sin 2B \cdot t \log \text{nat} z \right\} d\sigma. \quad (4)$$

Bei der weiteren Behandlung dieser Ausdrücke ist von den folgenden Relationen, welche aus Fig. 87 entnommen werden können, Gebrauch zu machen:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\sigma}{\beta} & y^2 &= \frac{\sigma^2}{\beta^2} + (c - \sigma)^2 & x &= \frac{b}{\beta} \sigma \\ z &= \frac{b}{\beta} (\beta - \sigma) & t &= \frac{c}{\beta} (\beta - \sigma) \\ \frac{1}{2} \sin 2B &= \frac{\alpha}{a^2} & \sin^2 B &= \frac{1}{a^2} & a^2 &= 1 + \alpha^2 & b^2 &= 1 + \beta^2 \\ \psi &= \arctan \frac{\sigma}{\beta (c - \sigma)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Die letzte dieser Relationen setzt voraus, daß  $c - \sigma$  positiv ist, was für alle Werte von  $A$  bis  $C'$  nur der Fall sein kann, wenn Winkel  $B \leq \frac{\pi}{2}$  ist, eine Forderung, die wir für naturgemäße Formen des Gebirgsrückens als erfüllt betrachten dürfen.

Drückt man in (3) alle Variable bis auf  $y^2$  und  $\psi$  mittelst der (5) durch  $\sigma$  aus und eliminiert mittelst dieser Gleichungen auch  $B$ , so folgt

$$a^2 \beta \cdot I = \int_0^\beta \left\{ \left[ (1 - \alpha \beta) \sigma + \alpha \beta c \right] \log \text{nat} y^2 + 2(\beta - \sigma) c \psi \right\} d\sigma.$$

Dies formen wir durch teilweise Integration um, wobei wir beachten, daß

$$\frac{d \log \text{nat} y^2}{d\sigma} = 2 \frac{(1 + \beta^2) \sigma - \beta^2 c}{\sigma^2 + \beta^2 (c - \sigma)^2}$$

und

$$\frac{d\psi}{d\sigma} = \frac{\beta c}{\sigma^2 + \beta^2 (c - \sigma)^2}$$

ist. Es wird hiermit

$$a^2 \beta \cdot I = \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \left[ \frac{1 - \alpha \beta}{2} \sigma + \alpha \beta c \right] \log \text{nat} y^2 + (2\beta - \sigma) c \psi \right\}_{\sigma=0}^{\sigma=\beta} \\ & - \int_0^\beta \left\{ (1 - \alpha \beta) \sigma + \alpha \beta c + \frac{(1 + \alpha \beta) \sigma - \alpha \beta c}{\sigma^2 + \beta^2 (c - \sigma)^2} \beta^2 c^2 \right\} d\sigma \end{aligned} \right\}.$$

Durch Einführung der Grenzen im Ausdrucke rechter Hand außerhalb des Integralzeichens, durch Ausführung der Integration für die beiden ersten Teile des Integrales und durch Substitution von

$$\sigma = \frac{v + \beta}{b^2} \beta c, \quad \text{womit} \quad v = \frac{b^2}{\beta c} \sigma - \beta$$

wird, im dritten Teile desselben, ergibt sich:

$$a^2 \beta \cdot I = \left\{ \begin{aligned} & \frac{a^2 + \alpha c}{2} \beta^2 (\log \text{nat } a^2 - 1) + B c \beta^2 \\ & - \frac{\beta^2 c^2}{b^2} \int_{-\beta}^{(1 - \alpha \beta) : c} \frac{(1 + \alpha \beta) v + (\beta - \alpha)}{1 + v^2} dv \end{aligned} \right\}.$$

Das rechter Hand noch zu bildende Integral ist bis auf eine Konstante gleich

$$\frac{1}{2} (1 + \alpha \beta) \log \text{nat } (1 + v^2) + (\beta - \alpha) \arctan v.$$

Wenn  $v$  von  $-\beta$  bis  $(1 - \alpha \beta) : c$  geht, so geht  $1 + v^2$  von  $b^2$  bis  $a^2 b^2 : c^2$  und  $\arctan v$  von  $-\frac{\pi}{2} + A$  bis  $A + B - \frac{\pi}{2}$ . Das betreffende Integral wird daher gleich

$$\frac{1 + \alpha \beta}{2} \log \text{nat } \frac{a^2}{c^2} + (\beta - \alpha) B$$

und die letzte Gleichung geht über in

$$a^2 \cdot I = \beta \left\{ \begin{aligned} & \frac{a^2 + \alpha c}{2} (\log \text{nat } a^2 - 1) \\ & - \frac{(1 + \alpha \beta) c^2}{2 b^2} \log \text{nat } \frac{a^2}{c^2} + \frac{a^2 c}{b^2} B \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Führen wir jetzt die Relationen (5) in die Relation (4) für II ein, um alle Variable durch  $\sigma$  auszudrücken, so ergibt sich:

$$a^2 \beta \cdot II = \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\beta \left\{ 2 A c (\beta - \sigma) - 2 a^2 \sigma \log \text{nat } \frac{b \sigma}{\beta} \right\} d\sigma \\ & - 2 \alpha c \int_0^\beta (\beta - \sigma) \log \text{nat } \frac{b (\beta - \sigma)}{\beta} d(\beta - \sigma) \end{aligned} \right\},$$

wobei im zweiten Integrale die Grenzen auf  $\beta - \sigma$  als Veränderliche bezogen sind. Die Integration führen wir in den Gliedern, welche einen Logarithmus enthalten, zunächst nur teilweise aus und erhalten:

$$a^2 \beta \cdot II = \left\{ \begin{aligned} & \left\{ A c \sigma (2 \beta - \sigma) - a^2 \sigma^2 \log \text{nat } \frac{b \sigma}{\beta} \right\}_{\sigma=0}^{\sigma=\beta} \\ & - \alpha c \left\{ (\beta - \sigma)^2 \log \text{nat } \frac{b (\beta - \sigma)}{\beta} \right\}_{\beta-\sigma=0}^{\beta-\sigma=\beta} \\ & + \int_0^\beta \{ a^2 \sigma + \alpha c (\beta - \sigma) \} d\sigma \end{aligned} \right\},$$

hieraus aber

$$a^2 \cdot \text{II} = \beta \left\{ -\frac{a^2 + \alpha c}{2} (\log \text{nat } b^2 - 1) + Ac \right\}. \quad (7)$$

Die Vereinigung der Resultate (6) und (7) mit (2) führt zu der Gleichung:

$$\int_A^C \mathcal{A} ds = K h_0^2 \beta \left\{ \frac{a^2 + \alpha c}{a^2} \log \text{nat } \frac{a}{b} - \frac{(1 + \alpha \beta) c^2}{a^2 b^2} \log \text{nat } \frac{a}{c} \right. \\ \left. + \left( \frac{A}{a^2} + \frac{B}{b^2} \right) c \right\}. \quad (8)$$

§ 9. Fortsetzung: Der Fehler in der nivellierten Gebirgshöhe und der Schlussfehler des Nivellementspolygones  $ACBA$ . Der Fehler des aus dem Nivellement von  $A$  bis  $C$  für die Höhe von  $C$  über  $A$  folgenden Wertes  $\Sigma \delta z$  ist nach (1) des vorigen Paragraphen im Sinne einer Verbesserung gleich

$$\int_A^C \mathcal{A} ds - \int_A^{C'} \mathcal{A}' ds. \quad (1)$$

Den ersten Teil giebt die Gleichung (8) des vorigen Paragraphen; den zweiten finden wir in der bereits in der Anmerkung zu (1) des vorigen Paragraphen angedeuteten Weise, wozu wir den Wert des Potentials  $v'$  mittelst (1) § 7 S. 282 für die Punkte  $A$  und  $C''$  bilden. Es ist:

$$v'_{C''} = k^2 \odot h_0^2 \left\{ \left( \frac{3}{2} + \log \text{nat } \frac{2L}{h_0} \right) c - \frac{\pi}{4} (\alpha \sin 2B + \beta \sin 2A) \right. \\ \left. - \frac{\alpha^2 \cos B}{a} \log \text{nat } \alpha - \frac{\beta^2 \cos A}{b} \log \text{nat } \beta \right\}$$

und

$$v'_A = k^2 \odot h_0^2 \left\{ \left( \frac{3}{2} + \log \text{nat } \frac{2L}{b h_0} \right) c - Ac \frac{\sin B \sin C}{\sin A} \right. \\ \left. + \frac{c^2 \cos B}{a} \log \text{nat } \frac{b}{c} \right\}.$$

Mit Rücksicht auf den letzten Teil des angezogenen § 7 S. 286 giebt die durch  $G$  dividierte Differenz  $v'_{C''} - v'_A$  die Erhebung  $C'C''$  der durch  $A$  führenden gestörten Niveaufläche über  $C''$ , und zwar wird die Division dadurch bewirkt, daß  $k^2 \odot$  durch  $K$  ersetzt wird.  $C'C''$  ist aber der Wert des zweiten in (1) auftretenden Integrales. So findet sich nach einigen Reduktionen, die mit Beachtung von Fig. 87 S. 521 und der Relationen (5) des vorigen Paragraphen leicht zu bewirken sind:

$$\int_A^{C'} \mathcal{A}' ds = K h_0^2 \left\{ c \log \text{nat } b + \frac{c^2 \alpha}{a^2} \log \text{nat } \frac{c}{b} + A \frac{c^2}{a^2} \right. \\ \left. - \frac{\alpha^3}{a^2} \log \text{nat } \alpha - \frac{\beta^3}{b^2} \log \text{nat } \beta - \frac{\pi}{2} \left( \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} \right) \right\}. \quad (2)$$

Vereinigt man dieses Resultat nach Maßgabe von (1) mit (8) des vorigen Paragraphen, faßt dabei die Glieder mit dem Logarithmus derselben Größe zusammen und nimmt sodann noch einige weitere Umformungen vor, so folgt als *Verbesserung der von A bis C nivellierten Höhe*  $\Sigma \delta z$  auf den wahren Wert  $CC'$  der Ausdruck:

$$Kh_0^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{\pi}{2} \left( \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} \right) - \left( \frac{\alpha}{a^2} \log \text{nat } a + \frac{\beta}{b^2} \log \text{nat } b \right) \\ & - \left( \frac{\alpha^3}{a^2} \log \text{nat } \frac{a}{\alpha} + \frac{\beta^3}{b^2} \log \text{nat } \frac{b}{\beta} \right) \\ & + c \left( \frac{\log \text{nat } \frac{c}{b}}{a^2} - \frac{\log \text{nat } \frac{c}{a}}{b^2} + \frac{B\beta}{b^2} - \frac{A\alpha}{a^2} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Nach § 7 (9) S. 286 ist hierzu  $K$  durch die Relation gegeben:

$$K = \frac{3\Theta}{4\Theta_m} \cdot \frac{1}{\pi R}, \quad (3^*)$$

worin  $\Theta$  die Dichtigkeit der Masse des prismatischen Gebirgsrückens bezeichnet.

Vertauscht man in (3)  $A$  mit  $B$ ,  $\alpha$  mit  $\beta$ ,  $a$  mit  $b$ , so ergibt sich die Verbesserung der von  $B$  bis  $C$  nivellierten Höhe  $\Sigma \delta z$  auf den wahren Wert der Erhebung von  $C$  über die durch  $B$  führende wirkliche Niveaufläche. Durch Subtraktion dieses Ausdruckes von (3) folgt diejenige Verbesserung, welche nötig ist, um das Ergebnis des Nivellements  $ACB$  auf den Betrag der Erhebung von  $B$  über die wirkliche Niveaufläche von  $A$  zu bringen. Da nun bei fortgesetztem Nivellement von  $B$  bis  $A$  in der Ebene um den Gebirgsrücken herum, oder überhaupt auf einem nahezu in einer Niveaufläche liegenden Wege, eine weitere Störung nicht entsteht, so ist jene Verbesserung zugleich der Schlußfehler des Nivellementspolygones.

Der *Schlußfehler des Nivellementspolygones*  $ACBA$  ist somit im Sinne einer Verbesserung gleich \*):

$$2Kh_0^2 c \left( \frac{\log \text{nat } \frac{c}{b}}{a^2} - \frac{\log \text{nat } \frac{c}{a}}{b^2} + \frac{B\beta}{b^2} - \frac{A\alpha}{a^2} \right). \quad (4)$$

Daß der Schlußfehler null ist für ein symmetrisches Profil und daß er wächst mit zunehmender Unsymmetrie des Profils ist schon mit Rücksicht auf den Ausdruck (4) § 7 S. 518 klar. Es zeigt sich dies aber auch jetzt ganz deutlich. Differenziert man

\*) Der Schlußfehler wurde zuerst vollständig 1880 von *Clarke* in seiner *Geodesy* p. 299 und unabhängig hiervon vom Verf. 1882 in der *Zeitschrift für Vermessungswesen* Bd. 11 S. 233 u. ff. angegeben, nachdem bereits 1872 *Zachariae* in Bd. 80 der *Astronom. Nachr.* S. 305—318 und 383, Nr. 1916 und 1920, das Problem in die Geodäsie eingeführt, aber unvollkommen gelöst hatte.

nämlich den so eben abgeleiteten Ausdruck (4) nach  $\beta$ , wobei die Relationen:

$$\alpha = c - \beta \quad a^2 = 1 + \alpha^2 \quad b^2 = 1 + \beta^2 \\ A = \arccot \beta \quad B = \arccot \alpha$$

zu beachten sind, so folgt als Differentialquotient:

$$2Kh_0^2 c \left\{ \frac{\alpha}{a^4} \log \text{nat} \left( \frac{c}{b} \right)^2 + \frac{\beta}{b^4} \log \text{nat} \left( \frac{c}{a} \right)^2 \right. \\ \left. - \frac{\beta^2 - 1}{b^4} B - \frac{\alpha^2 - 1}{a^4} A \right\}. \quad (5)$$

Setzt man hierin  $\beta = \alpha$ , dann  $\beta = 3\alpha$  und zuletzt  $\beta = c$  mit  $\alpha = 0$ , so überzeugt man sich in jedem dieser drei Fälle durch Ausrechnung des Wertes des Differentialquotienten für einige Werte von  $\alpha$  bzw.  $c$ , vielleicht unterstützt durch eine graphische Darstellung, ohne Schwierigkeit davon, daß (5) in diesen drei Fällen positiv ist; hieraus kann man aber auf das gleiche Verhalten für alle in betracht kommenden Profilformen schließen.

Somit hat der Schlußfehler (4) den größten Wert, wenn das Profil auf einer Seite vertikal abfällt. Dieser größte Schlußfehler ist gleich

$$Kh_0^2 \frac{c^2}{c^2 + 1} \left\{ \pi - \frac{2 \log \text{nat} c}{c} - \frac{c^2 + 1}{c} \log \text{nat} \frac{c^2 + 1}{c^2} \right\}, \quad (6)$$

wie sich aus (5) durch die Substitution von  $B = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = c$ ,  $a = 1$ ,  $b^2 = c^2 + 1$  ergibt.

Für die entsprechende Profilform geht übrigens der Schlußfehler, wie es sein muß und wie man sich durch Anwendung vorstehender Substitutionen auf (3) überzeugen kann, in den Fehler der nivellierten Höhe von  $A$  bis  $C$  über.

Der größte Schlußfehler kann näherungsweise für nicht zu kleine Werte von  $c$  durch den Näherungsausdruck

$$Kh_0^2 \pi,$$

welcher mit Rücksicht auf den durch (3\*) angegebenen Wert von  $K$  gleich ist

$$\frac{3\Theta}{4\Theta_m} \frac{h_0^2}{R}, \quad (6^*)$$

dargestellt werden. Entwickelt man nämlich (6) nach Potenzen von  $1:c^2$ , so folgt unter ausschließlicher Berücksichtigung der größten Glieder:

$$Kh_0^2 \pi \left\{ 1 - \frac{2 \log \text{nat} c + 1}{\pi c} - \frac{1}{c^2} + \dots \right\}, \quad (7)$$

woraus man die Zulässigkeit der Näherungsformel für größere Werte von  $c$  leicht erkennt und zugleich ersieht, daß dieselbe den Schluß-

fehler etwas überschätzt. Die Überschätzung nimmt aber mit wachsendem Werte von  $c$  ab; sie ist 30% des Näherungswertes für  $c = 5$ , 20% für  $c = 10$  u. s. f.

Eine Überschätzung des Schlusfehlers im allgemeinen findet durch (6\*) auch insofern statt, als ein vertikaler Abfall kaum irgendwo in bedeutender Ausdehnung vorkommen dürfte. Ersetzen wir aber denselben durch einen nicht vertikalen, wenn auch stark geneigten, so wird der Schlusfehler viel kleiner. Dies zeigt schon der Wert des Differentialquotienten (5) des Schlusfehlers für  $\alpha = \text{null}$ . Derselbe beträgt

$$2 K h_0^2 \left\{ c \arctan \frac{1}{c} - \frac{\pi}{2} \frac{c(c^2 - 1)}{(c^2 + 1)^2} + \frac{2c^2}{(c^2 + 1)^2} \log \text{nat } c \right\},$$

oder in hinreichender Annäherung für größere  $c$ :

$$2 K h_0^2.$$

Für kleine  $\alpha$  ist hiernach der Schlusfehler bei nicht zu kleinen Werten von  $c$  angenähert gleich

$$\frac{3\Theta}{4\Theta_m} \frac{h_0^2}{R} \left( 1 - \frac{2\alpha}{\pi} \right). \quad (8)$$

Wie die Vergleichung mit (4) für numerische Werte zeigt, gewährt dieser Ausdruck sogar noch bei  $\alpha = 1$  eine rohe Annäherung. Während er nämlich für  $c = 10$  nahezu den richtigen Wert giebt, überschätzt er ihn für  $c = 5$  um etwa 25% des Näherungswertes und unterschätzt ihn für große  $c$  bis zu 38% desselben.

Für 45° Abfall der steileren Seite kann (4) bei nicht zu kleinen  $c$  durch den Näherungsausdruck

$$\frac{3\Theta}{4\Theta_m} \frac{h_0^2}{R} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi c} \log \text{nat } \frac{c^2}{2} + \dots \right\}. \quad (9)$$

ersetzt werden, welcher selbst für  $c = 5$  nur 20% des Näherungswertes Fehler giebt, für  $c = 10$  aber nur noch 4%. Dieser Ausdruck zeigt, daß der Schlusfehler für 45° Abfall der steileren Seite nur  $\frac{1}{3}$  bis  $\frac{1}{2}$  des maximalen Schlusfehlers (6\*) beträgt. In praktischen Fällen dürfte er somit kaum diesen Betrag erreichen und  $\frac{1}{3}$  als Maximum anzunehmen sein.

In Bezug auf den Fehler der von  $A$  bis  $C$  nivellierten Höhe war schon in § 7 (10) S. 520 unter Voraussetzung flacher Abdachung des Hanges  $AC$  der Ausdruck (6\*), der zugleich den größten Wert des Schlusfehlers repräsentiert, als Näherungswert ermittelt worden. Hiermit stimmt nun auch der Ausdruck (3) überein, wie man zunächst leicht für Profile erkennt, die beiderseits flach abgedacht sind. Alsdann ist nämlich  $\alpha : a$  und  $\beta : b$  nahe gleich 1; ferner ist immer  $\log \text{nat } a$  im Verhältnis zu  $a$  und  $\log \text{nat } b$  im Verhältnis zu  $b$  klein. Demnach reduziert sich in der großen Klammer von (3) das 1. Glied auf  $\pi$ ,



während das 2., 3. und 4., welches letztere den halben Schlufsfehler repräsentiert, wegfallen. Für  $\alpha = \text{null}$ , also vertikalen Abfall einerseits, geht, wie schon bemerkt, (3) in aller Strenge in den grössten Wert des Schlufsfehlers über; in diesem Falle gilt also (6\*) mit derselben Annäherung für den Höhenfehler wie für den Schlufsfehler. Man überzeugt sich aber auch leicht für beliebige kleinere Werte von  $\alpha$ , daß (6\*) eine Annäherung gewährt. Beispielsweise geben für  $\alpha = 1$  in der grossen Parenthese von (3) das 1. Glied  $3\pi : 4$  und das 4. Glied, welches dem halben Schlufsfehler entspricht, nach (9)  $\pi : 4$ ; das 2. und 3. Glied aber geben, wie leicht ersichtlich, überhaupt in keinem Falle etwas Erhebliches. Die grosse Parenthese in (3) wird also angenähert gleich  $\pi$  und der Ausdruck (3) gleich  $K h_0^2 \pi$ , d. i. gleich (6\*).

### § 10. Fortsetzung: Übersicht des Verhaltens in einigen besonderen Fällen.

Um die Übersicht zu fördern, wurden für acht verschieden geböschte Profile mit

$$h_0 = 2500^m$$

die Lotablenkungen berechnet, graphisch dargestellt und daraus eine graphische Darstellung der Schlufsfehler und Fehler der nivellierten Höhen abgeleitet.

Die Profile bilden 2 Gruppen mit je gleicher Basis von bezw. 25000 und 250000<sup>m</sup>, also mit

$$c = 10 \text{ und } c = 100.$$

Die Projektion  $C'$  der Spitze  $C$  auf die Basis  $AB$  fällt in jeder Gruppe der Reihe nach auf  $\frac{6}{6}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{4}{6}$ ,  $\frac{3}{6}$  der Länge  $AB$  von  $B$  aus.

Die Lotablenkungen  $A$  für eine Reihe von Punkten  $P$  auf den Hängen  $AC$  und  $BC$ , sowie die Lotablenkungen  $A'$  für die Projektionen  $P'$  dieser Punkte auf die Grundfläche  $AB$ , ferner die Differenzen  $A - A'$ , welche die Lotkrümmung von  $P$  bis  $P'$  anzeigen, sind in den folgenden Zahlentabellen enthalten. Auf eine genügend scharfe Ermittlung dieser Differenzen  $A - A'$ , welche allein auf das Nivellement einwirken, wurde besonders bedacht genommen. (S. die zwei nächsten Seiten. Zu den Profilen IV und VIII sind auch die Tabellen im 4. Kap. § 11 S. 298 und § 12 S. 301 zu vergleichen.)

Die Lotstörungen  $A$  und  $A'$  sowohl als ihre Differenzen  $A - A'$  sind in Tafel II als Ordinaten zu den  $\sigma$  als Abscissen graphisch aufgetragen, und zwar  $A$  und  $A'$  nach oben,  $A - A'$  zur besseren Übersicht in vergrössertem Maassstabe nach unten. Die Verzeichnung bot dadurch Schwierigkeit, daß der Differentialquotient von  $A$  in  $A$ ,  $B$  und  $C$ , derjenige von  $A'$  in  $A$  und  $B$  unendlich wird, wie schon im 4. Kap. S. 297 und 299 für die Profilformen IV und VIII angegeben ist. Für die Differenz  $A - A'$  bleibt ein stark hervortretendes

Lotablenkungen im mittleren Querprofil *ACB* langgestreckter Gebirgsrücken.

1. Gruppe:  $c = 10, h_0 = 2500^m$ .

Profil I.

$\beta : \alpha = 6 : 0.$

$\sigma$	$A$	$A'$	$A - A'$
0	+ 19,43"	+ 19,43"	+ 0,00"
$\frac{5}{3}$	+ 24,66	+ 23,63	+ 1,03
$\frac{10}{3}$	+ 23,94	+ 21,96	+ 1,98
5	+ 19,44	+ 16,60	+ 2,84
$\frac{20}{3}$	+ 10,49	+ 6,92	+ 3,57
$\frac{70}{9}$	+ 0,74	− 3,18	+ 3,92
$\frac{25}{3}$	− 6,11	− 10,04	+ 3,93
9	− 17,20	− 20,93	+ 3,73
$\frac{55}{6}$	− 21,40	− 25,03	+ 3,63
9,5	− 28,92	− 32,18	+ 3,26
9,8	− 37,98	− 40,78	+ 2,80
9,9	− 41,39	− 44,05	+ 2,66
10	− 45,00	− 47,48	+ 2,48

Profil III.

$\beta : \alpha = 4 : 2.$

$\sigma$	$A$	$A'$	$A - A'$
0	+ 23,57"	+ 23,57"	0,00"
1	+ 29,26	+ 27,87	+ 1,39
$\frac{5}{3}$	+ 30,09	+ 27,85	+ 2,24
$\frac{10}{3}$	+ 26,86	+ 22,72	+ 4,14
5	+ 15,94	+ 10,61	+ 5,33
6	+ 3,41	− 1,00	+ 4,41
$\frac{19}{3}$	− 2,91	− 5,73	+ 2,82
$\frac{20}{3}^*$	− 12,89	− 10,69	− 2,20
7	− 23,04	− 15,68	− 7,36
7,5	− 31,35	− 22,50	− 8,85
$\frac{25}{3}$	− 38,16	− 31,03	− 7,13
9	− 39,76	− 34,74	− 5,02
9,5	− 37,93	− 35,29	− 2,64
10	− 30,83	− 30,83	− 0,00

Profil II.

$\beta : \alpha = 5 : 1.$

$\sigma$	$A$	$A'$	$A - A'$
0	+ 21,23"	+ 21,23"	0,00"
$\frac{5}{3}$	+ 27,06	+ 25,59	+ 1,47
$\frac{10}{3}$	+ 25,49	+ 22,68	+ 2,81
5	+ 18,88	+ 14,99	+ 3,89
$\frac{20}{3}$	+ 5,46	+ 1,01	+ 4,45
7,5	− 6,02	− 9,74	+ 3,72
8	− 16,48	− 17,68	+ 1,20
8,3	− 26,53	− 22,95	− 3,58
$\frac{25}{3}^*$	− 28,53	− 23,55	− 4,98
8,35	− 29,98	− 23,84	− 6,14
8,5	− 38,36	− 26,51	− 11,85
8,65	− 41,16	− 29,11	− 12,05
9	− 47,22	− 34,68	− 12,54
$\frac{55}{6}$	− 48,62	− 36,95	− 11,67
9,5	− 48,83	− 40,31	− 8,52
9,7	− 47,10	− 41,33	− 5,77
9,8	− 45,70	− 41,50	− 4,20
10	− 39,28	− 39,28	− 0,00

Profil IV.

$\beta : \alpha = 3 : 3.$

$\sigma$	$A$	$A'$	$A - A'$
0	+ 26,74"	+ 26,74"	0,00"
1,5	+ 34,05	+ 30,57	+ 3,48
3	+ 29,13	+ 23,06	+ 6,07
4	+ 20,01	+ 13,39	+ 6,62
4,5	+ 12,69	+ 7,06	+ 5,63
4,9	+ 3,75	+ 1,44	+ 2,31
5*	0,00	0,00	0,00

2. Gruppe:  $c = 120$ ,  $h_0 = 2500^m$ .

## Profil V.

 $\beta : \alpha = 6 : 0$ .

$\sigma$	$A$	$A'$	$A - A'$
0	+ 19,50"	+ 19,50"	0,00"
10	+ 23,78	+ 23,72	+ 0,06
25	+ 24,85	+ 24,70	+ 0,15
40	+ 22,66	+ 22,42	+ 0,24
55	+ 17,35	+ 17,02	+ 0,33
70	+ 7,94	+ 7,52	+ 0,42
82	— 4,75	— 5,24	+ 0,49
90	— 19,04	— 19,57	+ 0,53
95	— 34,94	— 35,48	+ 0,54
98	— 54,16	— 54,67	+ 0,51
100	— 89,80	— 90,10	+ 0,30

## Profil VII.

 $\beta : \alpha = 4 : 2$ .

$\sigma$	$A$	$A'$	$A - A'$
0	+ 23,71"	+ 23,71"	0,00"
$50/3$	+ 30,26	+ 30,02	+ 0,24
$100/3$	+ 27,03	+ 26,57	+ 0,46
50	+ 16,07	+ 15,39	+ 0,68
60	+ 3,37	+ 2,58	+ 0,79
65	— 7,31	— 8,00	+ 0,69
66	— 10,50	— 10,94	+ 0,44
$200/3^*$	— 13,51	— 13,11	— 0,40
67	— 15,22	— 14,22	— 1,00
68	— 18,70	— 17,29	— 1,41
70	— 23,77	— 22,28	— 1,49
75	— 32,13	— 30,82	— 1,31
80	— 37,18	— 36,11	— 1,07
90	— 40,49	— 39,94	— 0,55
95	— 38,68	— 38,41	— 0,27
100	— 32,13	— 32,13	0,00

## Profil VI.

 $\beta : \alpha = 5 : 1$ .

$\sigma$	$A$	$A'$	$A - A'$
0	+ 21,32"	+ 21,32"	0,00"
$50/3$	+ 27,16	+ 27,01	+ 0,15
$100/3$	+ 25,60	+ 25,31	+ 0,29
50	+ 18,98	+ 18,54	+ 0,44
$175/3$	+ 13,34	+ 12,83	+ 0,51
$200/3$	+ 5,41	+ 4,83	+ 0,58
$220/3$	— 3,58	— 4,21	+ 0,63
80	— 17,55	— 18,15	+ 0,60
82	— 24,20	— 24,59	+ 0,39
$250/3^*$	— 31,35	— 30,12	— 1,23
84	— 35,54	— 33,01	— 2,53
85	— 39,61	— 36,81	— 2,80
$175/2$	— 46,24	— 43,68	— 2,56
$275/6$	— 51,42	— 49,63	— 1,79
95	— 51,55	— 50,43	— 1,12
98	— 48,20	— 47,74	— 0,46
100	— 41,90	— 41,90	— 0,00

## Profil VIII.

 $\beta : \alpha = 3 : 3$ .

$\sigma$	$A$	$A'$	$A - A'$
0	+ 27,03"	+ 27,03"	0,00"
5	+ 31,97	+ 31,84	+ 0,13
10	+ 33,87	+ 33,62	+ 0,25
15	+ 34,37	+ 34,00	+ 0,37
20	+ 33,76	+ 33,28	+ 0,48
30	+ 29,46	+ 28,73	+ 0,73
40	+ 20,30	+ 19,36	+ 0,94
45	+ 12,87	+ 11,85	+ 1,02
48	+ 6,58	+ 5,59	+ 0,99
49	+ 3,83	+ 2,97	+ 0,86
50*	0,00	0,00	0,00

Unendlichwerden des Differentialquotienten aber nur bei  $CC'$ , was bereits aus den vorstehenden Zahlentabellen, in denen die Stelle  $CC'$  durch einen Stern hervorgehoben ist, ersehen werden kann. Allerdings ist strenggenommen auch in  $A$  und  $B$  der Differentialquotient von  $A - A'$  nicht endlich, sondern unendlich. Betrachtet man aber die Formeln (2) § 11 S. 295 und (4) § 12 S. 299, so erkennt man, daß z. B. die in  $A$  unendlich werdenden Glieder, abgesehen vom Faktor  $-2Kh_0$ , für  $A$  und  $A'$  bzw. sind:

$$\tan A \log \text{nat } \sigma \quad \text{und} \quad \sin A \cos A \log \text{nat } \sigma,$$

welche sich für flache Profile nur äußerst wenig unterscheiden. In der That gelang es bei keiner Profilform, das Unendlichwerden des Differentialquotienten von  $A - A'$  bei  $A$  und  $B$  sichtbar zu machen.

Die von der beweglichen Ordinate  $A - A'$  mit wachsendem  $\sigma$  beschriebene Fläche ist von  $A$  bis zu irgend einer Stelle dem Fehler in der nivellierten Höhe von  $A$  bis zu dem entsprechenden Punkte  $P$  des Hanges proportional. Die ganze Fläche ist der Schlußfehler des Nivellements  $ACBA$ . In den Zeichnungen sind die dem Inhalte der zu beiden Seiten der Abscissenaxe liegenden Flächen entsprechenden Fehler in Metern eingeschrieben. Die unterhalb liegenden Zahlen sind positiv, die oberhalb liegenden negativ zu rechnen.

Die Schlußfehler und Fehler der nivellierten Höhe von  $A$  bis  $C$  sind außerdem nach den strengen Formeln (4) und (3) des vorigen Paragraphen berechnet worden. Diese in folgender Tabelle enthaltenen Werte stimmen mit den aus der Zeichnung entnommenen noch in den Centimetern überein, mithin so gut als eine solche Zeichnung es gestattet.

Fehler der Nivellements im mittleren Teile eines homogenen,  
langgestreckten Gebirgsrückens von der Form eines  
liegenden dreiseitigen Prismas.

Profil	$h_0 = 2500^m$	$\beta : \alpha$	Schlußfehler $ACBA$	Fehler d. Höhe $C$ über $A$
I	$AB = 25000^m$	6:0	0,299 <sup>m</sup>	0,30 <sup>m</sup>
II		5:1	0,081	0,26
III		4:2	0,026	0,26
IV		3:3	0,000	0,26
V	$AB = 250000^m$	6:0	0,356	0,36
VI		5:1	0,009	0,35
VII		4:2	0,003	0,35
VIII		3:3	0,000	0,35

Diese Tabelle läßt deutlich hervortreten, daß es einer starken Unsymmetrie des Gebirgsprofils bedarf, um aus der Anziehung des

als homogen betrachteten Gebirges einen Schlufsfehler für das Nivellement  $ACBA$  entstehen zu lassen. Mit Rücksicht auf das S. 510 Fig. 84 gegebene Alpenprofil wird man sich sagen müssen, daß der Anteil des Schlufsfehlers der *Alpenpolygone*, welcher aus vorstehender Ursache erzeugt wird, nur einige Centimeter betragen kann.

§ 11. Fortsetzung: Größter Schlufsfehler. Wir haben bisher lediglich Nivellements betrachtet, welche den langgestreckten Gebirgsrücken in seinem mittleren Teile überschreiten, und zwar wurde für diesen Fall gefunden, daß der Schlufsfehler der Nivellements, welche im übrigen in der Ebene verlaufen, infolge der Unsymmetrie des Querprofiles des Gebirges in praktischen Fällen kaum soviel wie der dritte Teil des Gebirgshöhenfehlers, vergl. § 9 S. 527, betragen dürfte, da auch die steilere Seite des Gebirges im allgemeinen noch weit sanfter als im Gefälle 1 : 1 abfallen wird. Es ist nun aber noch die Frage zu beantworten, ob nicht dadurch eine Steigerung des Schlufsfehlers entstehen kann, daß ein Nivellement bei Überschreitung des Gebirges nicht ausschließlich in mittleren Teilen desselben verbleibt, oder dieselben überhaupt nicht berührt.

Nehmen wir also an, daß das Nivellement den Gebirgskamm in einem gewissen Profil  $AC_1$  ersteigt, auf dem Kamme bis  $C_2$  fortgeführt wird, in  $C_2B$ , einem anderen Profile, wieder zum Fusse des Gebirges gelangt und schließlich in der Ebene zum Ausgangspunkte  $A$  zurückkehrt. Den entstehenden Schlufsfehler beurteilen wir jetzt am einfachsten nach Maßgabe der Formel (4) § 7 S. 518, und zwar können wir denselben mit einer kleinen Modifikation, die leicht als zulässig erkannt wird, gleich setzen

$$\int_0^{h_0} \frac{\delta g' - \delta g''}{G} dh, \quad (1)$$

worin bezeichnen:  $h_0$  die Höhe des Kammes  $C_1C_2$  über der Ebene  $AB$ ,  $\delta g'$  und  $\delta g''$  die Schwerestörungen in gleichen Höhen beim Auf- und Abstieg und  $G$  irgend einen konstanten mittleren Wert der Schwerkraft der Gegend.

Erfolgt der Aufstieg im mittleren Teile des Gebirgsrückens an einer sehr sanften Böschung, so ist  $\delta g'$  ein Maximum und nach § 7 (5) S. 518 sehr nahe gleich:

$$+ G \cdot \frac{3\Theta}{4\Theta_m} \frac{2h}{R};$$

es wird daher angenähert

$$\int_0^{h_0} \frac{\delta g'}{G} dh = \frac{3\Theta h_0^2}{4\Theta_m R}, \quad (2)$$

d. h. gleich dem Gebirgshöhenfehler (10) § 7 S. 520.

Für den Fall, daß auch der Abstieg im mittleren Teile des Gebirgsrückens erfolgt und das Gefälle des Hanges kleiner als 1:1 ist, hat aber der Ausdruck (1) nach S. 527 ungefähr einen Maximalwert gleich  $\frac{1}{3}$  des Ausdruckes (2), mithin ist alsdann im allgemeinen:

$$\int_0^{h_0} \frac{\delta g''}{G} dh > \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \Theta h_0^2}{4 \Theta_m R} \quad (3)$$

Erfolgt jedoch der Abstieg in einem Querprofile in der Nähe eines der beiden Enden des prismatischen Gebirgsrückens, so ist der Wert dieses Integrales im allgemeinen kleiner, weil bei gleicher Höhenlage die Schwerestörung  $\delta g''$  am Ende kleiner wie in der Mitte ist — würden wir ein mathematisches Prisma mit gerade abgeschnittenen Enden haben, so wäre hier (große Länge vorausgesetzt) der Integralwert genau die Hälfte von dem in der Mitte; in Wirklichkeit ist wegen der Abböschung der Enden die Verkleinerung nur etwa  $\frac{3}{4}$ ; mithin wird für diesen Fall

$$\int_0^{h_0} \frac{\delta g''}{G} dh > \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \Theta h_0^2}{4 \Theta_m R} \quad (4)$$

und somit aus der Vereinigung von (2) und (4) der Schlufsfehler

$$\int_0^{h_0} \frac{\delta g' - \delta g''}{G} dh < \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \Theta h_0^2}{4 \Theta_m R}, \quad (5)$$

d. h. der Schlufsfehler für ein in der Mitte des Gebirges aufsteigendes, am Ende desselben absteigendes Nivellement  $AC_1 C_2 BA$  ist kleiner als die Hälfte des Fehlers für die Gebirgshöhe  $h_0$ .

Dieser Betrag dürfte überhaupt das äußerste Maß des Schlufsfehlers bei irgend einem homogenen Gebirge vorstellen, auch mit Rücksicht auf den Umstand, daß ein Nivellement im Gebirge sich im allgemeinen in Thälern und über Pässe (also in Einschnitten der Gebirgsmasse) bewegt, solange es sich nur wesentlich um einen einfachen Auf- und Abstieg handelt. Das dürfte sich unschwer an der Hand des für diesen Fall allgemein gültigen Ausdruckes (1) erkennen lassen, wenn die Variationen der Schwerestörungen in betracht gezogen werden, welche mit der Änderung der Umstände verknüpft sind. In den meisten Fällen wird der Schlufsfehler sogar wesentlich kleiner sein.

Selbstverständlich kann er dadurch gesteigert werden, daß in einem Nivellement *wiederholte Überschreitungen* von Höhen vorkommen. Man muß aber hierbei beachten, daß diese Steigerung keine notwendige ist; es kann im allgemeinen ebensowohl eine Kompensation der mit den einzelnen Überschreitungen verbundenen Fehler stattfinden; solange daher die spezielle Form des Verlaufes des Nivellements nicht beachtet wird, muß die Verknüpfung dieser Einzelfehler nach der Regel für *zufällige* Fehler stattfinden.

§ 12. Einfluss eines unterirdischen Massendefektes von kugelförmiger Gestalt.  $M$  sei der Mittelpunkt eines kugelförmigen

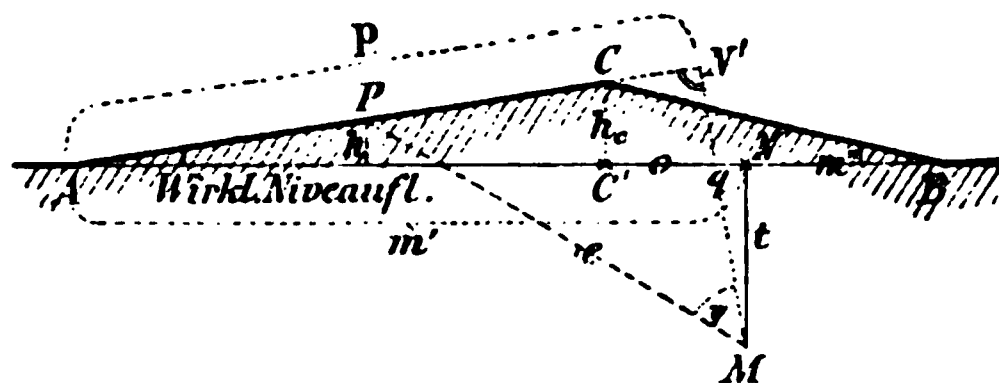


Fig. 88.

Hohlraumes, über welchen hinweg ein Nivellement geführt werde. Zur Erleichterung der Integration nehmen wir ein ebenes, dreieckiges Nivellementsprofil  $ACB$  in einer Vertikalebene durch

$M$  an, Fig. 88.  $AB$  sei eine wirkliche Niveauebene.\*)

Wir beziehen  $M$  auf  $AB$  durch die rechtwinkligen Koordinaten  $AN = m'$  und  $NM = t$ , sowie auf  $AC$  durch  $AN' = p$  und  $N'M = q$ . Mit den übrigen Bezeichnungen der Figur ist alsdann der Abstand eines Punktes  $P$  der Linie  $AC$  von  $M$  gleich

$$e = q \sec \psi. \quad (1)$$

Ist  $\Theta$  die Dichtigkeit der Massenschicht, in welcher der Hohlraum vorkommt, so ist die Anziehung der störenden Masse in dem Abstände  $PM = e$  gleich zu setzen

$$-\frac{4}{3} \pi k^2 \Theta \frac{a^3}{e^2}, \text{ d. i. } -\frac{G}{R} \cdot \frac{\Theta a^3}{\Theta_m e^2}, \quad (2)$$

wobei  $a$  den Radius des Hohlraumes bezeichnet. Wir nehmen nun der Einfachheit halber sogleich

$$\frac{\Theta}{\Theta_m} = \frac{1}{2}. \quad (2^*)$$

Für den Punkt  $P$  wird hiermit die von dem Hohlraum herrührende Schwerestörung

$$\delta g' = -G \cdot \frac{a^3}{2R} \frac{\cos(A + \psi)}{e^2}.$$

Hierin ist für  $e$  der Wert (1) zu setzen. Beachtet man ferner die aus Fig. 88 zu ersehende Relation:

$$h = (p - q \tan \psi) \sin A, \quad (3)$$

womit

$$dh = -q \sin A \sec^2 \psi d\psi$$

wird, so folgt:

$$\int_A^C \frac{\delta g'}{G} dh = \frac{a^3}{2Rq} \sin A \int_1^C \cos(A + \psi) d\psi.$$

\*) Größere Hohlräume können aus Gründen der Festigkeit wohl nicht existieren, aber für unsere Zwecke dürfen wir uns den Massendefekt in einem solchen Hohlraume konzentriert denken.

Die Integration bietet keine Schwierigkeit und giebt

$$\int_A^C \frac{\delta g'}{G} dh = \frac{a^3}{2Rq} \sin A \left\{ \sin (A + \psi_3) - \sin (A + \psi_1) \right\}, \quad (4)$$

wobei  $\psi_1$  und  $\psi_3$  die Werte von  $\psi$  für  $AM$  und  $CM$  bedeuten.

Zur Berechnung ist es in der Regel bequemer,  $q$  sowie die beiden Sinus der Parenthese durch die Koordinaten  $m'$  und  $t$  von  $M$  und durch die Größen  $h_0$  und  $o$ , vergl. Fig. 88, auszudrücken. Es folgt alsdann aus (4):

$$\int_A^C \frac{\delta g'}{G} dh = \frac{a^3 \sin A}{2R(m' \sin A + t \cos A)} \left( \frac{o}{\sqrt{o^2 + (t + h_0)^2}} - \frac{m'}{\sqrt{m'^2 + t^2}} \right).$$

Ganz entsprechend ist für die Profilstrecke  $BC$ :

$$\int_B^C \frac{\delta g''}{G} dh = \frac{a^3 \sin B}{2R(m'' \sin B + t \cos B)} \left( \frac{o}{\sqrt{o^2 + (t + h_0)^2}} - \frac{m''}{\sqrt{m''^2 + t^2}} \right).$$

Mit Rücksicht auf den allgemeinen Ausdruck (4) § 7 S. 518 ist hiernach der im Nivellementspolygon  $ACBA$  erzeugte *Schlussfehler* gleich

$$\frac{a^3}{2R} \left\{ \frac{\sin A}{m' \sin A + t \cos A} \left( \frac{o}{\sqrt{o^2 + (t + h_0)^2}} - \frac{m'}{\sqrt{m'^2 + t^2}} \right) + \frac{\sin B}{m'' \sin B + t \cos B} \left( \frac{o}{\sqrt{o^2 + (t + h_0)^2}} - \frac{m''}{\sqrt{m''^2 + t^2}} \right) \right\}. \quad (5)$$

Dieser Ausdruck läßt aber imstich, wenn  $M$  in der Verlängerung von  $AC$  oder  $CB$  liegt, weil alsdann das 1. oder 2. Glied der geschlungenen Parenthese in  $0:0$  übergeht. Um daher noch einen in allen Fällen unmittelbar brauchbaren Ausdruck zu erlangen, schreiben wir in (4) anstatt

$$\begin{aligned} & \sin (A + \psi_3) - \sin (A + \psi_1) \\ \text{identisch} & - 2 \cos \left( A + \frac{\psi_1 + \psi_3}{2} \right) \sin \frac{\psi_1 - \psi_3}{2} \end{aligned}$$

und beachten außerdem behufs Elimination von  $q$  aus (4) die aus der doppelten Berechnung des Dreiecksinhaltes  $ACM$  folgende Relation:

$$\frac{qh_0}{\sin A} = e_1 e_3 \sin (\psi_1 - \psi_3),$$

worin  $e_1$  und  $e_3$  die Distanzen  $MA$  und  $MC$  bezeichnen. Damit folgt aus (4):

$$\int_A^C \frac{\delta g'}{G} dh = - \frac{a^3 h_0}{2R e_1 e_3} \frac{\cos \left( A + \frac{\psi_1 + \psi_3}{2} \right)}{\cos \frac{\psi_1 - \psi_3}{2}}. \quad (6)$$



Hierin ist  $A + \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$  der Neigungswinkel der Halbierungslinie des Gesichtswinkels, unter welchem  $AC$  in  $M$  erscheint, gegen die Vertikale, und  $\frac{\psi_1 - \psi_2}{2}$  die Hälfte dieses Gesichtswinkels. Diese Größen bezeichnen wir für  $AC$  mit  $\nu'$  und  $\gamma'$ , für  $BC$  mit  $\nu''$  und  $\gamma''$ , wie auch Fig. 89 zeigt. Wir erhalten damit als *Schlussfehler* an Stelle von (5):

$$\frac{a^3 h_0}{2 R e_3} \left\{ \frac{\cos \nu''}{e_2 \cos \gamma''} - \frac{\cos \nu'}{e_1 \cos \gamma'} \right\}, \quad (7)$$

welcher Ausdruck stets bestimmte Angaben liefert. Hierzu berechnet man die  $e$ ,  $\nu$  und  $\gamma$  nach Maßgabe der Fig. 89 aus den nachstehenden Formeln:

$$\begin{aligned} e_1 \sin(\nu' + \gamma') &= m' & e_2 \sin(\nu'' + \gamma'') &= m'' \\ e_1 \cos(\nu' + \gamma') &= t & e_2 \cos(\nu'' + \gamma'') &= t \\ e_3 \sin(\nu' - \gamma') &= o & &= e_3 \sin(\gamma'' - \nu'') \\ e_3 \cos(\nu' - \gamma') &= t + h_0 & &= e_3 \cos(\gamma'' - \nu''), \end{aligned} \quad (8)$$

wobei die positive Zählung für die  $m$ ,  $o$ ,  $\nu$  und  $\gamma$  genau nach Fig. 89 zu verstehen ist.

§ 13. Fortsetzung: Maximum des Schlussfehlers; Fehler der nivellierten Höhe. Ausdruck (7) des vorigen Paragraphen be-

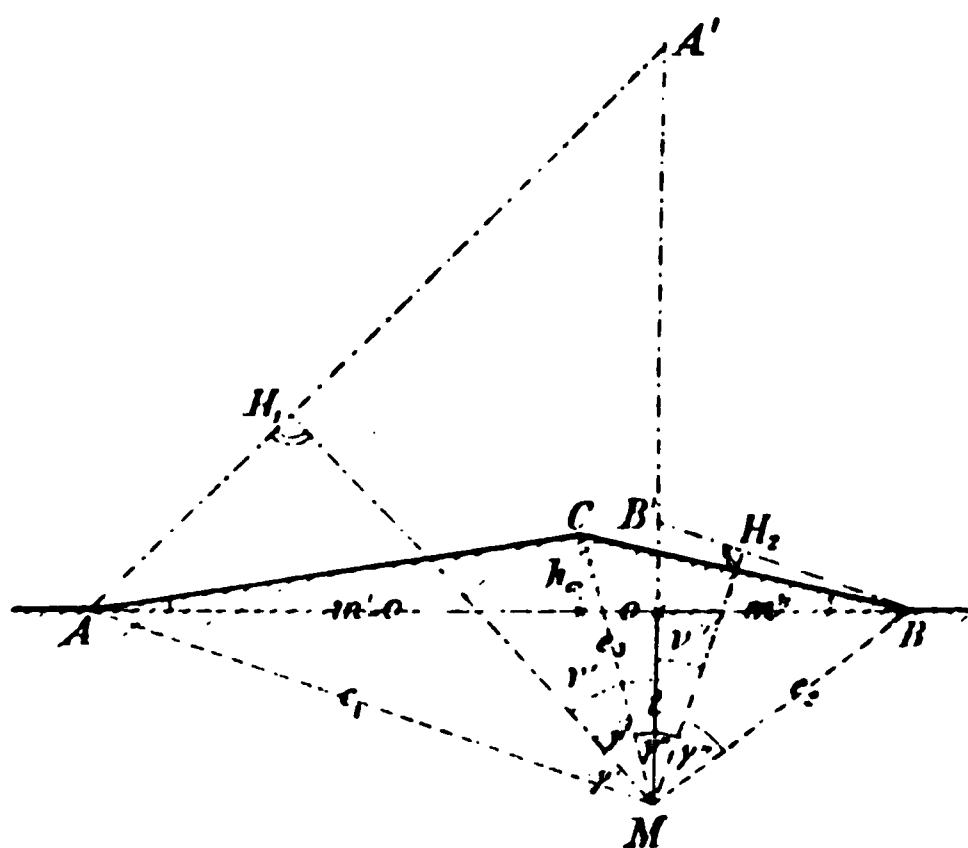


Fig. 89.

stätigt den auch unmittelbar leicht zu ziehenden Schluss, daß  $M$  ungefähr unter der Mitte der steiler geböschten Seite die stärkste Wirkung giebt, und daß die letztere mit der Böschung dieser Seite wächst. Bei der Betrachtung der Variationen von (7) ist es nützlich, diesen Ausdruck, wie folgt zu schreiben:

$$\frac{a^3 h_0}{2 R} \cdot \frac{1}{e^3} \left( \frac{1}{MB'} - \frac{1}{MA'} \right), \quad (1)$$

wobei  $MA'$  und  $MB'$  vertikale Linien sind, welche (vergl. Fig. 89) mittelst der Normalen  $AA'$  und  $BB'$  zu den Halbierungslinien  $MH_1$  und  $MH_2$  der Gesichtswinkel  $2\gamma'$  und  $2\gamma''$  konstruiert werden.

Lassen wir in (7) des vorigen Paragraphen das kleinere negative Glied fort, was dem Falle entspricht, daß die Seite  $AC$  sehr flach

abfällt und  $CBM$  vertikal ist, so ergibt sich das *Maximum des Schlufsfehlers* (7):

$$\frac{a^3 h_0}{2 R t (t + h_0)} . \quad (2)$$

Diesem Ausdruck geben wir noch eine andere Gestalt mittelst der maximalen Lotablenkung, welche der Hohlraum erzeugt. Wir haben dieselbe, da jetzt  $AC$  schwach geböscht,  $CB$  nahezu vertikal und über  $M$  gedacht wird, in Fig. 89 rechter Hand von  $B$  auf der Verlängerung von  $AB$  zu suchen. Bezeichnen wir die *maximale Lotablenkung* mit  $A_{max}$ , so ist nach dem 4. Kap. § 2 (12) S. 272 für  $\Theta = \frac{1}{2} \Theta_m$ :

$$A_{max} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{a^3}{R t^2} , \quad (3)$$

wobei  $A$  als Arcus zu verstehen ist.

Hiermit giebt (2) als *Maximum des Schlufsfehlers*:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} h_0 \frac{A_{max}}{1 + \frac{h_0}{t}} ,$$

oder abgekürzt:

$$\frac{5}{2} h_0 A_{max} \quad \text{oder} \quad \frac{5}{2} \frac{A_{max} \text{ in Sek.}}{\varrho'} h_0 . \quad (4)$$

Diese Abkürzung reicht aus, da bei gröfseren Hohlräumen  $t > h_0$  sein wird.

Setzen wir  $h_0 = 1250^m$ ,  $a = 5000^m = 4h_0$ ,  $t = 15000^m = 12h_0$ , so wird nach (2) der maximale Schlufsfehler gleich

$$0,050^m .$$

Dagegen wird nach (4) und (3) derselbe gleich  $0,052^m$  mit der maximalen Lotablenkung

$$3,5'' .$$

Um die Lotablenkung auf  $7''$  und den Schlufsfehler auf  $0,100^m$  zu bringen, mufs der vorausgesetzte Hohlraum von  $1\frac{1}{4}$  Kubikmeile Volumen (welcher ungefähr dem nach *Schweizers* Untersuchungen unterhalb *Moskau* befindlichen entspricht, vergleiche S. 377) in nur  $10000^m$  Tiefe  $t$  angenommen werden, womit sich die Dicke der Erdschicht über dem Hohlraum  $t - a = 5000^m$  ergibt. Kleiner kann man letztere nicht wohl voraussetzen, weil die Dimensionen des wirklichen Massendefektes gröfser als die des Hohlraumes sein müssen, da er kein absoluter Massenmangel sein kann.

Zur Berechnung des Schlufsfehlers für eine Profilform, welche praktischen Verhältnissen, insbesondere den Alpennivellements besser entspricht, als obige Annahmen, setzen wir noch:

$$\begin{aligned} h_0 &= 1250^m, & AB &= 25000^m, & \cot A &= 16, & \cot B &= 4, \\ m' &= 18h_0, & m'' &= 2h_0 = 0, & a &= 4h_0, & t &= 12h_0. \end{aligned}$$

Damit giebt Ausdruck (5) des vorigen Paragraphen als Schlufsfehler, indem  $a^3 : 2Rh_0$  nahezu gleich 8 wird:

$$8 \left\{ \frac{1}{210} \left( \frac{2}{\sqrt[3]{173}} - \frac{18}{\sqrt[3]{468}} \right) + \frac{1}{50} \left( \frac{2}{\sqrt[3]{173}} + \frac{2}{\sqrt[3]{148}} \right) \right\},$$

d. i.  $- 0,026 + 0,050 = + 0,024^m$ .

Für  $t = 10000^m = 6h_0$  verdoppelt sich dieses Ergebnis annähernd.

Hieraus kann man wohl den Schlufs ziehen, dafs durch kugelförmige Massendefekte in den *Alpen* bei den die Pässe überschreitenden Präzisionsnivellements Schlufsfehler von 10 Centimetern zwar entstehen können, aber nicht gerade sehr wahrscheinlich sind.

Handelt es sich nicht um den Schlufsfehler, sondern um den Fehler der nivellierten Höhe von  $A$  bis  $C$  im Sinne einer Verbesserung auf den Wert  $CC'$ , so genügt es, die Formel (5) oder (7) des vorigen Paragraphen auf den Linienzug  $ACC'$  anzuwenden. Dieses zeigt sich ohne Schwierigkeit mit Rücksicht auf die allgemeinen Ausdrücke (1) und (4) § 7 S. 518, wenn man bedenkt, dafs der analytische Ausdruck der Schwerestörung für  $CC'$  derselbe ist, wie für ein vertikales  $CB$ .  $ACC'$  giebt also dieselbe Wirkung wie  $ACB$  im Maximum bei vertikalem Abfall von  $CB$ . Der *Maximalfehler der nivellierten Höhe* ist daher ebenfalls durch Ausdruck (2) bzw. (4) gegeben.

Vergleicht man diesen durch einen kugelförmigen Hohlraum erzeugten Fehler mit demjenigen, welcher S. 520 unter (10\*) aus der Anziehung der Gebirgsmasse abgeleitet wurde, so erkennt man leicht, dafs letzterer in der Regel der bedeutendere sein wird. Gleichheit der Wirkungen entsteht u. a. bei  $t = 2a$  und  $a = 3h_0$  rund, ferner bei  $t = 3a$  und  $a = 7h_0$ .

§ 14. Zusammenfassung vorstehender Untersuchungen über den Einfluß der Anomalien der Schwerkraft. Wir haben im Vorstehenden an einigen Beispielen den Einfluß der Anziehung einer homogenen Gebirgsmasse, ferner den Einfluß von Dichtigkeitsunterschieden in derselben, endlich den Einfluß eines bedeutenden Massendefektes untersucht. Es dürfte dieses ausreichen. Denn was anders geformte Massendefekte anbetrifft, so ist doch die maximale Wirkung jedenfalls gerade bei der Kugelform zu suchen, da bei einer Verteilung eines und desselben Volumens nach der Länge oder Breite die Anziehung auf die verschiedenen Seiten des Nivellementsprofils sich im allgemeinen mehr der Gleichmässigkeit nähert. Dieses wurde z. B. für die Annahme eines cylindrischen Hohlraumes, dessen Axe quer zum Nivellementsprofil liegt, genauer untersucht und bestätigt gefunden\*). In Bezug auf unterirdische Massenanhäufungen kann

\*) Vergleiche Verfassers Aufsatz in der *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 1883, S. 27.

außerdem bemerkt werden, daß sie weniger schädlich als Defekte sind, da sie nicht in gleichem Sinne wirken wie die Anziehung des Gebirges bei Ungleichheit seiner Abböschungen.

Zu den vorstehend berücksichtigten Schwerestörungen lokalen Charakters können allerdings noch solche mehr kontinentalen Charakters treten. Diese erlangen aber für die Schlußfehler nur in den seltenen Fällen Bedeutung, wo es sich um solche kontinental ausgedehnte Nivellements handelt, welche bedeutendere Höhen an extremen Stellen ersteigen und in den dazwischen liegenden Teilen nicht wieder verlassen. In Europa existieren Gebiete, die zu derartigen Nivellements Veranlassung geben könnten, nicht. Wollten wir auch voraussetzen, daß in 500<sup>m</sup> Höhe an dem einem Abhange der Alpen in der Längsrichtung derselben ein Nivellement geführt würde, welches an den beiden Enden diese 500<sup>m</sup> erstiege bzw. verliefse, so würden erst dann 10 Centimeter Schlußfehler durch kontinentale Störungen entstehen, wenn deren Unterschied für beide Enden  $G:5000$  betrüge, wofür nach § 29 S. 215 u. ff. und § 37 S. 244 wenig Wahrscheinlichkeit vorhanden ist.

Man ersieht hieraus, daß die Schwerestörungen in europäischen Nivellements wahrscheinlich keine *Schlußfehler* erzeugen werden, die bei Zusammenwirken verschiedener Ursachen im ungünstigsten Falle 1 bis 2 Decimeter überschreiten; meist werden dieselben kleiner sein.

Ein anderes ist es mit den Nivellementsergebnissen für die *Meereshöhen*; hier können zusammengenommen die Fehler recht wohl  $\frac{1}{2}$  Meter betragen. Da aber diese Fehler in den Nivellements-polygonen sich nahezu aufheben, so sind sie wenigstens insofern nicht schädlich, als sie das Zustandekommen bestimmter Angaben für die Meereshöhen innerhalb der Genauigkeit der Beobachtung nicht verhindern. (§ 6 S. 514.)

## § 15. Die anormale Depressionsdifferenz zwischen Rück- und Vorblick.

Wir haben jetzt zu untersuchen, welchen Einfluß eine Verschiedenheit der Krümmung derjenigen Niveaufläche, zu welcher die Visieraxe des Nivellierinstruments als Tangente gedacht wird, rück- und vorwärts bei gleichen Zielweiten auf die Zielhöhendifferenz ausübt, d. h. wie groß in der Bezeichnung der Fig. 83 des § 2 S. 502 die Differenz  $d_2 - d_1$  für einen Stand ist. In § 5 S. 511 ist die Untersuchung bereits für die normale Krümmung der Niveauflächen durchgeführt; nunmehr betrachten wir anormale Krümmungen.

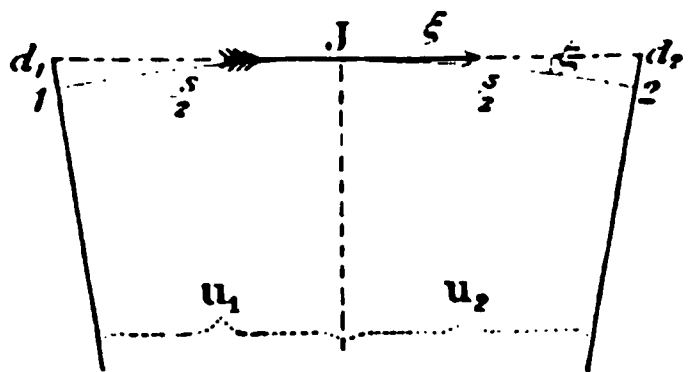


Fig. 90.

Im Anschluß an die Fig. 83 auf S. 502 sei jetzt in Fig. 90  $J$  der Durchkreuzungspunkt der Vertikalaxe und Visieraxe des Instruments. Von demselben aus zählen wir in der Tangente Abscissen  $\xi$  und normal dazu Ordinaten  $\zeta$  der Niveaufläche. So lange nun die Entwicklung nach *Taylor's* Satz zulässig ist, kann man setzen:

$$\zeta = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 \zeta}{d \xi^2} \right)_J \xi^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{d^3 \zeta}{d \xi^3} \right)_J \xi^3 + \dots$$

Diese Entwicklung wenden wir an auf die Punkte 2 und 1 der Niveaufläche in gleichem Abstände  $\frac{s}{2}$  vor- und rückwärts.  $\zeta$  ist in beiden Punkten von den Depressionen  $d$  nicht wesentlich verschieden. Wir erhalten also:

$$d_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 \zeta}{d \xi^2} \right)_J \cdot \frac{s^2}{4} + \frac{1}{6} \left( \frac{d^3 \zeta}{d \xi^3} \right)_J \cdot \frac{s^3}{8} + \dots$$

$$d_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 \zeta}{d \xi^2} \right)_J \cdot \frac{s^2}{4} - \frac{1}{6} \left( \frac{d^3 \zeta}{d \xi^3} \right)_J \cdot \frac{s^3}{8} + \dots$$

und hieraus:

$$d_2 - d_1 = \frac{s^3}{24} \left( \frac{d^3 \zeta}{d \xi^3} \right)_J + \dots \quad (1)$$

Für ein zusammengesetztes Nivellement häufen sich diese Fehler an, solange die Werte des in der Formel (1) auftretenden Differentialquotienten für die successiven Stände gleiches Vorzeichen besitzen. Nehmen wir aber an, daß das Nivellement nahezu horizontal in einer Vertikalebene verläuft und keine Unstetigkeiten oder solchen gleich zu achtende rasche Änderungen in der Krümmung der betreffenden Niveauflächen vorkommen, sodafs für kleine Strecken von der Länge  $s$  stark konvergente *Taylor'sche* Entwicklungen möglich sind, welche in der oben angewandten Abkürzung für  $d_2 - d_1$  eine brauchbare Annäherung geben, so läßt sich die Reihe der  $d_2 - d_1$  summieren.

Zu dem Zwecke beachten wir, daß für den Punkt  $J$  der Krümmungsradius  $\rho$  des Vertikalschnittes der Niveaufläche in Richtung des Nivellements durch die Relation

$$\frac{1}{\rho} = \left( \frac{d^2 \zeta}{d \xi^2} \right)_J \quad (2)$$

gegeben ist. Zählt man nun horizontale Entfernungen  $S$  vom Anfangspunkt des Nivellements ab, so ist sehr nahe  $S = S_J + \xi$ , worin sich  $S_J$  auf Stand  $J$  bezieht. Man kann hiermit und mit Rücksicht auf (2) die Formel (1) wie folgt schreiben:

$$d_2 - d_1 = \frac{s^3}{24} \frac{d \left( \frac{1}{\rho} \right)}{d S} + \dots$$

Nunmehr wird bei gleichen Stationslängen  $s$ :

$$\sum (d_2 - d_1) = \frac{s^2}{24} \sum \frac{d \left( \frac{1}{\rho} \right)}{d S} d S + \dots,$$

wobei für den einen der Faktoren  $s$  das Symbol  $dS$  gesetzt ist. Die Summierung rechter Hand kann mit Rücksicht auf die Voraussetzung der Stetigkeit der Krümmung durch Integration bewirkt werden und giebt

$$\sum (d_2 - d_1) = \frac{s^2}{24} \left\{ \left( \frac{1}{\varrho} \right)_{\text{Ende}} - \left( \frac{1}{\varrho} \right)_{\text{Anfang}} \right\} + \dots \quad (3)$$

Hierin bezeichnet, um es nochmals hervorzuheben,  $s$  die Stationslänge, und die Formel gilt nur, wenn auf Strecken von Stationslänge keine starken Krümmungsänderungen vorkommen — oder mit andern Worten, solange  $1 : \varrho$  sich innerhalb Strecken von Stationslänge nahezu gleichmäßig mit dem Orte ändert. Die durch (3) gegebene Summe hat den Sinn einer Verbesserung des Nivellementsresultates.

*H. Bruns*, welcher in seiner *Figur der Erde* S. 39–41 dieselbe Sache behandelt, betrachtet nur die einzelne Station, wobei er, anstatt des Differentialquotienten die Amplitudendifferenz einführt. Auf diese Formel kommen wir weiter unten. *Oudemans* giebt dagegen in seiner S. 513 citierten Abhandlung eine integrale Formel, ohne jedoch die Krümmungsradien einzuführen. Er erkennt aber bereits, daß nur die Differentialquotienten für die Endpunkte ins Resultat eingehen.

Nach der Formel (3) kann man auch die Aufgabe des § 5 S. 511 behandeln. Für ein Nivellement vom Äquator nach dem einen der Pole hat man, wenn das *Erdellipsoid* zu grunde gelegt wird, aus dem bekannten Ausdruck für den Meridiankrümmungsradius Bd. 1 S. 44:

$$\left( \frac{1}{\varrho} \right)_{\text{Anfang}} = \frac{1}{a_0(1 - e^2)} \quad \left( \frac{1}{\varrho} \right)_{\text{Ende}} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{a_0};$$

hiermit folgt

$$\sum (d_2 - d_1) = -e^2 \frac{s^2}{16a_0}, \quad (4)$$

was mit (6) S. 513 übereinstimmt.

Führt das Nivellement über eine annähernd *kugelförmige Massenanhäufung* (oder über einen solchen Massendefekt) hinweg, so wird die Summe (3) ein Maximum für die Strecke von  $\varrho_{\max}$  bis  $\varrho_{\min}$ , vergl. § 2 (13) und (14) S. 272 u. 273. Bezeichnen wir mit  $R$  den Radius der ungestörten Niveaufläche, so wird alsdann

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\varrho} \right)_{\text{Anfang}} &= \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{8\sqrt{10}}{125} \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{a^3}{t^3} \right) \\ \left( \frac{1}{\varrho} \right)_{\text{Ende}} &= \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{\Theta}{\Theta_m} \frac{a^3}{t^3} \right); \end{aligned}$$

unter Abkürzung von  $8\sqrt{10} : 125$  auf  $1 : 5$  folgt daher:

$$\sum (d_2 - d_1) = \frac{s^2}{20R} \cdot \frac{\Theta a^3}{\Theta_m t^3}. \quad (5)$$

Hierin ist  $a$  der Radius,  $t$  die Tiefe des Mittelpunktes der störenden

Masse,  $\varpi : \varpi_m$  das Verhältnis ihrer Dichtigkeit zur mittleren Dichtigkeit der Erde.

Für die abnormen Werte  $\varpi = \varpi_m$  und  $s = 200^m$  wird hiernach:

$$\sum (d_2 - d_1) \leq \frac{1}{3}^{mm}.$$

Nicht wesentlich erheblicher wird der Betrag bei einem Nivellement, das durch einen in der Grundfläche eines *Gebirgsrückens* gelegenen *Tunnel* führt, oder auf einer *Brücke über ein prismatisches Thal* hinweg schreitet. Zwar kommt hier der Krümmungsradius null vor, wie aus S. 304 ersichtlich ist; aber das Gebiet der kleinen Krümmungsradien reduziert sich nach S. 305 in allen Fällen auf einen verschwindend kleinen Umfang. Zur Erlangung eines Maximaaleffektes für den ersten der oben erwähnten Fälle, das Tunnelnivellement, wird man nach S. 303 (6)

$$\frac{1}{\varrho_{min}} < \frac{7}{4R}$$

setzen können, während nach S. 305

$$\frac{1}{\varrho_{max}} = \frac{1}{3R} \text{ bis } \frac{1}{\infty}$$

anzunehmen ist. Damit giebt der Ausdruck (3) für den absoluten Wert des in Rede stehenden Einflusses die Relation:

$$\sum (d_2 - d_1) < \frac{7s^2}{96R}, \quad (6)$$

d. i. 0,5 Millimeter bei  $s = 200^m$ .

Hierbei ist nun allerdings der Einfluss nicht gerechnet, den der rasche Krümmungswechsel an der Eintrittsstelle in den Gebirgsrücken ausübt. Wie jedoch aus S. 300 (7) und (8), insbesondere auch aus den Tabellen daselbst hervorgeht, sind für die kleine in betracht kommende Strecke im Betrage von nicht mehr als einer Stationslänge die Änderungen der Lotablenkungen so gering, daß von einem nennenswerten Einfluss derselben auch nicht die Rede sein kann.

Betrachten wir endlich noch den Fall, daß ein Nivellement, welches bis zum Fusse eines *halbkugelförmigen Berges* gelangt ist, in einem *Tunnel* durch denselben hindurch geführt wird (womit zugleich im wesentlichen der Fall der Überschreitung einer *halbkugelförmigen Pinge* auf einer Brücke erledigt ist). Hier steigt  $\varrho$  außerhalb von  $R$  bis  $2R$ , welcher Wert an der Eintrittsstelle stattfindet; innerhalb ist  $\varrho = 0,8R$ . Außerhalb wird bis zur Eintrittsstelle im Sinne einer Verbesserung:

$$\sum (d_2 - d_1) = -\frac{2s^2}{96R}. \quad (7)$$



Dazu tritt die Depressionsdifferenz für die Aufstellung an der Eintrittsstelle. Erfolgt die Aufstellung genau am Beginn des Berges, so ist diese Depressionsdifferenz gleich

$$d_2 - d_1 = \frac{s^2}{8R} \left( \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{9s^2}{96R} \quad (8)$$

unter der Annahme, daß bei Berechnung der Depressionen auf die Strecke  $s:2$  der Krümmungsradius  $\rho$  sowohl außerhalb wie innerhalb konstant gesetzt werden darf, eine Annahme, von deren Zulässigkeit man sich leicht überzeugt. Die Differenz (8) ist nun zwar weit größer als die Summe (7), aber sie beträgt für  $s = 200^m$  doch nur 0,6 Millimeter.

Man sieht zugleich aus diesem Beispiel, daß *einzelne Diskontinuitäten mehr zu fürchten* sind, als die langsameren Krümmungswechsel. In dieser Beziehung ist noch folgendes Beispiel bemerkenswert, wobei wir an die Gleichung (5) § 23 S. 39, welche sich auf den Krümmungswechsel bei normalem Eintritt aus der freien Luft in eine senkrechte Felswand bezieht, anknüpfen. Nivelliert man nämlich bei entsprechenden Verhältnissen über eine Brücke direkt in einen Tunnel hinein und steht gerade in der Grenzfläche des vertikalen Felsens, so ist angenähert

$$d_2 - d_1 = \frac{s^2}{8} \left( \frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho_a} \right),$$

also nach jener Relation

$$d_2 - d_1 = \frac{3s^2}{16R}. \quad (9)$$

Für  $s = 200^m$  giebt dieses 1,2 Millimeter.

Dieser Betrag, welcher als das *Maximum* anzusehen ist, welches durch Diskontinuitäten entstehen kann, wird jedoch ebenso wenig wie die weiter oben angegebenen Beträge in der Praxis erreicht, da die Stationslängen  $s$  meist erheblich kleiner als  $200^m$  sind.

**§ 16. Fortsetzung: Die anormale Depressionsdifferenz im Gebirge.** Nivelliert man einen Berg hinauf, so steht man bei jeder Instrumentaufstellung unter dem Einfluß sehr rascher Krümmungsänderung. Es ist noch zu untersuchen, ob hieraus eine schädliche Anhäufung entstehen kann. Wir geben zum Zwecke dieser Untersuchung der Formel (1) des vorigen Paragraphen eine andere Gestalt.

Aus der Formel für  $\xi$  daselbst S. 540 oben folgt:

$$\frac{d\xi}{d\xi} = \left( \frac{d^2\xi}{d\xi^2} \right)_1 \xi + \frac{1}{2} \left( \frac{d^3\xi}{d\xi^3} \right)_1 \xi^2 + \dots$$

Bezeichnen wir den Differentialquotienten absolut genommen mit  $u$  und zwar, vergl. Fig. 90 S. 539, für Punkt 2 mit  $u_2$ , für 1 mit  $u_1$ , so ist:



$$u_2 = \left( \frac{d^2 \xi}{d \xi^2} \right)_J \cdot \frac{s}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{d^3 \xi}{d \xi^3} \right)_J \cdot \frac{s^2}{4} + \dots$$

$$u_1 = \left( \frac{d^2 \xi}{d \xi^2} \right)_J \cdot \frac{s}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{d^3 \xi}{d \xi^3} \right)_J \cdot \frac{s^2}{4} + \dots$$

und daher:

$$u_2 - u_1 = \frac{s^2}{4} \left( \frac{d^3 \xi}{d \xi^3} \right)_J + \dots ;$$

hiermit giebt Gleichung (1) des vorigen Paragraphen:

$$d_2 - d_1 = \frac{s}{6} (u_2 - u_1) + \dots \quad (1)$$

$u$  ist die Amplitude, welche die Lotrichtung von  $J$ , dem Instrumentstand, bis Punkt 2 bzw. 1 beschreibt, wobei wir der Einfachheit halber von den Abweichungen der Lotrichtung in Punkt 1 und 2 gegen die vertikale Visierebene  $J$  absehen. Bezeichnet man die Störungen der beiden Werte  $u$  mit  $\delta u$ , so kann man anstatt (1) auch schreiben:

$$d_2 - d_1 = \frac{s}{6} (\delta u_2 - \delta u_1) + \dots, \quad (2)$$

da der Einfluß der normalen Werte von  $u$  bereits als unerheblich nachgewiesen ist.

Die  $\delta u$  lassen sich aber durch die Lotstörungen  $\mathcal{A}$  in den Punkten  $J$ , 1 und 2 ausdrücken. Nimmt man  $\mathcal{A}$  positiv, wenn es einer Anziehung in Richtung des fortschreitenden Nivellements entspricht, so wird

$$\begin{aligned} \delta u_2 &= \mathcal{A}_J - \mathcal{A}_2 \\ \delta u_1 &= \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_J. \end{aligned} \quad (3)$$

Von diesen Formeln machen wir nun eine Anwendung auf ein Nivellement, welches im mittleren Profil eines im Verhältnis zur

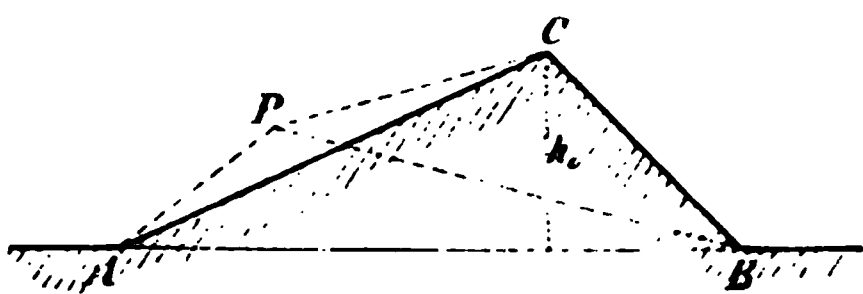


Fig. 91.

Breite langen prismatischen Gebirgsrückens vom Fusse  $A$  nach dem Kamme  $C$  geführt wird, Fig. 91. Nach den Untersuchungen im 4. Kapitelscheint hier Aussicht zu sein, einen

besonders großen Betrag für  $d_2 - d_1$  zu erhalten, wie aus Formel (7) S. 300, welche für  $\mathcal{A}$  in der Nähe des Fußes  $A$  gilt, ersichtlich ist. Es kommen übrigens, wie man leicht erkennt, ganz allgemein in (2) nur diejenigen Teile von  $\mathcal{A}$  zur Geltung, welche weder konstant noch der Entfernung proportional sind.

Nehmen wir nun an, daß für einen Instrumentstand  $J$  linker Hand von  $A$ , Fig. 91, der Punkt 2 mit  $A$  selbst zusammenfällt und beachten, daß in der erwähnten Formel (7) —  $\sigma h_0$  die Abstände von  $A$  nach links bezeichnet, so ist —  $\sigma h_0$  für die Punkte 1,  $J$  und 2

bezw. gleich  $s$ ,  $s : 2$  und null einzuführen. Abgesehen von den unwesentlichen Teilen in  $A$  wird dann:

$$\begin{aligned} A_1 &= K \sin 2A \cdot s \log \text{nat } s \\ A_J &= K \sin 2A \cdot \frac{s}{2} \log \text{nat } \frac{s}{2} \\ A_2 &= 0 ; \end{aligned}$$

damit geben die Formeln (3) und (2):

$$d_2 - d_1 = - \frac{K \log \text{nat } 2}{6} s^2 \sin 2A . \quad (4)$$

Führen wir für  $K$  nach S. 287 (8) sowie für  $\log \text{nat } 2$  die Werte ein und zerlegen  $\sin 2A$  in  $2 \sin A \cos A$ , so folgt:

$$d_2 - d_1 = - \frac{s^2 \sin A \cos A}{230\,000\,000} \text{ Meter} , \quad (4^*)$$

für  $s$  in Metern.

Nehmen wir einen Augenblick an, daß dieser Ausdruck für jeden Stand von  $A$  bis  $C$  Geltung habe und beachten, daß  $s \tan A$  alsdann der Zielhöhendifferenz eines Standes gleich ist, während die Summe der Zielhöhendifferenzen von  $A$  bis  $C$  gleich  $h_0$  wird, so ergibt sich für das Nivellement von  $A$  bis  $C$  angenähert:

$$\sum (d_2 - d_1) = - \frac{s h_0 \cos^2 A}{230\,000\,000} \text{ Meter} . \quad (5)$$

Dieser Ausdruck würde unter der oben gemachten Voraussetzung allgemeiner Geltung von (4\*) nicht nur für das Nivellement im Querprofil, sondern auch für ein Zickzacknivellement von  $A$  bis  $C$  gelten, wenn  $s$  die auf das Querprofil  $ACB$  projizierte Stationslänge bedeutet. Ist nämlich  $s'$  die wirkliche Stationslänge und  $\nu$  ihre Neigung im Grundriß gegen  $s$ , so ist das beim Zickzacknivellement in Formel (2) auftretende Produkt  $s'(\delta u_2' - \delta u_1')$ , worin die  $\delta u'$  die Störungen der wirklichen Amplituden sind, gleich dem Produkt  $s(\delta u_2 - \delta u_1)$ , welches im Querprofilnivellement zur Strecke  $s$  gehört, weil  $s = s' \cos \nu$ ,  $A' = A \cos \nu$  und also  $\delta u' = \delta u \cos \nu$  wird.

Die Summe (5) bleibt selbst für die bedeutenden Werte  $s = 200^m$  und  $h_0 = 2500^m$  absolut genommen kleiner als rund 2 Millimeter.

Allein dieser Betrag ist noch viel zu groß, weil der Ausdruck (4\*) für mittlere Teile des Berges viel zu viel giebt. Dieses zeigt die Betrachtung der Verhältnisse für einen Punkt  $P$ , der außerhalb des Gebirges nahe bei dem Hange  $AC$  gelegen ist, Fig. 91. Für denselben setzt sich die Gesamtanziehung aus den Anziehungen der drei Prismen  $APB$ ,  $PCB$  und  $APC$  zusammen, wobei der allgemeine Ausdruck (5) S. 281 in betracht kommt. In diesem Ausdruck treten die Logarithmen der Distanzen  $AP$ ,  $BP$  und  $CP$  auf. Ist eine dieser Strecken sehr klein, so entspricht einer gleichmäßigen Verschiebung von  $P$  eine sehr un-

gleichmäßige Änderung der Anziehung. Dieser Umstand tritt aber nur nahe bei  $A$  und  $C$ , jedoch nicht für mittlere Lagen von  $P$ , Fig. 91, auf. Die Betrachtung des citierten Ausdruckes (5) zeigt, daß alsdann für jedes Prisma bei mäßigen Verschiebungen von  $P$  die Änderung dem Differentialquotienten proportional gesetzt werden kann.

§ 17. Der Einfluß der durch Mond und Sonne bewirkten Lotstörung auf die Nivellementsresultate. Die Ausdrücke für diese Lotstörungen sind im 5. Kap. § 1 S. 384 angegeben. Bewegt sich das Nivellement im südwestlichen Azimut  $\alpha$  vorwärts, so ist die Depression  $\gamma$  der Visieraxe vorwärts, infolge der Lotstörung gleich

$$\gamma = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha, \quad (1)$$

wenn  $\xi$  und  $\eta$  die südliche und westliche Komponente der Störung des Zeniths sind. Nach (8) S. 384 wird

$$\gamma = -P \sin 2\xi \cos (A - \alpha), \quad (2)$$

worin  $\xi$  die Zenithdistanz des Gestirns,  $A$  sein Azimut bezeichnet und  $P$  nachstehende Werte hat:

$$\begin{aligned} \text{für den Mond} \quad P &= 0,0174'', \quad \text{arc } P = 1 : 12\,000\,000 \\ \text{,, die Sonne} \quad P &= 0,0080'', \quad \text{arc } P = 1 : 23\,000\,000. \end{aligned} \quad (3)$$

Die Verbesserung der Zielhöhe vorwärts ist, bei der Entfernung  $\frac{s}{2}$ , gleich

$$+ \frac{s}{2} \gamma,$$

für die Zielhöhe rückwärts aber

$$- \frac{s}{2} \gamma.$$

Mithin wird die *Gesamtverbesserung* für die Zielhöhendifferenz rückwärts — vorwärts, d. h. für den Höhenunterschied „vorwärts über rückwärts“, gleich  $-s\gamma$ , oder mit Rücksicht auf (2) gleich

$$sP \sin 2\xi \cos (A - \alpha). \quad (4)$$

Hierin ist für  $P$  der Wert des Arcus nach (3) zu setzen.

Bezieht man  $\xi$  und  $A$  in (4) auf das Mittel der Zeiten von Vor- und Rückblick, so wird die kleine Veränderung in  $\xi$  und  $A$  zwischen Vor- und Rückblick eliminiert (abgesehen davon, daß diese letzteren im Mittel von symmetrischen Wiederholungen ohnehin auf dieselbe Zeit fallen).

Der Betrag des Ausdruckes (4) ist für den einzelnen Stand ganz unerheblich; dennoch kann bei ausgedehnten Nivellements eine Anhäufung zu einem merkbaren Betrage stattfinden.

Nehmen wir zunächst an, daß Mond und Sonne genau im Äquator stehen, so fallen bei Nivellements auf der nördlichen Hemisphäre immer gleichzeitig

$\xi$  auf den 1. Quadr. und  $A$  auf den 1. oder 4. Quadr. ,

$\xi$  auf den 2. Quadr. und  $A$  auf den 2. oder 3. Quadr. .

Nivelliert man nun nach Süden hin, sodaß  $\alpha = \text{null}$  ist, so wird hiernach der Ausdruck (4) stets positiv, während bei Nivellements in ostwestlicher Richtung mit  $\alpha = 90^\circ$  ein Vorzeichenwechsel eintreten kann. Bei den Nivellements der ersteren Art tritt demnach eine Anhäufung der Fehler (4) ein, während bei denen der letzteren Art eine Kompensation stattfinden kann, z. B. bezüglich der Sonne, wenn symmetrisch zum Mittag beobachtet wird. Allerdings bewegen sich Mond und Sonne nicht genau im Äquator, infolge welches Umstandes für Stellungen dieser Gestirne in der Nähe des Ost-Westvertikales der Ausdruck (4) bei  $\alpha = \text{null}$  auch negativ sein kann; da aber in diesem Falle zugleich  $\cos A$  kleine Werte hat, so herrschen bei nord-südlichen Nivellements doch schließlich die positiven Ausdrücke vor. Durch Wiederholung der Nivellements in umgekehrter Richtung lassen sich die Fehler, wie leicht zu sehen, nicht beseitigen.

Das vorstehend erörterte Verhalten des Ausdruckes (4) entspricht einer Tendenz der Niveauflächen, ihre Abplattung in konstantem Sinne zu ändern. Um dieses noch von einem anderen Gesichtspunkt aus zu erkennen, betrachten wir das Potential  $\mathfrak{V}$  der Anziehung von Mond und Sonne.

Nach dem 5. Kap. § 1 (10) S. 385 ist dasselbe für Punkte einer ungestörten Niveaufläche gegeben durch die Formel:

$$\mathfrak{V} = \frac{3}{2} G R \frac{M}{M} \sin^3 p \cos^2 \xi = G R P \cos^2 \xi, \quad (5)$$

worin  $P$  als Arcus zu verstehen ist.

Damit nun wieder eine Fläche konstanten Potentialwertes entsteht, muß, abgesehen von einer Konstanten, das ungestörte Niveau um

$$+ R P \cos^2 \xi \quad (6)$$

gehoben werden.

Die Deklination (d. i. der Äquatorabstand) des Mondes schwankt aber zwischen  $-30^\circ$  und  $+30^\circ$ ; somit liegt an den Polen  $\xi$  für den Mond zwischen  $60^\circ$  und  $120^\circ$ ,  $\cos^2 \xi$  zwischen null und  $\frac{1}{4}$ . Am Äquator dagegen liegt  $\xi$  je nach Umständen zwischen  $30^\circ$  und  $150^\circ$  oder  $0^\circ$  und  $180^\circ$ ,  $\cos^2 \xi$  also zwischen  $\frac{3}{4}$  und null oder 1 und null. Für Äquatorpunkte ist demnach der Ausdruck (6) im allgemeinen größer als für Punkte in der Nähe der Pole. Die Wirkung des Mondes (und auch diejenige der Sonne) vergrößert somit die Ab-

plattung. Jedoch ist der Betrag gering, denn der Mittelwert von  $\cos^2 \zeta$  am Äquator übersteigt für den Mond nicht  $\frac{1}{2}$ , der Unterschied der Mittelwerte der Erhebungen für Äquator und Pol also beim Mond nicht

$$\frac{1}{2} RP, \text{ d. i. } \frac{1}{4} \text{ Meter.} \quad (7)$$

Der entsprechende Einfluß der Sonne ist nahezu die Hälfte.

Geringer noch als diese mittleren Beträge gestalten sich in der Regel die Unterschiede der Wirkungen auf Ergebnisse wiederholter Nivellements, da die natürlichen Verhältnisse ungleichartigen Anhäufungen des Ausdruckes (4) nicht günstig sind. Beim Monde ist es der Umstand, daß er in der kurzen Zeit von vier Wochen seinen Umlauf um die Erde vollendet. In dem Resultat eines Nivellements von dieser Dauer wird daher die Wirkung, wenn immer zu denselben Stunden gearbeitet wurde, bereits einen gewissen mittleren Betrag annehmen, der für alle Wiederholungen nahezu derselbe bleibt. Bei der Sonne ist es dagegen der Umstand, daß in der Regel behufs Ausnutzung günstiger Luftverhältnisse die Arbeit des Nivellierens auf die ersten Vormittags- sowie die späteren Nachmittagsstunden beschränkt und auf diese Zeiten wenigstens annähernd gleichmäÙig verteilt wird. Infolge dessen werden sich in einem zusammengesetzten Nivellement diejenigen Teile der Ausdrücke (4), welche von  $\sin 2\zeta \sin A$  abhängen, größtenteils gegenseitig aufheben, während den von  $\sin 2\zeta \cos A$  abhängigen der geringe Betrag dieses Faktors zu den betreffenden Stunden günstig ist.

Bei Nivellements innerhalb Mitteleuropas werden nach vorstehenden Bemerkungen in der Regel kaum ein paar Centimeter Differenz zwischen den Ergebnissen mehrfacher Nivellements selbst für die entferntesten Punkte zu befürchten sein, so daß sie ohne Bedeutung bleiben. Eine Rücksichtnahme auf dieselben würde erst nötig werden, wenn die Arbeitszeit auf bestimmte Tagesstunden in bestimmten Jahreszeiten beschränkt würde. Ein hierher gehöriger Fall, welcher einen möglichst großen Widerspruch zeigt, ist folgender. Man denke sich, daß eine  $1000^{\text{km}}$  lange Linie von ost-westlicher Richtung nur in den Sommermonaten nivelliert werde und zwar wegen des Sonnenstandes streckenweise vormittags in Richtung nach West, nachmittags zurück in Richtung nach Ost. Dann wird das Resultat für den Gesamthöhenunterschied aus den Vormittagsnivellements von demjenigen aus den Nachmittagsnivellements wegen der Wirkung der Sonnenanziehung nach Formel (4) bis zu  $0,087^{\text{m}}$  abweichen können, während die Mondanziehung keine nennenswerte Wirkung zurückläßt.

Auf die Nivellementsfehler infolge der Anziehung des Mondes und der Sonne weist *Vogler* hin in seiner 1873 erschienenen Schrift *Ziele und Hilfsmittel geometrischer Präzisionsnivellements*, S. 28. Seine Ergebnisse sind jedoch mit  $\frac{3}{2}$  zu multiplizieren, da S. 27 vergessen ist, daß die Anziehungen auf den Erdmittelpunkt und den Ort  $P'$  verschiedene Richtungen haben.

### § 18. Zeitliche Änderungen der Niveauflächen; die physische Meeresfläche.

Im fünften Kapitel sind verschiedene Ursachen erwähnt worden, welche zeitliche Änderungen der Niveauflächen bewirken. Wir verweisen in dieser Hinsicht besonders auf die Paragraphen 21—24 S. 438 u. ff. und bemerken hier nur zusammenfassend, daß alle diese Änderungen sehr klein sind und in der Regel einen säkulären Charakter haben, dergestalt daß eine in kurzer Zeit merkbare Änderung von Höhendifferenzen mit großer Wahrscheinlichkeit stets auf physische Punktverschiebungen zurückzuführen sein wird.

Wir müssen nun noch erwähnen, daß die zeitlichen Änderungen des Erdkörpers, welche durch die Anziehung von Mond und Sonne erzeugt werden (Flut und Ebbe), sowie diejenigen, deren Ursache die Wärmebewegung auf der Erdoberfläche ist, bewirken, daß die physische Meeresoberfläche keine genaue Niveaufläche bildet, selbst nicht in den sogenannten Mittelwasserständen\*). Die letztere Thatsache ist durch die Präzisionsnivellements sicher konstatiert; es existieren Differenzen von mehreren Decimetern entlang der Küste der Ostsee, der Nordsee und der französischen Küste des Oceans; das Mittelwasser des Mittelmeeres bei Marseille zeigt sogar ungefähr  $\frac{2}{3}^m$  Depression gegen dasjenige der Nordsee bei Amsterdam\*\*).

Für die Gradmessungen und auch für die Schweremessungen ist es von Wichtigkeit, daß die Mittelwasserstände in möglichster Ausdehnung für die ganze Kontinentalküste untersucht werden. Nur auf diese Weise ist es möglich, eine Vorstellung davon zu erhalten, wieviel Unterschied zwischen den Meereshorizonten bestehen kann, auf welche sich die Gradmessungen derjenigen Kontinente beziehen, für die eine Verbindung durch Nivellements nicht möglich ist. Wenn diese Unterschiede, wie es wahrscheinlich ist, ein paar Meter nicht überschreiten,

---

\*) Vergl. die Verhandlungen der permanenten Kommission der europäischen Gradmessung 1878 in Hamburg, Berlin 1879, S. 57—66, sowie die Verhandlungen derselben Kommission 1882 im Haag, Berlin 1883, S. 51 und 113.

Eine sehr gute Übersicht giebt Bd. 5 der „Nivellements der Landesaufnahme“ Berlin 1883, S. 141 und 142. Auch ist zu vergleichen „Seibt, das Mittelwasser der Ostsee bei Swinemünde“, Berlin 1881, S. 86 u. ff.

Diese letztere Schrift enthält u. a. auch den praktischen Nachweis, daß zur Bestimmung des Mittelwassers täglich einmalige Beobachtungen des Wasserstandes an Stelle kontinuierlicher Registrierungen ausreichen. Wenn aber im achten Abschnitt dieser Schrift bei der Untersuchung des Verlaufes des Mittelwassers entlang der Ostseeküste das Mittelwasser der Nordsee bei Kuxhaven gewissermaßen als westlichster Punkt der Ostsee behandelt wird, so ist dies ein Verfahren, das die ganze Untersuchung dieses Abschnittes wertlos macht.

\*\*) Vergl. hierzu im allgemeinen noch *Bruns*, Figur der Erde, S. 4 u. ff.

Was die angegebene Depression des Mittelmeeres gegen die Nordsee anbetrifft, so wird deren Betrag sich durch Berücksichtigung der Variation der Schwerkraft mit der geogr. Breite nach § 5 S. 510 noch um mehrere Decimeter vermindern.

so kommt denselben allerdings mit Rücksicht auf die anderen Ursachen von Nichtübereinstimmung der Beobachtungsdaten bei der Ermittlung der Erdgestalt keine Bedeutung zu. Nur für die Höhenmessungen selbst ist es von Wichtigkeit immer denselben, durch einen Festpunkt zu bezeichnenden Horizont anzuwenden, der möglichst in die durchschnittliche Höhe der Mittelwasser zu verlegen ist, sobald es sich um die Erde im allgemeinen handelt. Dieser Horizont, d. h. die denselben bezeichnende Niveaufläche, ist der naturgemäße Ersatz der mathematischen Erdoberfläche, an deren Höhenlage nach der Bd. 1 S. 5 gegebenen Definition praktisch genommen eine Unklarheit haftet.

## Achstes Kapitel.

### Die trigonometrische Höhenmessung.

Mit Bemerkungen über die Lateralrefraktion  
und die Aberration.

**§ 1. Die Bedeutung der trigonometrischen Höhenmessung.**  
Bereits Bd. 1 S. 520 ist gezeigt worden, daß die Messung einer Zenithdistanz von einem Punkte der Erdoberfläche nach einem anderen nur insofern eine Gleichung für die Höhendifferenz beider Punkte liefert, als die Höhen der Punkte nicht als Meereshöhen, sondern als Höhen über einem Referenzellipsoid gedacht werden, gegen welches die Lotabweichungen in den betreffenden Punkten bekannt sind. Die sogenannte trigonometrische Höhenmessung ist also kein Konkurrent der geometrischen Höhenmessung\*). Denn während diese bei geeigneter Reduktion Meereshöhen  $H$  liefert, giebt jene die Summen  $N + H$  aus der Höhe  $N$  des Geoides über dem Referenzellipsoid und der Meereshöhe  $H$ . Liegen aber beiderlei Messungen vor, so kann  $N$  ermittelt werden.

Zenithdistanzmessungen geben hiernach ein Mittel an die Hand, für einzelne Punkte der Erdoberfläche den Abstand des Geoides von einem Referenzellipsoid, in Bezug auf welches die Lotabweichungen bekannt sind, abzuleiten.

Eigentlich kann man das Referenzellipsoid ganz entbehren und direkt aus den Messungen, welche zur Kenntnis der Lotabweichungen führen, sowie aus den Zenithdistanzmessungen die Lage der betrachteten Punkte bezüglich eines willkürlich gewählten, rechtwinkligen Axensystems ermitteln. Dieses ist konstruktiv in folgender Weise zu erkennen.

\*) Im Schlußparagraphen dieses Kapitels wird etwas eingehender untersucht, inwieweit trigonometrische, ohne Hilfe von Lotablenkungen berechnete Höhendifferenzen den Meereshöhen entsprechen.



Durch einen Punkt  $P_1$  denke man sich eine Linie als Parallele zur Erdaxe und eine Ebene als Meridianebene, jene Parallele enthaltend, gelegt. Die Messung der geographischen Breite von  $P_1$  gestattet die Angabe der Lotrichtung in der Meridianebene, die Messung des Azimutes nach einem Punkte  $P_2$  giebt eine in  $P_1$  vertikale Ebene durch  $P_2$  und die Messung der Zenithdistanz (abgesehen von der Refraktion) in dieser Ebene eine Gerade, auf welcher  $P_2$  liegt. Wird nun noch die gerade Entfernung  $P_1 P_2$  durch direkte Messung bekannt, so läßt sich die Lage von  $P_2$  sofort konstruieren.

Wenn der geographische Längenunterschied von  $P_1$  und  $P_2$  gemessen ist, so kann man mittelst desselben hierauf die Meridianebene von  $P_2$  finden und mit Hilfe der geographischen Breite von  $P_2$  sodann in derselben die Lotrichtung von  $P_2$ . Fehlt jener, so gestattet die Kenntnis des in  $P_2$  nach  $P_1$  gemessenen Azimutes und der geographischen Breite von  $P_2$  (abgesehen von äquatorialen Gegenden) die Konstruktion der Lage von Meridianebene und Lotrichtung für  $P_2$ , wie die Betrachtung der dreiseitigen Ecke lehrt, welche in  $P_2$  von der Richtung nach  $P_1$ , einer Parallelen zur Erdaxe und der Vertikalen gebildet wird.

Sind nun weiter in  $P_1$  und  $P_2$  nach einem Punkt  $P_3$  die Horizontalwinkel gemessen, außerdem in  $P_1$  oder  $P_2$  die Zenithdistanz, so ergibt sich  $P_3$ , u. s. w.

Erhellet aus vorstehender Erläuterung die Möglichkeit, ohne Einführung eines Referenzellipsoides das System der Punkte zu konstruieren und zu berechnen, so wäre es doch unpraktisch, bei der wirklichen Ausführung der Rechnung nicht die Thatsache zu benutzen, daß ein mächtig großer Teil des Geoides immer nur geringe Höhenabweichungen gegen ein passendes Referenzellipsoid haben kann. Man wird vielmehr die Horizontalwinkelmessungen und astronomischen Bestimmungen zunächst für sich mit Benutzung eines Referenzellipsoides nach § 19 S. 560 des ersten Bandes bearbeiten und darnach erst mit Hilfe der erlangten Resultate die Zenithdistanzmessungen verwerten.

Wenn es bei der oben angegebenen Konstruktion des Punktsystems unmittelbar klar ist, daß eine hypothesenfreie Bestimmung vorliegt, so läßt sich doch auch bei der Einführung eines Referenzellipsoides in die Rechnung nicht behaupten, daß zur Bestimmung des Geoides eine das Wesen der Resultate bedingende Hypothese über dessen Form gemacht sei; es wird nur vorausgesetzt, daß ein erstgewähltes Referenzellipsoid, welches zu große Abweichungen vom Geoid zeigt, durch ein genügenden Anschluß gewährendes Referenzellipsoid ersetzt werden kann und ersetzt wird.

Durch den Umstand, eine hypothesenfreie Bestimmung der Lage einer Schaar von Punkten des Geoides zu geben, empfiehlt sich die



Verwendung der Zenithdistanzmessungen in Verbindung mit astronomisch-geodätischen Rechnungen nach dem Verfahren des § 19 S. 560 Bd. 1 theoretisch in hohem Grade, weil es thatsächlich kein anderes hypothesenfreies Verfahren zu Spezialstudien über das Geoid giebt. Wir können ohne Hypothese allenfalls aus Mondbeobachtungen in äquatorialen Gegenden kontinentale Undulationen des Geoides ableiten (6. Kapitel), wir werden mit der Zeit wohl auch mittelst Schweremessungen über die kontinentalen Undulationen des Geoides einige Aufschlüsse erhalten (3. Kapitel); wollen wir aber Spezialstudien anstellen, so bleiben uns von den bisher erwähnten Methoden nur die Krümmungsmessungen (Gradmessungen). In § 21 S. 564 u. ff. des ersten Bandes ist angegeben, wie mittelst solcher Messungen das Geoid im Detail studiert werden kann. Als größter Mangel tritt dabei der Umstand hervor, daß man die Stationen sehr dicht legen muß, ehe mit Sicherheit ein regelmäßiger Verlauf der Lotabweichungen zu erwarten ist. Der Grund davon ist das im ersten Kapitel erörterte Vorkommen von sehr raschen Änderungen, sogar von Diskontinuitäten in der Krümmung der Niveauflächen.

Dagegen tritt als Übelstand bei der praktischen Verwertung des Verfahrens mit Zenithdistanzmessungen der Umstand hervor, daß die Resultate von der Refraktion zu befreien sind, was ohne Hypothesen, die in der Regel nur eine rohe Annäherung versprechen, gar nicht geschehen kann. Zur Zeit dürfte es noch fraglich erscheinen, ob man diesen Übelstand einmal genügend überwinden lernen wird, während bei dem vorher erwähnten, theoretisch unvollkommenen Verfahren durch fortgesetzte Verdichtung des Netzes der Stationen ohne Zweifel die Unvollkommenheit der Theorie mehr und mehr unschädlich gemacht und die Genauigkeit in wünschenswertester Weise gesteigert werden kann. (Vergl. hierzu noch § 18 dieses Kapitels.)

Die oben auseinandergesetzte Methode der Bestimmung des Geoides aus Zenithdistanzmessungen ist 1878 von *Bruns* in seiner *Figur der Erde* auf S. 45–49 in den Grundzügen in klarer Weise dargestellt worden. *Bruns* setzt für die Realisierung derselben große Hoffnungen auf eine Ausbildung der Theorie der Refraktion.

Die Methode ist übrigens nicht neu und bereits 1868 von *Villarceau* empfohlen worden (*Comptes rendus* 1868 Bd. 67 S. 1275; vergl. hierzu auch bei uns im ersten Band S. 586). *Villarceau* scheint jedoch mehr Vertrauen in die Methode der Krümmungsmessungen zu setzen, obgleich er bezüglich der Refraktion von günstigen Resultaten zu berichten weiß.

Daß man aus gegenseitigen Zenithdistanzmessungen bei bekannter Entfernung wenigstens der Theorie nach den Krümmungsradius bestimmen kann, wußte schon *Kepler*, und *Grimaldi* und *Riccioli* versuchten eine Anwendung des Verfahrens, allerdings mit schlechtem Erfolg (*Wolf, Handbuch*, Bd. 2 1872, S. 127; *Todhunter, History of Attraction*, Bd. 1 S. 117). Den veränderten Anschauungen über das Geoid entsprechend wird jetzt die Aufgabe anders präzisiert, doch ist es der alte Grundgedanke.

## § 2. Die Grundgleichung der sphärischen Höhenrefraktion.

Wir nehmen zunächst an, daß die Niveaulächen innerhalb der in betracht kommenden Ausdehnung eines Lichtstrahles konzentrische Kugelflächen seien und daß die Flächen gleichen Druckes und gleicher Dichtigkeit der Luft mit Niveaulächen zusammenfallen. Ein Lichtstrahl sei von  $P_1$ , Fig. 92, bis  $P$  gelangt und gehe unendlich wenig weiter bis  $P'$ . Dann ist klar, daß man sich denken kann, der Brechungsindex der Luft ändere sich in  $P$  beim Übergange in die von zwei unendlich nahen Niveaulächen begrenzte Luftschicht  $PP'$  sprunghaft von  $n$  in  $n + dn$  und das Element  $PP'$  des Lichtstrahles sei demgemäß gerade.

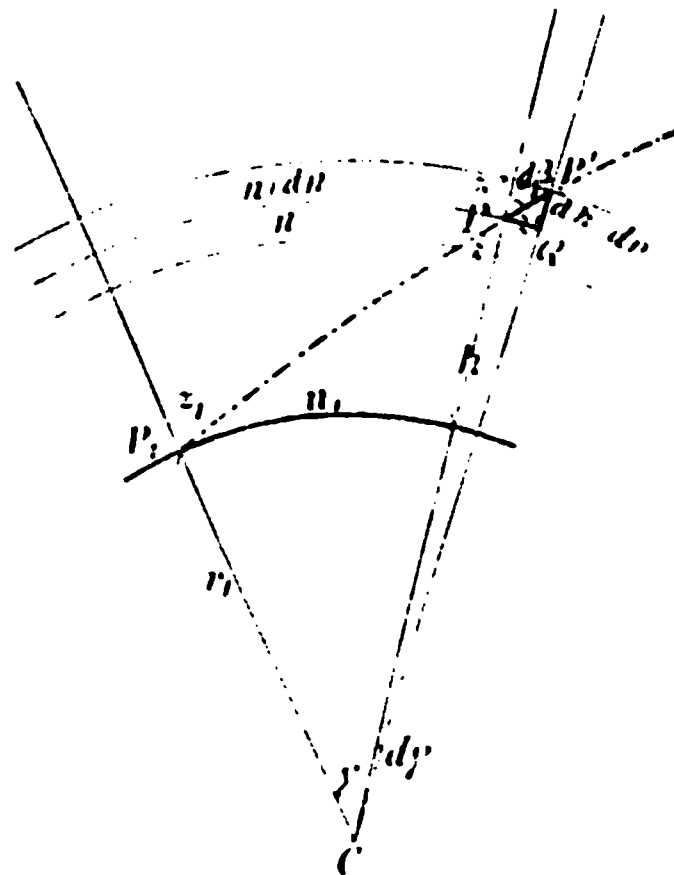


Fig. 92.

Was die Lage von  $PP'$  im allgemeinen anlangt, so ist darauf hinzuweisen, daß der Lichtstrahl auf der Strecke  $PP'$  diejenige Vertikalebene nicht verläßt, in welcher er nach  $P$  gelangt, daß er somit in voller Ausdehnung eine ebene Kurve, gekrümmt in der Vertikalebene seiner Endpunkte, darstellt. Man kann dies auch so aussprechen: Für konzentrische sphärische Niveaulächen und Luftschichten ist die regelmäßige Lateralrefraktion gleich null.

Die Krümmung des Lichtstrahles bei  $P$  erscheint zufolge unserer Annahme als sprunghafter Übergang der Zenithdistanz  $z$  in  $z + d\beta$ . Nach dem Brechungsgesetz ist aber

$$n \sin z = (n + dn) \sin (z + d\beta). \quad (1)$$

Hieraus läßt sich eine Differentialgleichung für  $d\beta$ , d. h. den Betrag der Refraktion in  $P$ , herleiten:

$$d\beta = - \frac{dn}{n} \tan z. \quad (1^*)$$

Durch Integration ergibt sich dann die Gesamtrefraktion, d. h. der Winkel zwischen den Endtangente des Lichtstrahles.

Für unsere Zwecke ist es aber vorzuziehen, direkt die Höhenänderung  $dh$  aufzustellen, welche zu  $PP'$  gehört. Das Differentialdreieck  $PP'Q$  giebt, wenn  $CP$  mit  $r$  bezeichnet wird:

$$dh = dr = r d\gamma \cot z'. \quad (2)$$

Um dies integrieren zu können, muß  $z'$  oder  $z$  als Funktion von  $r$  oder  $\gamma$  bekannt sein. Wenn wir von  $P$  nach  $P'$  übergehen, ändert sich  $z$  in  $z'$  und zwar ist

$$z' - z = dz = d\beta - d\gamma. \quad (3)$$

Von (3) aus könnte man durch Integration  $z'$  in der gewünschten Weise dargestellt erhalten. Es läßt sich aber direkt eine Integralformel aufstellen. Das Dreieck  $PP'C$  giebt nämlich nach dem Sinussatz

$$r' \sin z' = r \sin (z + d\beta);$$

multipliziert man beiderseits mit  $n'$  und beachtet die Relation (1), so folgt

$$n' r' \sin z' = n r \sin z.$$

Nach dieser wichtigen Gleichung ist für den ganzen Lauf des Lichtstrahles  $n r \sin z$  konstant, so daß man setzen kann:

$$n r \sin z = n_1 r_1 \sin z_1, \quad (4)$$

worin  $n_1$ ,  $r_1$  und  $z_1$  sich auf Punkt  $P_1$  beziehen. Vertauschen wir nun in (2)  $z'$  mit  $z$ , was zulässig ist, setzen  $\cot z = \sqrt{1 - \sin^2 z} : \sin z$  und substituieren endlich für  $\sin z$  den Wert aus (4), so erhalten wir:

$$dr = \frac{r \sqrt{n^2 r^2 - n_1^2 r_1^2 \sin^2 z_1}}{n_1 r_1 \sin z_1} d\gamma. \quad (5)$$

Von dieser Gleichung, welche schon *Laplace* kannte\*), ausgehend, kann man, wenn  $n$  als Funktion von  $r$  gegeben ist, nach vorheriger Reduktion auf  $d\gamma$  durch Integration  $\gamma$  als Funktion von  $r$  darstellen. Da man aber schließlich  $r$  als Funktion von  $\gamma$  braucht und bei der Umkehrung Reihenentwicklung anwenden wird, ist es vorteilhaft, mit Umgehung der Integration diese Reihenentwicklung unmittelbar unter Anwendung von *Taylor's* Satz aufzusuchen.

§ 3. **Reihenentwicklung.** Nach *Taylor's* Satz ist für den Punkt  $P$  der Radiusvektor

$$r = r_1 + \left(\frac{dr}{d\gamma}\right)_1 \gamma + \frac{1}{1.2} \left(\frac{d^2 r}{d\gamma^2}\right)_1 \gamma^2 + \frac{1}{1.2.3} \left(\frac{d^3 r}{d\gamma^3}\right)_1 \gamma^3 + \frac{1}{1.2.3.4} \left(\frac{d^4 r}{d\gamma^4}\right)_1 \gamma^4 + \dots, \quad (1)$$

wobei  $r_1$  und seine Differentialquotienten für den Punkt  $P_1$  zu nehmen sind. Bei Ableitung der Differentialquotienten gehen wir von der Gleichung (2) des vorigen Paragraphen aus, welche bei Vertauschung von  $z' = z + dz$  mit  $z$  (was offenbar zulässig ist) ergibt:

$$\frac{dr}{d\gamma} = r \cot z. \quad (2)$$

Ferner ist nach (3) und (1\*) des vorigen Paragraphen:

$$\frac{dz}{d\gamma} = - \left(1 + \frac{dn}{d\gamma} \frac{\tan z}{n}\right),$$

---

\*) *Méc. cél.*, t. 4 l. 10, Nr. 11 S. 277. Die Entwicklung erscheint hier sehr kompliziert und ist an mehrere Orte zerstreut.

und da  $\frac{dn}{d\gamma} = \frac{dn}{dr} \frac{dr}{d\gamma}$  ist, folgt hieraus mit Rücksicht auf (2):

$$\frac{dz}{d\gamma} = - \left( 1 + \frac{r}{n} \frac{dn}{dr} \right) = - (1 - \kappa), \quad (3)$$

wobei  $\kappa$  zur Abkürzung dient:

$$\kappa = - \frac{r}{n} \frac{dn}{dr}. \quad (3^*)$$

Aus (2) folgt nunmehr

$$\frac{d^2 r}{d\gamma^2} = \cot z \frac{dr}{d\gamma} - \frac{r}{\sin^2 z} \frac{dz}{d\gamma} = r \cot^2 z + \frac{r(1 - \kappa)}{\sin^2 z}; \quad (4)$$

ferner in ähnlicher Weise hieraus, wenn  $\frac{d\kappa}{dr} = \kappa'$  gesetzt wird:

$$\frac{d^3 r}{d\gamma^3} = r \cot^3 z + \frac{r \cot z}{\sin^2 z} (1 - \kappa) (5 - 2\kappa) - \frac{r^2 \cot z}{\sin^2 z} \kappa', \quad (5)$$

und endlich, wenn  $\frac{d^2 \kappa}{dr^2} = \kappa''$  gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 r}{d\gamma^4} = & r \cot^4 z + \frac{r \cot^2 z}{\sin^2 z} (1 - \kappa) (18 - 16\kappa + 4\kappa') \\ & + \frac{r}{\sin^4 z} (1 - \kappa)^2 (5 - 2\kappa) \\ & - \frac{r^2 \cot^2 z}{\sin^2 z} (11 - 6\kappa) \kappa' - \frac{r^2}{\sin^4 z} (1 - \kappa) \kappa' \\ & - \frac{r^3 \cot^2 z}{\sin^2 z} \kappa''. \end{aligned} \quad (6)$$

Hiermit giebt (1) nachstehende Reihe für  $r - r_1 = h$ :

$$\begin{aligned} h = & s_1 \cot z_1 \left\{ 1 + \frac{\cos^2 z_1 + (1 - \kappa_1)(5 - 2\kappa_1) - r_1 \kappa_1'}{6 \sin^2 z_1} \gamma^2 \right\} \\ & + \frac{1}{2} s_1 \gamma \left\{ + \frac{\cos^2 z_1 + (1 - \kappa_1)}{\sin^2 z_1} \right. \\ & + \frac{\cos^4 z_1 + (1 - \kappa_1)(18 - 16\kappa_1 + 4\kappa_1^2) \cos^2 z_1 + (1 - \kappa_1)^2 (5 - 2\kappa_1)}{12 \sin^4 z_1} \gamma^2 \\ & \left. - \frac{[(11 - 6\kappa_1) \cos^2 z_1 + (1 - \kappa_1)] r_1 \kappa_1' + \cos^2 z_1 \cdot r_1^2 \kappa_1''}{12 \sin^4 z_1} \gamma^2 \right\} \\ & + \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

wobei  $r_1 \gamma = s_1$  gesetzt ist und  $\kappa_1$ ,  $\kappa_1'$  und  $\kappa_1''$  die nachstehende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= - \frac{r_1}{n_1} \left( \frac{dn}{dh} \right)_1 \\ \kappa_1' &= \left( \frac{d\kappa}{dh} \right)_1 \\ \kappa_1'' &= \left( \frac{d^2 \kappa}{dh^2} \right)_1. \end{aligned} \quad (7^*)$$

Vorstehende Entwicklung kann jedenfalls nur dann konvergent sein, wenn die Funktion  $\kappa$  und ihre Differentialquotienten nach  $r$

und somit auch die Differentialquotienten von  $r$  nach  $\gamma$  entlang der Lichtkurve endlich und stetig sind.

Selbstredend ist zur praktischen Brauchbarkeit der Formel (7) eine so rasche Konvergenz erforderlich, daß zum mindesten die nicht angesetzten Glieder unerheblich sind. Inwieweit dieses für einen tatsächlichen Luftzustand der Fall ist, kann aber nur die Erfahrung zeigen.

Wir formen den Ausdruck (7) für die Anwendung noch etwas um, indem wir die Entfernung  $s_m$ , gemessen in der mittleren Höhe beider Stationen, einführen. Es ist

$$s_m = \left(r_1 + \frac{h}{2}\right) \gamma = s_1 + \frac{h\gamma}{2}, \quad (8)$$

also auch

$$s_m = s_1 \left(1 + \frac{h\gamma}{2s_1}\right)$$

und

$$s_1 = \frac{s_m}{1 + \frac{h\gamma}{2s_1}} = s_m \left\{ 1 - \left(\frac{h\gamma}{2s_1}\right) + \left(\frac{h\gamma}{2s_1}\right)^2 - \left(\frac{h\gamma}{2s_1}\right)^3 + \dots \right\}. \quad (8^*)$$

Hierzu giebt (7):

$$\begin{aligned} \frac{h\gamma}{2s_1} &= \frac{1}{2} \gamma \cot z_1 \left\{ 1 + \frac{\cos^2 z_1 + (1 - \kappa_1)(5 - 2\kappa_1) - r_1 \kappa_1'}{6 \sin^2 z_1} \gamma^2 \right\} \\ &+ \frac{1}{4} \gamma^2 \frac{\cos^2 z_1 + (1 - \kappa_1)}{\sin^2 z_1} + \dots \end{aligned}$$

Damit wird erhalten:

$$s_1 = s_m \left\{ \begin{aligned} &1 - \frac{1 - \kappa_1}{4 \sin^2 z_1} \gamma^2 \\ &- \frac{1}{2} \gamma \cot z_1 \left( 1 + \frac{-\cos^2 z_1 + 4(1 - \kappa_1)^2 - 2r_1 \kappa_1'}{12 \sin^2 z_1} \gamma^2 \right) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

und hiermit durch Einführung in (7), wobei wir zugleich  $1 + \frac{\gamma^2}{12}$  als Faktor ziehen:

$$h = s_m \left(1 + \frac{\gamma^2}{12}\right) \left\{ \begin{aligned} &\cot z_1 \left[ 1 - \frac{1 - 4(1 - \kappa_1)^2 + 2r_1 \kappa_1'}{12 \sin^2 z_1} \gamma^2 \right] \\ &+ \frac{1 - \kappa_1}{2 \sin^2 z_1} \left[ \gamma + \frac{1 + 2 \cos^2 z_1}{12 \sin^2 z_1} (1 - 4\kappa_1 + 2\kappa_1^2) \gamma^3 \right] \\ &- \frac{[(7 - 6\kappa_1) \cos^2 z_1 + (1 - \kappa_1)] r_1 \kappa_1' + \cos^2 z_1 \cdot r_1^2 \kappa_1''}{24 \sin^4 z_1} \gamma^3 + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Diese Formel berücksichtigt alle Potenzen von  $\gamma$  bis  $\gamma^4$  einschließ-  
lich,  $s_m : r$  als Größe von der Ordnung  $\gamma$  in betracht gezogen.

§ 4. Berechnung des Refraktionskoeffizienten  $k_1$ . Wenn wir die Formeln (5) S. 520 Bd. 1 auf den vorliegenden Fall anwenden, so wird mit Vernachlässigung von  $\gamma^5$ :

$$h = s_m \left(1 + \frac{\gamma^2}{12}\right) \cot \left(z_1 - \frac{1 - k_1}{2} \gamma\right) + \dots \quad (1)$$

Hierbei bezeichnet  $\frac{1}{2} k_1 \gamma$  den Winkel in  $P_1$  zwischen der Geraden nach dem Objekte  $P_2$  und der Tangente der Lichtkurve, also den Refraktionswinkel in  $P_1$ , vergl. Fig. 93. Bringen wir nun die Formel (10) des vorigen Paragraphen, welche auch auf den Höhenunterschied  $h$  der Punkte  $P_1$  und  $P_2$  bezogen werden kann, auf die Form (1), so wird ein Ausdruck für  $k_1$  erhalten.

Für die große Parenthese in (10) setzen wir zunächst, unter  $a, b, c \dots$  zu bestimmende Koeffizienten verstanden:

$$\cot(z_1 - [a\gamma + b\gamma^2 + c\gamma^3 + \dots]), \quad (2)$$

oder in Entwicklung nach *Taylor's* Satz:

$$\begin{aligned} \cot z_1 + \frac{a}{\sin^2 z_1} \gamma + \frac{b + a^2 \cot z_1}{\sin^2 z_1} \gamma^2 \\ + \frac{3c \sin^2 z_1 + 6ab \cot z_1 \sin^2 z_1 + a^3 (1 + 2 \cos^2 z_1)}{3 \sin^4 z_1} \gamma^3 + \dots \end{aligned}$$

Indem wir die Koeffizienten gleichhoher Potenzen von  $\gamma$  in dieser Entwicklung und in der großen Parenthese von (10) einander gleichsetzen, erhalten wir zur Bestimmung von  $a, b, c \dots$  die Relationen:

$$a = \frac{1 - \kappa_1}{2}, \quad (3)$$

$$b + a^2 \cot z_1 = - \frac{1 - 4(1 - \kappa_1)^2 + 2r_1 \kappa_1'}{12} \cot z_1,$$

$$\begin{aligned} 3c \sin^2 z_1 + 6ab \cot z_1 \sin^2 z_1 + a^3 (1 + 2 \cos^2 z_1) \\ = \frac{1 + 2 \cos^2 z_1}{8} (1 - \kappa_1) (1 - 4\kappa_1 + 2\kappa_1^2) \\ - \frac{[(7 - 6\kappa_1) \cos^2 z_1 + (1 - \kappa_1)] r_1 \kappa_1' + \cos^2 z_1 \cdot r_1^2 \kappa_1''}{8}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$b = - \frac{2\kappa_1 - \kappa_1^2 + 2r_1 \kappa_1'}{12} \cot z_1 \quad (4)$$

und

$$c = - \frac{\kappa_1 (1 - \kappa_1) (2 - \kappa_1) + [(3 - 2\kappa_1) \cos^2 z_1 + (1 - \kappa_1)] r_1 \kappa_1' + r_1^2 \kappa_1'' \cos^2 z_1}{24 \sin^2 z_1}. \quad (5)$$

Die Vergleichung von (1) und (2) zeigt aber, daß

$$k_1 = 1 - 2a - 2b\gamma - 2c\gamma^2 + \dots, \quad (6)$$

mithin wird

$$\begin{aligned} k_1 = \kappa_1 + \frac{2\kappa_1 - \kappa_1^2 + 2r_1 \kappa_1'}{6} \gamma \cot z_1 \\ + \frac{\kappa_1 (1 - \kappa_1) (2 - \kappa_1) + [(3 - 2\kappa_1) \cos^2 z_1 + (1 - \kappa_1)] r_1 \kappa_1' + r_1^2 \kappa_1'' \cos^2 z_1}{12 \sin^2 z_1} \gamma^2 + \dots, \end{aligned} \quad (6^*)$$

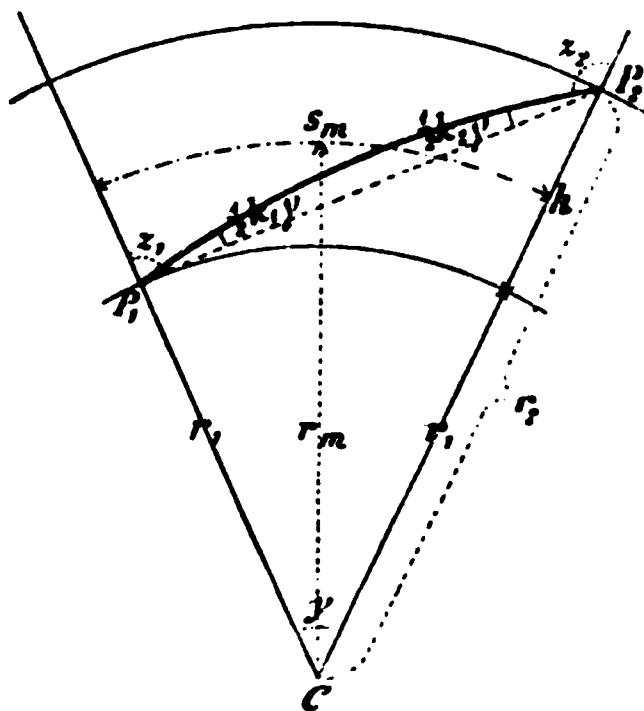


Fig. 93.

welcher Ausdruck in Verbindung mit Formel (1) dasselbe leistet, wie die Formel (10) des vorigen Paragraphen.

Indessen formen wir diesen Ausdruck für  $k_1$  noch um, indem wir die Höhen der Punkte als näherungsweise bekannt voraussetzen, eine Annahme, die auch den eben erwähnten Formeln (10) und (1) zu grunde liegt.

Aus (10) des vorigen Paragraphen folgt zur Substitution im zweiten Gliede von (6\*) hinreichend genau für  $\cot z_1$ :

$$\cot z_1 = \frac{h}{s_m} - \frac{1 - x_1}{2 \sin^2 s_1} \gamma + \dots \quad (7)$$

In den mit  $\gamma^2$  multiplizierten Gliedern von (6\*) setzen wir ferner ausreichend:

$$\cot z_1 = \frac{h}{s_m} + \dots, \quad \frac{1}{\sin^2 s_1} = 1 + \frac{h^2}{s_m^2} + \dots$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} k_1 = x_1 - \frac{(1 - x_1) r_1 x_1'}{12} \left( \frac{s_m}{r_m} \right)^2 + \frac{x_1 (2 - x_1) + 2 r_1 x_1'}{6} \frac{h}{r_m} \\ + \frac{(2 - x_1) r_1 x_1' + r_1^2 x_1''}{12} \left( \frac{h}{r_m} \right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Hierbei ist auch von der Relation

$$s_m = r_m \gamma \quad (9)$$

Gebrauch gemacht. Zufolge derselben hat man mit Rücksicht auf § 3 (8) S. 556:

$$r_m = r_1 + \frac{h}{2} = r_2 - \frac{h}{2} = \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (9^*)$$

und

$$r_1 = r_m - \frac{h}{2} = r_m \left( 1 - \frac{h}{2 r_m} \right),$$

welche letztere Formel dazu dienen kann,  $r_1$  aus (8) zu eliminieren.

Um überhaupt in (8) lediglich solche Größen zu haben, die sich auf die mittlere Höhe beziehen, setzen wir noch:

$$\begin{aligned} x_m &= - \frac{r_m}{n_m} \left( \frac{dn}{dh} \right)_m \\ x_m' &= \left( \frac{dx}{dh} \right)_m \\ x_m'' &= \left( \frac{d^2 x}{dh^2} \right)_m \end{aligned} \quad (10)$$

Der Index  $m$  deutet die Beziehung auf die Niveaufläche vom Radius  $r_m$  in der mittleren Höhe an.

Für eine Niveaufläche in der Höhe  $x$  über der Niveaufläche in der mittleren Höhe ist hiermit:

$$\kappa = \kappa_m + \kappa_m' x + \frac{1}{2} \kappa_m'' x^2 + \dots$$

$$\kappa' = \kappa_m' + \kappa_m'' x$$

$$\kappa'' = \kappa_m'' + \dots;$$

insbesondere ist für den Punkt  $P_1$ , wobei  $x = -\frac{h}{2}$  wird:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \kappa_m - \frac{r_m \kappa_m'}{2} \frac{h}{r_m} + \frac{r_m^2 \kappa_m''}{8} \left(\frac{h}{r_m}\right)^2 + \dots \\ r_1 \kappa_1' &= r_m \kappa_m' \left(1 - \frac{h}{2r_m}\right) - \frac{r_m^2 \kappa_m''}{2} \frac{h}{r_m} + \dots \\ r_1^2 \kappa_1'' &= r_m^2 \kappa_m'' + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Hiermit giebt (8):

$$\begin{aligned} k_1 &= \kappa_m - \frac{(1 - \kappa_m) r_m \kappa_m'}{12} \left(\frac{s_m}{r_m}\right)^2 + \frac{\kappa_m (2 - \kappa_m) - r_m \kappa_m'}{6} \frac{h}{r_m} \\ &\quad - \frac{2(2 - \kappa_m) r_m \kappa_m' - r_m^2 \kappa_m''}{24} \left(\frac{h}{r_m}\right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Im Endpunkt  $P_2$  dagegen ist

$$\begin{aligned} k_2 &= \kappa_m - \frac{(1 - \kappa_m) r_m \kappa_m'}{12} \left(\frac{s_m}{r_m}\right)^2 - \frac{\kappa_m (2 - \kappa_m) - r_m \kappa_m'}{6} \frac{h}{r_m} \\ &\quad - \frac{2(2 - \kappa_m) r_m \kappa_m' - r_m^2 \kappa_m''}{24} \left(\frac{h}{r_m}\right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Der Winkel zwischen den Endtangenten in  $P_1$  und  $P_2$ , oder die gesamte Refraktion, findet sich aus (12) und (13) gleich

$$\frac{k_1 + k_2}{2} \gamma = \left\{ \begin{aligned} &\kappa_m - \frac{(1 - \kappa_m) r_m \kappa_m'}{12} \left(\frac{s_m}{r_m}\right)^2 \\ &- \frac{2(2 - \kappa_m) r_m \kappa_m' - r_m^2 \kappa_m''}{24} \left(\frac{h}{r_m}\right)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \gamma. \quad (14)$$

Die Parenthese rechter Hand stellt den mittleren Refraktionskoeffizienten  $k$  des Lichtstrahles  $P_1 P_2$  dar.

Die gesamte Refraktion kann man auch leicht direkt berechnen, was zur Kontrolle noch geschehen soll.

**§ 5. Die gesamte Refraktion  $k\gamma$  des Lichtstrahles.** Das Differential derselben ist bereits im § 2 S. 553 unter (1\*) angegeben worden. Es ist daselbst mit  $d\beta$  bezeichnet und entspricht der Zunahme  $d\gamma$  des Zentriwinkels  $\gamma$ , Fig. 92, S. 553. Bezeichnen wir die gesamte Refraktion jetzt mit  $k\gamma$ , so ist also

$$\frac{d(k\gamma)}{d\gamma} = - \frac{dn}{n d\gamma} \tan z. \quad (1)$$



Da aber  $dh \tan z = r d\gamma$  ist, so folgt hieraus mit Rücksicht auf (3\*) S. 555:

$$\frac{d(k\gamma)}{d\gamma} = - \frac{r dn}{n dh} = \kappa. \quad (2)$$

Verfolgen wir nun den Lauf des Lichtstrahles von  $P_1$  aus, so erscheint die gesamte Refraktion desselben als Funktion von  $\gamma$ . Da sie in  $P_1$  selbst noch gleich null ist, so haben wir nach *Taylor's* Satz:

$$k\gamma = \left(\frac{d(k\gamma)}{d\gamma}\right)_1 \gamma + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2(k\gamma)}{d\gamma^2}\right)_1 \gamma^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3(k\gamma)}{d\gamma^3}\right)_1 \gamma^3 + \dots, \quad (3)$$

worin der Index 1 wieder die Beziehung auf  $P_1$  andeutet. Nun ist aber nach (2)

$$\frac{d^2(k\gamma)}{d\gamma^2} = \frac{d\kappa}{d\gamma} = \frac{d\kappa}{dh} \frac{dh}{d\gamma} = \kappa' r \cot z, \quad (4)$$

und hiermit

$$\frac{d^3(k\gamma)}{d\gamma^3} = \kappa' \cot z \frac{dr}{d\gamma} - \kappa' r \frac{1}{\sin^2 z} \frac{dz}{d\gamma} + \kappa'' r \cot z \frac{dh}{d\gamma},$$

also mit Rücksicht auf (2) und (3) S. 554 u. 555:

$$\frac{d^3(k\gamma)}{d\gamma^3} = \frac{\kappa' r}{\sin^2 z} (\cos^2 z + 1 - \kappa) + \kappa'' r^2 \cot^2 z. \quad (5)$$

Es wird hiermit aus (3) für den mittleren Refraktionskoeffizienten erhalten:

$$k = \kappa_1 + \frac{r_1 \kappa_1'}{2} \gamma \cot z_1 + \frac{r_1 \kappa_1' (\cos^2 z_1 + 1 - \kappa_1) + r_1^2 \kappa_1'' \cos^2 z_1}{6 \sin^2 z_1} \gamma^2 + \dots, \quad (6)$$

und indem wir mittelst (7) S. 558 aus dieser Entwicklung  $\cot z_1$  eliminieren:

$$k = \kappa_1 - \frac{(1 - \kappa_1) r_1 \kappa_1'}{12} \gamma^2 + \frac{r_1 \kappa_1'}{2} \frac{h}{r_m} + \frac{(1 + \kappa_1) r_1 \kappa_1' + 2 r_1^2 \kappa_1''}{12} \left(\frac{h}{r_m}\right)^2 + \dots. \quad (7)$$

Um schließlich auch noch die Koeffizienten  $\kappa$  auf die mittlere Höhe zu beziehen, machen wir von den (11) S. 559 Gebrauch. Zugleich führen wir für  $r_1$  nach (9\*) S. 558  $r_m$  ein und gelangen zu der Formel:

$$k = \kappa_m - \frac{(1 - \kappa_m) r_m \kappa_m'}{12} \left(\frac{s_m}{r_m}\right)^2 - \frac{2(2 - \kappa_m) r_m \kappa_m' - r_m^2 \kappa_m''}{24} \left(\frac{h}{r_m}\right)^2 + \dots. \quad (8)$$

Dies ist dasselbe Resultat, welches in (14) S. 559 enthalten ist.

Die Formel (8) zeigt, daß ein Lichtstrahl, welcher in seinem Verlauf nur geringe Höhenunterschiede aufweist, in erster Annähe-

rung als Kreisbogen aufgefaßt werden darf. Denn für denselben wird  $k$  nahezu gleich einem konstanten Werte  $\kappa_m$ ; die Gesamtkrümmung  $k\gamma$  wächst somit nahezu proportional der Länge des Lichtstrahles, dessen Krümmungsradius  $= r_m : \kappa_m$  ist.

§ 6. Der Einfluß der Abplattung der Niveaulächen. Bisher wurde vorausgesetzt, daß innerhalb des in betracht kommenden Gebietes die Schichten gleicher Luftdichtigkeit ebenso wie die entsprechenden Niveaulächen als konzentrische Kugelflächen aufgefaßt werden dürfen. Da aber die Niveaulächen eine Abplattung haben, so müssen wir diese strenggenommen auch für die Schichten gleicher Luftdichtigkeit einführen. Aus dem zweiten Kapitel wissen wir, daß die Abplattung mit der Höhenlage der Niveaulächen etwas variiert; indessen genügt es hier, dieselben als Parallellflächen zu behandeln.

Gehen wir nun auf § 2 und Fig. 92 S. 553 zurück, so zeigt sich strenggenommen zunächst die Änderung, daß die von den Lotrichtungen aufeinanderfolgender Punkte des Lichtstrahles gebildete Fläche keine Ebene mehr ist, weil sich die Lotrichtungen für Punkte einer Niveauläche im allgemeinen kreuzen. Die hiermit verbundene zweite Krümmung des Lichtstrahles ist aber jedenfalls sehr gering; wir vernachlässigen sie daher, indem wir uns vorbehalten, nachträglich den Nachweis ihrer Geringfügigkeit zu liefern. Dann bleibt in Fig. 92 S. 553 nur noch zu beachten, daß es keinen gemeinsamen Durchschnittspunkt  $C$  aller Normalen giebt, daß vielmehr im allgemeinen je zwei unendlich benachbarte Normalen, z. B. diejenigen von  $P$  und  $P'$ , einen besonderen Durchschnittspunkt haben. Die Länge der Normalen von hier bis zu einer Niveauläche ist deren Krümmungsradius; für die Niveauläche durch  $P_1$  bezeichnen wir denselben mit  $\varrho$ . An Stelle des Radiusvektors  $r$  tritt nunmehr  $\varrho + h$ , wobei zu beachten, daß  $\varrho$  eine Funktion von  $\gamma$  ist.

Mit Rücksicht hierauf modifiziert sich die Entwicklung des § 3 S. 554 u. ff. wie folgt. An Stelle von (1) setzen wir:

$$h = \left(\frac{dh}{d\gamma}\right)_1 \gamma + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2h}{d\gamma^2}\right)_1 \gamma^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3h}{d\gamma^3}\right)_1 \gamma^3 + \dots, \quad (1)$$

von welcher Form der Gleichung wir früher nur deshalb keinen Gebrauch gemacht haben, um nicht in der Entwicklung außer  $r$  noch die Variable  $h$  zu haben. Jetzt ist dieses unvermeidlich. Die Gleichung (2) § 3 geht über in:

$$\frac{dh}{d\gamma} = (\varrho + h) \cot z, \quad (2)$$

die Gleichungen (3) und (3\*) in:

$$\frac{ds}{d\gamma} = -(1 - \kappa), \quad (3)$$

$$\kappa = - \frac{(\varrho + h) \frac{dn}{dh}}{n} . \quad (3^*)$$

Aus (2) folgt durch Differentiation:

$$\frac{d^2 h}{d\gamma^2} = \varrho' \cot z + (\varrho + h) \cot^2 z + \frac{(\varrho + h)(1 - \kappa)}{\sin^2 z} , \quad (4)$$

wobei  $\varrho'$  den ersten Differentialquotienten von  $\varrho$  nach  $\gamma$  bezeichnet. Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{d^3 h}{d\gamma^3} = & \varrho'' \cot z + \varrho' \frac{\cos^2 z + 2(1 - \kappa)}{\sin^2 z} + (\varrho + h) \cot^3 z \\ & + \frac{(\varrho + h) \cot z}{\sin^2 z} - (1 - \kappa)(5 - 2\kappa) - \frac{(\varrho + h)^2 \cot z}{\sin^2 z} \kappa' , \end{aligned} \quad (5)$$

unter  $\kappa'$  wie früher  $\frac{d\kappa}{dh}$  verstanden. Hiermit geht (1) über in

$$\begin{aligned} h = & \left( \varrho_1 \gamma + \frac{1}{2} \varrho_1' \gamma^2 + \frac{1}{6} \varrho_1'' \gamma^3 + \dots \right) \cot z_1 \\ & + \frac{1}{2} \gamma \left\{ \left( \varrho_1 \gamma + \frac{1}{3} \varrho_1' \gamma^2 + \dots \right) \cot^2 z_1 + \left( \varrho_1 \gamma + \frac{2}{3} \varrho_1' \gamma^2 + \dots \right) \frac{1 - \kappa_1}{\sin^2 z_1} \right\} \\ & + \frac{1}{6} \varrho_1 \gamma^3 \left\{ \cos^2 z_1 + (1 - \kappa_1)(5 - 2\kappa_1) - \varrho_1 \kappa_1' \right\} \frac{\cot z_1}{\sin^2 z_1} \dots , \end{aligned} \quad (6)$$

mit

$$\kappa_1 = - \frac{\varrho_1}{n_1} \left( \frac{dn}{dh} \right)_1 .$$

Für die horizontale Entfernung  $s_1$  der Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , gemessen auf der Niveaufläche von  $P_1$ , haben wir die *Taylor*sche Entwicklung:

$$s_1 = \varrho_1 \gamma + \frac{1}{2} \varrho_1' \gamma^2 + \frac{1}{6} \varrho_1'' \gamma^3 + \dots ; \quad (7)$$

führen wir dieselbe in (6) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} h = & s_1 \cot z_1 \left\{ 1 + \frac{\cos^2 z_1 + (1 - \kappa_1)(5 - 2\kappa_1) - \varrho_1 \kappa_1'}{6 \sin^2 z_1} \gamma^2 \right\} \\ & + \frac{1}{2} s_1 \gamma \frac{\cos^2 z_1 + (1 - \kappa_1)}{\sin^2 z_1} + \frac{1}{12} \varrho_1' \gamma^3 \left( 1 - \frac{\kappa_1}{\sin^2 z_1} \right) + \dots . \end{aligned} \quad (7^*)$$

Die bei dieser Entwicklung vernachlässigten Glieder von der Ordnung  $\gamma^4$  können aus (7) S. 555 entnommen werden, indem für  $r_1$  einfach  $\varrho_1$  gesetzt wird.

Die Vergleichung mit dieser letzteren Formel zeigt, daß die nach der Hypothese der Kugelgestalt berechneten Werte  $h$  um

$$+ \frac{1}{12} \varrho_1' \gamma^3 \left( 1 - \frac{\kappa_1}{\sin^2 z_1} \right) \quad (8)$$

zu verbessern sind. Man überzeugt sich leicht, daß dieses Korrektionsglied auch für Formel (10) § 3 S. 556 gilt. Bei Anwendung der Formel (1) des § 4 bleibt es ebenfalls bestehen, wenn man  $k_1$  in der Weise nach den Formeln des § 4 berechnet, daß für  $r$  immer  $\varrho$

mit demselben Index gesetzt wird. Dabei ist es innerhalb der festgesetzten Genauigkeitsgrenzen gestattet in den Formeln (8) und (12) des § 4 S. 558 u. 559 den Krümmungsradius  $\varrho_m$  der mittleren Niveaufläche an irgend einer Stelle zwischen  $P_1$  und  $P_2$  zu messen.

Dem Charakter der Formel (1) des § 4 S. 556 würde es übrigens besser entsprechen, das Glied (8) in zwei Teile zu spalten, nämlich in

$$+ \frac{1}{12} \varrho_1' \gamma^3 \quad (9)$$

und

$$- \frac{1}{12} \varrho_1' \gamma^3 \cdot \frac{x_1}{\sin^2 s_1}. \quad (9^*)$$

Nimmt man das letztere Glied mit in die Cotaugente, so ergibt sich als Verbesserung des nach § 4 berechneten Wertes von  $k_1$ :

$$+ \frac{x_1}{6} \frac{\varrho_1'}{\varrho_1} \gamma. \quad (10)$$

Mit Aufstellung des Korrektionsgliedes (9) ist auch die in Bd. 1 S. 520—521 noch unerledigte Frage nach dem Wert des Ergänzungsgliedes  $E_{2,1}$  beantwortet. [Wir haben dieses nicht für sich allein abgeleitet (was mit Polarkoordinaten leicht geschehen kann), weil wir noch den Einfluss der Abplattung auf den Refraktionskoeffizienten mit in die Betrachtung aufnehmen wollten.]

Behufs numerischer Schätzung von (9) und (10) setzen wir voraus, daß  $P_1$  und  $P_2$  auf demselben Meridian liegen,  $P_2$  nördlich von  $P_1$ . Dann ist in der geographischen Breite  $B$  nach Bd. 1 S. 44 (3)

$$\varrho = a_0 (1 - e^2) (1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 B + \dots)$$

und

$$\frac{d\varrho}{dB} = \frac{3}{2} a_0 e^2 \sin 2B + \dots$$

Da  $dB$  und  $d\gamma$  jetzt nach der Voraussetzung nicht verschieden sind, so ist, wenn  $2\alpha$  für  $e^2$  gesetzt wird:

$$\varrho' = 3\alpha a_0 \sin 2B + \dots \quad (11)$$

und

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = 3\alpha \sin 2B + \dots \quad (12)$$

Diese Ausdrücke sind in (9) bzw. (10) einzuführen.

Für  $\gamma = 1/60$ , d. h. für rund  $100^{\text{km}}$  Distanz, wird demnach das Korrektionsglied (9) im Maximum gleich

$$1/40 \text{ Meter.}$$

Das Glied (9\*) giebt hiervon nur einen Bruchteil. Da im Meridian die Abplattung am größten ist, so stellt dieser Wert das überhaupt für  $100^{\text{km}}$  Distanz bei Anwendung der Kugelhypothese entstehende größte Fehlerglied vor. Man kann dasselbe mit Rücksicht auf die sonst erreichbare Genauigkeit unbedenklich vernachlässigen, obgleich es sich

für aufeinanderfolgende Strecken anhäuft; denn selbst für einen Quadranten giebt es nur etwa  $1,5^m$ .

§ 7. Die regelmässige Lateralrefraktion; Notiz über die Aberration des Lichtes. Um die von der Abplattung der Niveauflächen herrührende zweite Krümmung des Lichtstrahles zu schätzen, ist es erforderlich sich die ähnliche Untersuchung des Bandes 1 S. 335 § 6 für die geodätische Linie zu vergegenwärtigen; alsdann wird das Folgende leicht verständlich sein.

Von ihrem Anfangspunkte  $P_0$  bis zum Endpunkte  $P_n$  denken wir uns die Lichtkurve in  $n =$  unendlich viele, unendlich kleine, geradlinige Elemente  $P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3$  u. s. f. zerlegt. Schneiden die Lotrichtungen der Punkte  $P_0, P_1, P_2$  u. s. f. die Erdaxe in den Punkten  $K_0', K_1', K_2'$  u. s. f., so stellen die Ebenen  $P_0P_1K_0', P_0P_1P_2K_1', P_1P_2P_3K_2'$  u. s. f. die aufeinanderfolgenden Schmiegungebenen der Lichtkurve vor. Für die beiden ersten, welche die Gerade  $P_0P_1$  gemeinsam haben, ist der Flächenwinkel abhängig von der Strecke  $K_0'K_1'$  der Erdaxe und dem normalen Abstand des Punktes  $K_1'$  von der Geraden  $P_0P_1$ . Um den Flächenwinkel auf einen bekannten Ausdruck zurückzuführen, bezeichnen wir mit  $Q_1$  denjenigen Punkt, wo die Lotrichtung für  $P_1$  die Niveaufläche von  $P_0$  schneidet. Die unendlich kleine, gerade Strecke  $P_0Q_1$  können wir aber als Element einer geodätischen Linie betrachten. Für die Ebenen  $P_0Q_1K_0'$  und  $P_0Q_1K_1'$ , zwei aufeinanderfolgenden Schmiegungebenen der letzteren, ist dann der Flächenwinkel  $\nu$  bereits in Bd. 1 durch den Ausdruck auf S. 335 u. gegeben; da nun längere Lichtstrahlen stets nahezu horizontal verlaufen, so weichen die Richtungen der beiden Geraden  $P_0P_1$  und  $P_0Q_1$  und daher auch die normalen Abstände des Punktes  $K_1'$  von denselben nur wenig von einander ab; man kann somit in 1. Annäherung den Ausdruck für  $\nu$  auch auf den gesuchten Flächenwinkel anwenden.

Wegen des Umstandes, daß die Ebenen  $P_0P_1K_0'$  und  $P_0P_1P_2K_1'$  den unendlich kleinen Winkel  $\nu$  miteinander bilden, macht von oben gesehen (das Auge in der Lotlinie  $P_1$  gedacht) der Lichtstrahl bei  $P_1$  eine unendlich kleine, laterale Schwenkung. Setzen wir beide Ebenen bis in die Nähe von  $P_n$  fort, so haben sie dort einen unendlich kleinen Querabstand, den man näherungsweise gleich dem Produkt aus  $\nu$  in den normalen Abstand des Punktes  $P_n$  von der Geraden  $P_0P_1$  setzen kann. Betrachtet man nun den Lichtstrahl zufolge seiner ersten und wesentlichsten Krümmung als Kreisbogen vom Radius  $\varrho_1$ , so ist dieser Abstand angenähert  $s^2 : 2\varrho_1$ , wenn  $s$  die Länge des Lichtstrahles  $P_0P_n$  bezeichnet. Damit findet sich aber als Querabstand der beiden Schmiegungebenen in der Nähe von  $P_n$  der Ausdruck (1) S. 335 Bd. 1 mit der Modifikation, daß  $\varrho_n$  durch  $\varrho_1$  zu ersetzen ist. Die weitere Rechnung, insbesondere die Summierung der Querabstände

bei  $P_n$  zwischen je zwei aufeinander folgenden Schmiegungebenen, geht wie auf S. 336 Bd. 1 vor sich; schliesslich gelangt man für den in Richtung wachsender Azimute gemessenen Horizontalwinkel zwischen der Vertikalebene, welche in  $P_0$  den Lichtstrahl tangiert und der Vertikalebene von  $P_0$  nach  $P_n$ , wieder zu Gleichung (5) S. 337 Bd. 1 mit der eben angedeuteten Modifikation. Bezeichnen wir diesen Winkel als die regelmäßige Lateralrefraktion und nennen die Endpunkte des Lichtstrahles jetzt  $P_1$  und  $P_2$ , so erhalten wir damit den Satz:

*Die regelmäßige Lateralrefraktion eines Lichtstrahles, welcher von einem Punkte  $P_2$  nach einem anderen Punkte  $P_1$  geht, ist in  $P_1$  gleich dem Produkt aus dem Unterschied des astronomischen und geodätischen Azimutes für das Objekt  $P_2$ , (abgesehen darin von dem Einfluss der Höhenlage desselben über dem Standpunkte  $P_1$ ) in den Refraktionskoeffizienten.*

Hierbei ist nur noch zu beachten, daß nach dem Schlufs von § 5 S. 561, wenn  $k$  den mittleren Refraktionskoeffizienten des Lichtstrahles bezeichnet,  $\varphi_l = \varphi_a : k$  gesetzt werden kann.

Wenn man nun bedenkt, daß  $k$  erfahrungsmässig in der Regel etwa  $1/7$  ist, für meßbare Distanzen aber ohnehin der Unterschied des astronomischen und geodätischen Azimuts nur einige Hundertelsekunden erreicht, so kann man gewiß bei den Horizontalwinkeln und Azimuten sowie bei der Betrachtung in § 6, wie geschehen, die regelmäßige Lateralrefraktion vernachlässigen.

Die Methode vorstehender Entwicklung entspricht dem von *Sonderhof* 1869 im 51. Teile von *Grunerts Archiv* S. 39 und 45 eingeschlagenen Wege. Den Betrag der regelmäßigen Lateralrefraktion gab bereits 1867 *Andrae* im 1. Bde. der *Danske Gradmaaling* S. 543 an.

Anm. *Über den Einfluss der Aberration auf terrestrische Messungen.*

Derselbe kann vernachlässigt werden. Um dieses nachzuweisen, betrachten wir zwei Punkte, ein Objekt  $O$  und einen Standpunkt, woselbst sich ein Fernrohr  $FM$  befindet, welches genau auf  $O$  gerichtet ist, Fig. 94. Zur Zeit 1 sei das Objekt in  $O_1$ , das Fadenkreuz in  $F_1$  und der optische Mittelpunkt des Objektivs (den wir der Einfachheit halber an Stelle der zwei Hauptpunkte benutzen). in  $M_1$ . Wir nehmen nun an, daß die drei Punkte sich mit derselben Geschwindigkeit rechtwinkelig zur Linie  $OMF$  bewegen. Ein von  $O_1$  ausgegangener Lichtstrahl möge zur Zeit 2 gerade in  $M_2$  anlangen. Man findet dann mit Rücksicht auf die Ähnlichkeit der Dreiecke  $O_1M_1M_2$  und  $M_2F_2F_3$  leicht, daß dieser Lichtstrahl zu einer Zeit 3, wo er in der Ebene des Fadenkreuzes anlangt, gerade den Kreuzpunkt selbst trifft (konstante Lichtgeschwindigkeit von  $O$  bis  $F$  vorausgesetzt). Das Fernrohr, dessen Richtung  $F_3M_3$  zur Zeit 3 parallel  $F_1M_1O_1$  ist, steht daher anscheinend aufs Objekt ein. Es steht aber auch wirklich ein, da  $F_3M_3$  durch  $O_3$  hindurch geht. Die Aberration ist somit null. Würde sich hingegen  $O$  in der Zeit 1.3 bis  $O_3'$  bewegen, so entstünde eine Aberration gleich dem Winkel, unter welchem  $O_3O_3'$  von  $F_3$  aus erscheint. Dieser Winkel ist in Sek. gleich

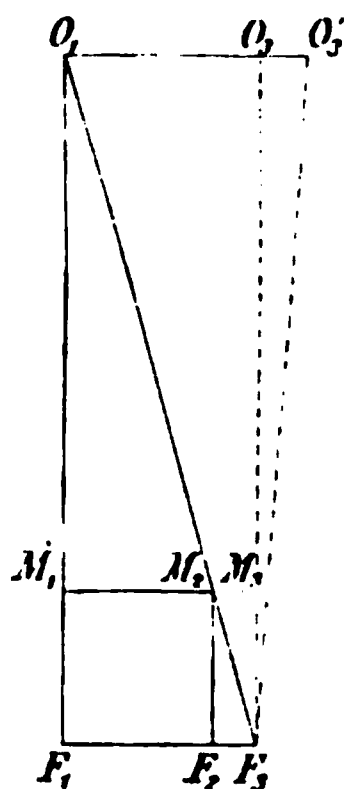


Fig. 94.

$$206265 \frac{v}{l}, \quad (1)$$

worin  $v$  die Geschwindigkeitsdifferenz von  $O$  und  $F$ ,  $l$  die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet.

Handelt es sich nun um einen Standpunkt und ein Objekt auf der Erdoberfläche, so brauchen wir nur die Bewegungskomponente normal zur Verbindungslinie zu betrachten, da offenbar diese allein Ursache von Aberration wird. Nach § 2 S. 3 des 1. Kap. kann man sich aber jede Bewegung eines Punktes der Erde in zwei Teile zerlegt denken, in eine Parallelverschiebung mit dem Erdschwerpunkt und eine Drehung um den letzteren. Nach dem eben Gesagten erzeugt nun höchstens die Drehung um den Erdschwerpunkt, also die tägliche Bewegung, eine Aberration. Der Betrag derselben ist nach Formel (1) zu berechnen. Das Maximum der Aberration entsteht für zwei Punkte desselben Meridianes, weil in diesem Falle die Verbindungslinie normal zur Bewegungsrichtung steht, sodafs die ganze Bewegungsdifferenz Aberration erzeugt.

Ist  $R$  der Erdradius,  $B$  die geographische Breite des einen,  $B + \Delta B$  diejenige des anderen Punktes, so ist die Bewegung des ersten Punktes in einer Sekunde angenähert gleich

$$\frac{2\pi R \cos B}{24.60.60}$$

und daher, abgesehen vom Vorzeichen

$$v = \frac{\pi R \sin B \Delta B}{43200} = \frac{\pi s \sin B}{43200}, \quad (2)$$

wenn  $s = R \Delta B$  die Entfernung bezeichnet. Hiermit wird die Aberration in Sekunden gleich

$$\frac{206265 \pi \sin B s^m}{43200.300\,000\,000}, \quad (3)$$

indem das Licht in der Sekunde rund  $300\,000\,000^m$  zurücklegt. Man bemerkt, dafs (3) selbst für  $s = 300\,000^m$  im Maximum nur  $0,015''$  beträgt.

**§ 8. Einfluß einer Abweichung der Luftschichten gleicher Dichtigkeit von der Normalform.** Es ist in § 6 nachgewiesen worden, dafs man bei Berechnung der Höhenrefraktion von der Abplattung der Luftschichten gleicher Dichtigkeit absehen kann. Diese Abplattung, welche der Voraussetzung des Zusammenfallens jener Luftschichten mit Niveauflächen entspricht, ist überhaupt im Vergleiche zu den anormalen Abweichungen der Luftschichten gleicher Dichte von ganz untergeordneter Bedeutung. Die Ursache der Abweichungen von der Normalform ist die Unregelmäßigkeit der Verteilung der Wärme und des Druckes in der Luft. Bezüglich der Wärmeverteilung sei hier nur bemerkt, dafs in der Nähe des Terrains die Lufttemperatur weit gröfseren täglichen Schwankungen unterliegt als in gröfseren, freien Höhen über dem Terrain; ist nun das Terrain geneigt, so ergibt sich schon daraus eine Abweichung der Schichten gleicher Luftdichte in der Nähe des Terrains von der Normalform. Die Ungleichheit des Luftdruckes im Meeresniveau aber zeigt jede



Isobarenkarte, jeder Wetterbericht der deutschen Seewarte. Ein vollständiges Horizontallaufen der Luftschichten gleicher Dichte wird daher ebensowenig stattfinden, wie ein völliger Parallelismus, und es fragt sich, ob für diesen Fall unsere Formeln noch eine Bedeutung haben, weil die bei Entwicklung derselben vorausgesetzte Normalform nicht stattfindet.

Wir knüpfen an die Untersuchung des § 2 S. 553 an. Wenn der Lichtstrahl im Punkte  $P$  auf eine Luftschicht trifft, die daselbst nicht horizontal ist, so tritt an die Stelle der Zenithdistanz  $z$  als Einfallswinkel ein anderer Wert  $\varepsilon$ . Das Differential der Brechung bei  $P$  wird nun

$$d\beta = - \frac{dn}{n} \tan \varepsilon. \quad (1)$$

$dn$  ist die sprungweise bei  $P$  eintretende, unendlich kleine Änderung des Brechungsindex  $n$ ; dieselbe bleibt konstant innerhalb einer Schicht von der Dicke  $dh'$  (früher  $dh$ ), in welcher der Lichtstrahl ein Bogenelement  $PP' = d\sigma$  durchläuft. Da nun  $d\sigma \cdot \cos \varepsilon = dh'$  ist, so folgt aus (1):

$$\frac{d\beta}{d\sigma} = - \frac{\sin \varepsilon}{n} \frac{dn}{dh'}.$$

Der Krümmungsradius  $\rho$ , des Lichtstrahles ist aber gegeben durch die Relation

folglich wird

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{\sin \varepsilon}{n} \frac{dn}{dh'}. \quad (2)$$

Hierin ist  $dn$  die Änderung des Brechungsindex für die Strecke  $dh'$  normal zur Luftschicht. Messen wir aber  $dn$  für eine vertikale Strecke  $dh$ , und ist  $\nu$  der Neigungswinkel der Luftschicht bei  $P$ , so folgt für die Werte  $dh$  und  $dh'$ , welche demselben Differential  $dn$  entsprechen, die Relation  $dh = dh' \sec \nu$ . Es wird daher

$$\frac{dn}{dh'} = \frac{dn}{dh} \sec \nu.$$

Um anzudeuten, daß in  $dn : dh$  das Differential  $dh$  sich nicht auf die Höhenänderung des Lichtstrahles, welche zu dessen Linienelement  $d\sigma$  gehört, sondern auf eine ausschließliche Höhenänderung an dem betreffenden Punkte bezieht, schreiben wir besser

$$\frac{dn}{dh'} = \frac{\partial n}{\partial h} \sec \nu.$$

Die partielle Differentiation rechter Hand entspricht dem Umstande, daß  $n$  jetzt nicht mehr lediglich Funktion von  $h$  bzw.  $r$  ist, sondern daß es von drei Koordinaten abhängt, als welche sich darbieten  $h$ ,  $\gamma$  und das Azimut derjenigen Vertikalebene in  $P_1$ , welche die Ebene der Zählung für  $\gamma$  bildet.



Nach (2) wird nunmehr:

$$\frac{1}{\varrho_i} = - \frac{\partial n \sin \varepsilon}{n \partial h \cos \nu}. \quad (3)$$

Die Ebene der Krümmung des Lichtstrahles bei  $P$  steht im allgemeinen nicht vertikal sondern schief, nämlich normal auf der Luftschicht gleicher Dichte, welche durch  $P$  hindurchführt. Denken wir uns den Lichtstrahl auf die Vertikalebene  $P_1 P_2$  projiziert, so erlangt in der Projektion die Brechung und also auch  $1 : \varrho_i$  einen etwas anderen Wert. Man kann dies durch Beifügen eines Faktors  $\sec^3 \lambda \cos \mu$  zum Ausdruck bringen. Denkt man sich nämlich drei aufeinanderfolgende Punkte  $P'$ ,  $P$  und  $P''$  des Lichtstrahles und bezeichnet für den Augenblick die Seiten des von denselben gebildeten, unendlich kleinen Dreiecks  $\Delta$  mit  $a$ ,  $b$  und  $c$ , so ist bekanntlich  $1 : \varrho_i = 4 \Delta : abc$ . Die Projektion verkleinert sowohl  $\Delta$  wie  $a$ ,  $b$  und  $c$ , letztere drei Strecken nahezu in gleichem Verhältnis, und diese Veränderung wird durch den Faktor  $\cos \mu : \cos^3 \lambda$  dargestellt.

Wir haben nun in der Projektion auf die Vertikalebene  $P_1 P_2$

$$\frac{1}{\varrho_i} = - \frac{\partial n \sin \varepsilon \cos \mu}{n \partial h \cos \nu \cos^3 \lambda}. \quad (4)$$

Wenn dagegen die Luftschichten ihre Normalform haben, so ist

$$\frac{1}{\varrho_i} = - \frac{dn}{n dh} \sin z = - \frac{\partial n}{n \partial h} \sin z. \quad (4^*)$$

Die Formeln (4) und (4\*) geben aber in der Regel beide den Wert von  $1 : \varrho_i$  gleich  $-\partial n : n \partial h$ , d. i.  $\kappa : r$ , erheblich genauer als auf 1‰.

Da nämlich die Lichtstrahlen nach entfernten Objekten immer nahezu horizontal laufen, so ist  $z$  nahezu  $90^\circ$  und  $\sin z$  weicht somit nur um eine Gröfse 2. Ordnung von eins ab, wenn man als 1. Ordnung den Arcus des Neigungswinkels des Lichtstrahles gegen die Horizontale annimmt. Insbesondere ist für die Werte  $2^\circ 30'$  und  $8^\circ 10'$  dieses Winkels die Abweichung 0,001 bzw. 0,01. Setzen wir nun voraus, daß die Neigung  $\nu$  der Luftschichten nur einige Grade beträgt, so wird  $\varepsilon$  ebenso wie  $z$  nahezu gleich  $90^\circ$ , wozu allerdings bemerkt werden muß, daß die Abweichungen von  $90^\circ$  in  $z$  sich mit der Neigung  $\nu$  der Luftschichten ungünstig kombinieren können, sodaß die Abweichungen von  $90^\circ$  in  $\varepsilon$  im allgemeinen gröfser als diejenigen in  $z$  sein werden. Jedenfalls wird  $\sin \varepsilon$  mit eins bis auf weniger als 0,01 übereinstimmen, solange die Abweichung des Wertes von  $\varepsilon$  gegen  $90^\circ$  nicht  $8^\circ$  überschreitet. Mit dieser Abweichung kombiniert sich diejenige des Faktors  $\cos \mu \sec \nu$  in (4) von eins in jedem Falle so günstig, daß eine Verkleinerung entsteht; um dieses einzusehen, hat man zu beachten, daß  $\mu$  wesentlich als Komponente von  $\nu$  quer zur Brechungsebene des Lichtstrahles auftritt. Was endlich  $\cos^3 \lambda$  an-

betrifft, so braucht nur darauf hingewiesen zu werden, daß  $\lambda$  von der Ordnung der anormalen Lateralrefraktion ist, um zu erkennen, daß es immer mit eins vertauscht werden darf.

Der Umstand, daß die beobachteten Lateralrefraktionen nur selten mehr wie einige Sekunden betragen und in der Regel erheblich kleiner als die entsprechenden Höhenrefraktionen sind, beweist, daß die Neigung der Luftschichten im allgemeinen thatsächlich nur einige Grade beträgt. Denn die Lateralrefraktion und die Höhenrefraktion stehen annähernd im Verhältnis  $\sin \mu : \cos \mu$ , wie die Projektion des Lichtstrahles auf Niveaufläche und Vertikalebene zeigt [s. o. Entwicklung zu (4)]. Es muß daher  $\sin \mu$  in der Regel im Durchschnitt für die ganze Länge des Lichtstrahles ein kleiner Bruch sein.

In allen Fällen nun, wo man (4\*) mit (4) vertauschen darf, kann man bei Berechnung der Refraktion die Ausdrücke der §§ 3 bis 5 zu grunde legen. Dieselben gelten somit nicht nur bei normaler Lagerung, sondern auch bei geringer Neigung der Luftschichten gleicher Dichte. Man muß aber beim Gebrauche der Formeln darauf achten, daß die von der Krümmung des Lichtstrahles abhängige Größe  $\kappa$  und ihre durch  $\kappa'$  und  $\kappa''$  bezeichneten Veränderungen nach der Höhe bei der allgemeineren Benutzung der Formeln immer auf die Umgebung des Lichtstrahles zu beziehen sind. Hieraus ergibt sich einestheils noch eine Einschränkung für die Anwendbarkeit der Formeln, anderenteils eine Einschränkung der Methoden zur Bestimmung der Konstanten, worauf wir weiterhin einzugehen haben.

**§ 9. Fortsetzung; Ausnahmefall.** Die Formeln der §§ 3 bis 5 dürfen bei nicht normaler Luftschichtung unmittelbar Anwendung finden, sobald der Lichtstrahl  $P_1 P_2$  nur steigt oder nur fällt. Die in den Formeln auftretenden Größen  $\kappa_1$ ,  $\kappa'_1$ ,  $\kappa''_1$  u. s. w. können wir uns dabei (ganz abgesehen von der wirklichen Ausführung) dadurch gegeben denken, daß  $\kappa$  außer für  $P_1$  noch für mindestens zwei andere Punkte des Lichtstrahles bekannt ist. Da allen diesen Punkten verschiedene Höhen zukommen, so erscheint nun  $\kappa$  entlang des Lichtstrahles als Funktion der Höhe und  $\kappa'_1$  sowie  $\kappa''_1$  u. s. w. lassen sich interpolatorisch herstellen. Sobald der Lichtstrahl jedoch teils steigt, teils fällt, giebt es im Verlaufe desselben Orte gleicher Höhe, in denen  $\kappa$  bei geneigter Luftschichtung um so verschiedenere Werte hat, je entfernter solche Orte von einander sind.

In diesem Falle ist es unzulässig,  $\kappa$  als Funktion der Höhe aufzufassen. Man wird vielmehr  $\kappa$  entlang des Lichtstrahles als Funktion der Entfernung oder, was dasselbe, als Funktion von  $\gamma$  annehmen und die Formeln demgemäß umwandeln. Hierbei ist an § 3 S. 554 anzuknüpfen. Für die Reihe (1) gilt jetzt mit der im vorigen Paragraphen angegebenen Genauigkeit die Entwicklung der Differential-

quotienten nur bis (4) einschliesslich, weil weiterhin aufser  $\kappa$  noch dessen Differentialquotienten auftreten.

Für  $\kappa$  besteht die früher aufgestellte Formel (3\*) § 3 S. 555, die jetzt besser wie folgt geschrieben wird:

$$\kappa = - \frac{r \partial n}{n \partial h}.$$

Bei der Differentiation von (4) nach  $\gamma$  setzen wir nun

$$\frac{d\kappa}{d\gamma} = \kappa' \quad \text{und} \quad \frac{d^2\kappa}{d\gamma^2} = \kappa'' \quad (1)$$

und erhalten anstatt (5) S. 555:

$$\frac{d^3 r}{d\gamma^3} = r \cot^3 z + \frac{r \cot z}{\sin^2 z} (1 - \kappa) (5 - 2\kappa) - \frac{r \kappa'}{\sin^2 z}, \quad (2)$$

ferner anstatt (6) S. 555:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 r}{d\gamma^4} = & r \cot^4 z + \frac{r \cot^2 z}{\sin^2 z} (1 - \kappa) (18 - 16\kappa + 4\kappa^2) \\ & + \frac{r}{\sin^4 z} (1 - \kappa)^2 (5 - 2\kappa) \\ & - \frac{r \cot z}{\sin^2 z} (10 - 6\kappa) \kappa' \\ & - \frac{r \kappa''}{\sin^2 z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Hiermit wird anstatt (7) S. 555 erhalten:

$$\begin{aligned} h = & s_1 \cot z_1 \left\{ 1 + \frac{\cos^2 z_1 + (1 - \kappa_1) (5 - 2\kappa_1)}{6 \sin^2 z_1} \gamma^2 \right\} \\ & + \frac{1}{2} s_1 \gamma \left\{ + \frac{\frac{\cos^2 z_1 + (1 - \kappa_1)}{\sin^2 z_1} \cos^2 z_1 + (1 - \kappa_1)^2 (5 - 2\kappa_1)}{12 \sin^4 z_1} \gamma^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{\kappa_1'}{3 \sin^2 z_1} \gamma - \frac{(10 - 6\kappa_1) \kappa_1' \cot z_1 + \kappa_1''}{12 \sin^2 z_1} \gamma^2 \right\} \\ & + \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

wobei  $r_1 \gamma = s_1$  gesetzt ist und  $\kappa_1$ ,  $\kappa_1'$  und  $\kappa_1''$  die nachstehende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= - \frac{r_1}{n_1} \left( \frac{\partial n}{\partial h} \right)_1 \\ \kappa_1' &= \left( \frac{d\kappa}{d\gamma} \right)_1 \\ \kappa_1'' &= \left( \frac{d^2\kappa}{d\gamma^2} \right)_1. \end{aligned} \quad (4^*)$$

Anstatt (10) S. 556 ergibt sich:

$$h = s_m \left( 1 + \frac{\gamma^2}{12} \right) \left\{ \begin{aligned} & \cot z_1 \left[ 1 - \frac{1 - 4(1 - \kappa_1)^2}{12 \sin^2 z_1} \gamma^2 \right] \\ & + \frac{1 - \kappa_1}{2 \sin^2 z_1} \left[ \gamma + \frac{1 + 2 \cos^2 z_1}{12 \sin^2 z_1} (1 - 4 \kappa_1 + 2 \kappa_1^2) \gamma^3 \right] \\ & - \frac{\kappa_1'}{6 \sin^2 z_1} \gamma^2 - \frac{6 \kappa_1' (1 - \kappa_1) \cot z_1 + \kappa_1''}{24 \sin^2 z_1} \gamma^3 + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Endlich wird anstatt (6\*) S. 557 erhalten:

$$\begin{aligned} k_1 = \kappa_1 + \frac{2 \kappa_1 - \kappa_1^2}{6} \gamma \cot z_1 + \frac{\kappa_1'}{3} \gamma + \frac{2 \kappa_1' (1 - \kappa_1) \cot z_1 + \kappa_1''}{12} \gamma^2 \\ + \frac{\kappa_1 (1 - \kappa_1) (2 - \kappa_1)}{12 \sin^2 z_1} \gamma^2 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Zur Prüfung kann man in den neuen Formeln setzen:

$$\begin{aligned} \kappa_1' &= r_1 \kappa_1' \cot z_1 \\ \kappa_1'' &= r_1 \kappa_1' \cot^2 z_1 + \frac{r_1 \kappa_1' (1 - \kappa_1)}{\sin^2 z_1} + r_1^2 \kappa_1'' \cot^2 z_1 \end{aligned} \quad (7)$$

und wird die früheren wieder erhalten.

**§ 10. Zusammenstellung der Formeln.** Wir stellen nunmehr die wichtigsten der bisher entwickelten Formeln zusammen, wobei wir uns noch einige Abkürzungen erlauben und zugleich auf die Angaben von Bd. 1 S. 520 Rücksicht nehmen.

Wir bezeichnen die beiden Punkte, welche der Lichtstrahl verbindet, wie bisher mit  $P_1$  und  $P_2$ . Die auf  $P_1$  und  $P_2$  bezogenen Höhen und Lotabweichungen werden durch die Indices 1 und 2 unterschieden, und zwar sei:

- $H$  die Meereshöhe oder Höhe über dem Geoid,
- $\mathfrak{H}$  die Höhe über dem Referenzellipsoid,
- $N = \mathfrak{H} - H$  die Höhe des Geoids über dem Referenzellipsoid in der Lotlinie des betr. Punktes,
- $\xi$  die Abweichung des wahren Zeniths vom ellipsoidischen nach Süden,
- $\eta$  dieselbe nach Westen.

Ferner sei:

- $z'_{1,2}$  die beobachtete Zenithdistanz des Lichtstrahles in  $P_1$ ,
- $z'_{2,1}$  dieselbe in  $P_2$ ,
- $z_{1,2}$  die ellipsoidische, d. h. von Lotabweichung befreite Zenithdistanz des Lichtstrahles in  $P_1$ ,
- $z_{2,1}$  dieselbe in  $P_2$ ,

während Bd. 1 S. 520  $\xi_{1,2}$  und  $\xi_{2,1}$  die ellipsoidischen Zenithdistanzen der Geraden  $P_1 P_2$  bezeichneten; weiter nennen wir wie dort:

- $s_0$  die Entfernung der Punkte im Niveau des Referenzellipsoids,
- $s_m$  die Entfernung in der mittleren Höhe  $\mathfrak{H}$  beider Punkte,

$\varrho_{1,2}$  den Krümmungsradius des Referenzellipsoids in der Vertikalebene  $P_1 P_2$  mit den Azimuten  $\alpha'_{1,2}$  und  $\alpha'_{2,1}$ .

In der 1. Formel (5) S. 520 Bd. 1 für einseitige Messungen dürfen wir nun zuerst nach § 6 S. 563 das Glied  $E_{2,1}$  weglassen. Setzen wir außerdem fest, daß die Entfernung

$$s < 64^{km}, \text{ also } \gamma < 0,01$$

sein soll, so verschwindet sicher auch der Einfluß von  $\frac{\gamma^2}{12}$  in dem Faktor hinter  $s_m$  in der genannten Formel. Dieselbe giebt daher, wenn zugleich für  $\xi_{1,2}$  gesetzt wird  $z_{1,2} + \frac{1}{2} k_1 \gamma$ , die Näherungsformel für einseitige Messung von  $P_1$  aus:

$$h = \mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1 = s_m \cot \left( z_{1,2} - \frac{1 - k_1}{2} \gamma \right) \quad (1)$$

oder ebenso genau

$$h = s_m \cot z_{1,2} + \frac{1 - k_1}{2} \frac{s_m s_0}{\varrho_{1,2} \sin^2 z_{1,2}}, \quad (1^*)$$

wobei in hinreichender Annäherung zu nehmen ist:

$$s_m = s_0 \left( 1 + \frac{\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2}{2 \varrho_{1,2}} \right)$$

$$\gamma = \varrho'' \frac{s_0}{\varrho_{1,2}} \quad \text{in Sek.} \quad (2)$$

$$z_{1,2} = z'_{1,2} + \xi_1 \cos \alpha'_{1,2} + \eta_1 \sin \alpha'_{1,2}.$$

Der Refraktionswinkel in  $P_1$  ist hier zu  $\frac{1}{2} k_1 \gamma$  angesetzt, während wir ihn in Bd. 1 S. 520 zu  $\frac{1}{2} k_1 \gamma'$  annahmen. Die Bedeutung von  $k_1$  ist in beiden Fällen etwas verschieden; für den ersten Fall aber ist sie unseren jetzigen Entwicklungen entsprechend, wobei als Normalform der Luftschichten gleicher Dichte diejenige der Parallelfächen zu einem Referenzellipsoid, welches für die betreffende Gegend einen guten Anschluß gewährt, anzusehen ist. Abweichungen von dieser Normalform infolge der abweichenden Gestalt der Niveauflächen kann man sich mit Abweichungen der Luftschichten aus anderen Gründen kombiniert denken. Die Betrachtung einer anderen Normalform der Luftschichten, die der wirklichen Gestalt der Niveauflächen mehr angepaßt ist, erschien hinsichtlich des Erfolges mit Rücksicht auf anderweite, unvermeidliche Ungenauigkeiten überflüssig; jedenfalls hat der Ausdruck  $\frac{1}{2} k_1 \gamma$  den Vorzug, die Endformel zu vereinfachen.

In den früher abgeleiteten Ausdrücken für  $k_1$  können bedeutende Vereinfachungen mit Rücksicht darauf erfolgen, daß  $\gamma < 0,01$  sein soll,  $h : r$  immer  $< 0,001$  sein wird und  $\alpha$  etwa gleich  $1/7$  ist. Be-

trachten wir speziell die Formel (8) S. 558, so ist einleuchtend, daß hierin  $r_1$  und  $r_m$  ohne weiteres beide gleich  $\varrho_{1.2}$  oder gleich einem mittleren Erdkrümmungsradius  $\varrho$  gesetzt werden dürfen, und daß das Glied  $r_1 \kappa_1' (h : r_m)^2$  unter der zur Brauchbarkeit der Entwicklung notwendigen Annahme:  $\kappa_1' h$  sei ein kleiner Bruch, weggelassen werden kann.

Wir nehmen hiernach im Mittel aus (6\*) und (8) S. 557 u. 558:

$$k_1 = \kappa_1 + \frac{1}{6} \kappa_1' (h + s_m \cot z_{1.2}) + \frac{1}{12} \kappa_1'' h^2 + \dots \quad (3)$$

Diese Näherungsformel gilt bei normaler Luftschichtung für beliebige Lichtstrahlen, dagegen bei anormaler Luftschichtung für lediglich steigende oder fallende Lichtstrahlen. Sie betrachtet  $\kappa$  als Funktion der Höhe; insbesondere ist

$$\kappa_1' = \left( \frac{d\kappa}{dh} \right)_1, \quad \kappa_1'' = \left( \frac{d^2\kappa}{dh^2} \right)_1 \text{ u. s. f.}$$

Für einen beliebigen Punkt des Lichtstrahles in der Höhe  $h$  über  $P_1$  wird somit nach *Taylor's* Satz:

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_1' h + \frac{1}{1.2} \kappa_1'' h^2 + \dots \quad (4)$$

Eine Formel von allgemeinerer Gültigkeit als (3), welche auch für teilweise steigende und fallende (jedoch jedenfalls nur für nahezu horizontale) Lichtstrahlen gilt, ist (6) S. 571, wonach man (unter Ergänzung um ein für später erforderliches, leicht abzuleitendes Glied) hat:

$$k_1 = \kappa_1 + \frac{1}{3} \kappa_1' \gamma + \frac{1}{12} \kappa_1'' \gamma^2 + \frac{1}{60} \kappa_1''' \gamma^3 + \dots \quad (5)$$

Diese Näherungsformel betrachtet  $\kappa$  entlang dem Lichtstrahl als Funktion von  $\gamma$ ; insbesondere ist

$$\kappa_1' = \left( \frac{d\kappa}{d\gamma} \right)_1, \quad \kappa_1'' = \left( \frac{d^2\kappa}{d\gamma^2} \right)_1 \text{ u. s. f.}$$

Für einen beliebigen Punkt im Zentriwinkelabstand  $\gamma$  von  $P_1$  ist somit nach *Taylor's* Satz:

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_1' \gamma + \frac{1}{1.2} \kappa_1'' \gamma^2 + \dots \quad (6)$$

In allen Fällen ist nach (7\*) S. 555 und (4\*) S. 570:

$$\kappa_1 = - \frac{\varrho_{1.2}}{n_1} \left( \frac{\partial n}{\partial h} \right)_1. \quad (7)$$

In diesem Ausdrucke für  $\kappa_1$  soll strenggenommen anstatt  $\varrho_{1.2}$  stehen  $\varrho_{1.2} + \mathfrak{M}_1$ ; jedoch entspricht einerseits die Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}_1$  dem bei den Formeln für  $k_1$  innegehaltenen Genauigkeitsgrade, und es ist andererseits in denjenigen Fällen, wo diese Formeln (5) und (6) zur Anwendung gelangen, eine größere Genauigkeit aus anderen

Gründen gar nicht zu erreichen. Jedoch ist bei der Bildung der Differentialquotienten von  $\kappa$  nach  $h$  von dem strengen Ausdruck

$$\kappa = - \frac{\varrho_{1.2} + \mathfrak{H}}{n} \frac{\partial n}{\partial h} \quad (7^*)$$

auszugehen und  $\partial \mathfrak{H} = \partial h$  zu nehmen. Wird dann im Endwert  $\mathfrak{H}$  wieder vernachlässigt, so findet sich:

$$\varrho_{1.2} \kappa_1' = \kappa_1 + \kappa_1^2 - \frac{\varrho_{1.2}^2}{n_1} \left( \frac{\partial^2 n}{\partial h^2} \right)_1 \quad (8)$$

und

$$\varrho_{1.2}^2 \kappa_1'' = 2\kappa_1^2 (1 + \kappa_1) - \frac{\varrho_{1.2}^2}{n_1} (2 + 3\kappa_1) \left( \frac{\partial^2 n}{\partial h^2} \right)_1 - \frac{\varrho_{1.2}^3}{n_1} \left( \frac{\partial^3 n}{\partial h^3} \right)_1.$$

Für gleichzeitige, gegenseitige Messungen ist nach Bd. 1 S. 520 (6):

$$h = \mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1 = s_m \tan \left( \frac{z_{2.1} - z_{1.2}}{2} + \frac{k_2 - k_1}{4} \gamma \right), \quad (9)$$

oder auch ebenso genau:

$$h = s_m \tan \frac{z_{2.1} - z_{1.2}}{2} + \frac{k_2 - k_1}{4} \frac{s_m^2}{\varrho_{1.2}} \sec^2 \frac{z_{2.1} - z_{1.2}}{2}. \quad (9^*)$$

Dabei ist  $s_m$  und  $\gamma$  wie in (2) zu verstehen; ferner ist:

$$z_{2.1} - z_{1.2} = z'_{2.1} - z'_{1.2} + \left\{ \begin{array}{l} \xi_2 \cos a'_{2.1} + \eta_2 \sin a'_{2.1} \\ - \xi_1 \cos a'_{1.2} - \eta_1 \sin a'_{1.2} \end{array} \right\}. \quad (10)$$

$k_1$  und  $k_2$  kann man hierzu nach (3) bezw. (5) berechnen:  $k_2$  selbstverständlich erst nach vorheriger angemessener Vertauschung der Indices.

Wir führen hier noch die mit Rücksicht auf Bd. 1 S. 520 aus der Gleichung  $\xi_{1.2} + \xi_{2.1} = \gamma + 180^\circ$  leicht ableitbare Relation für die Gesamtrefraktion an:

$$\begin{aligned} \frac{k_1 + k_2}{2} \gamma &= \gamma - (z'_{1.2} + z'_{2.1} - 180^\circ) \\ &\quad - \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 \cos a'_{1.2} + \eta_1 \sin a'_{1.2} \\ + \xi_2 \cos a'_{2.1} + \eta_2 \sin a'_{2.1} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Im Falle einer Anwendung der Formeln wird es sich immer darum handeln, die in den Koeffizienten  $k_1$  bezw.  $k_2$  auftretende GröÙe  $\kappa$  und ihre Derivierten zu bestimmen — entweder aus Temperaturbeobachtungen oder aus den in geeigneter Weise angeordneten Messungen von Zenithdistanzen selbst. Bei allen Verfahren, die in dieser Hinsicht eingeschlagen worden sind, laufen Annahmen unter, die den thatsächlichen Umständen in der Regel nicht genau entsprechen. Leider dürfte es unmöglich sein, ohne dergleichen Annahmen vorzugehen; doch ist selbstverständlich die Zweckmäßigkeit der Annahmen verschieden. Im allgemeinen mag hier nochmals

hervorgehoben werden, daß die Formeln zufolge ihrer Entwicklung eine brauchbare Annäherung nur dann versprechen, wenn  $\kappa$  entlang dem Lichtstrahle nicht zu raschen Änderungen unterliegt.

Zur Beleuchtung der Frage über die Schwankungen in  $\kappa$  betrachten wir im nächsten Paragraphen dessen Abhängigkeit von Lufttemperatur und Luftdruck.

**§ 11. Der Refraktionskoeffizient  $\kappa$  als Funktion von Temperatur und Druck der Luft.** Ist  $\Theta$  die Dichtigkeit der Luft für den auf 0° reduzierten Stand  $b$  des Quecksilberbarometers bei der Schwerebeschleunigung  $g$  und für eine Temperatur gleich  $t^0$  der hundertteiligen Skala, und gehört hierzu der Brechungsindex  $n$  beim Übergang aus dem leeren Raum in die Luft, so hat man für zwei verschiedene Wertsysteme einesteils nach dem *Aragoschen* Gesetz:

$$n - 1 = (n_0 - 1) \frac{\Theta}{\Theta_0}, \quad (1)$$

andernteils nach dem *Mariotte-* und *Gay-Lussacschen* Gesetz, indem der Ausdehnungskoeffizient der Luft gleich 0,003665 ist:

$$\frac{\Theta}{\Theta_0} = \frac{bg}{b_0g_0} \cdot \frac{1 + 0,003665 t_0}{1 + 0,003665 t}, \quad (2)$$

wenn beachtet wird, daß der hydrostatische Druck der Höhe der Flüssigkeitssäule und der Schwerkraft proportional ist. Es wird daher

$$n - 1 = (n_0 - 1) \frac{bg}{b_0g_0} \frac{1 + 0,003665 t_0}{1 + 0,003665 t}, \quad (3)$$

oder, wenn man die sogenannte absolute Temperatur

$$\frac{1}{0,003665} + t, \text{ d. i. } 272,8 + t \text{ oder abgerundet } 273 + t, \text{ mit } T' \quad (4)$$

bezeichnet und einführt:

$$n - 1 = (n_0 - 1) \frac{bg T_0}{b_0g_0 T'}. \quad (5)$$

Diese Formel hat man nur als Näherungsformel anzusehen, die aber für unsere Zwecke ausreicht. Denn obwohl die Untersuchungen der Physiker über die Abhängigkeit des Brechungsindex von Druck und Temperatur noch nicht als abgeschlossen zu bezeichnen sind, so beweisen sie doch die starke Annäherung der Formel (5) an die Thatsachen. Früher setzte man  $n^2 - 1$  proportional der Dichtigkeit;  $n - 1$  scheint etwas besser, führt aber in der Theorie der terrestrischen Refraktion zu keinen nennenswerten Änderungen.

Die Relation (5) entspricht nicht nur der trockenen Luft, sondern auch der feuchten Luft, wie schon *Laplace* bemerkt. Der Wasserdampf hat zwar bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur geringere Dichtigkeit als trockene Luft, jedoch nahezu dasselbe Brechungsvermögen.



Im Mittel nach *Bessels* Bestimmungen aus Refraktionsbeobachtungen von *Bradley* und ihm selbst sowie den experimentellen Bestimmungen der Physiker kann man setzen

$$n_0 = 1,000293 \text{ für } b_0 = 760^{\text{mm}} \text{ und } T_0 = 273.$$

Die Schwerkraft  $g_0$  ist hierbei annähernd diejenige für  $45^\circ$  geogr. Breite im Meeresniveau, welche wir bereits mit  $\Theta$  bezeichnet haben. Es wird somit

$$n = 1 + 0,000293 \frac{273 \, b g}{760 \, T \Theta}. \quad (6)$$

Hieraus folgt,  $n$  als Funktion der Höhe  $h$  über einem beliebigen Horizont betrachtet:

$$\frac{\partial n}{\partial h} = 0,000293 \frac{273 \, b g}{760 \, T \Theta} \left\{ \frac{\partial b}{b \partial h} + \frac{\partial g}{g \partial h} - \frac{\partial T}{T \partial h} \right\}$$

und nach (7) § 10 S. 573:

$$x = \varrho \frac{0,000293 \frac{273 \, b g}{760 \, T \Theta} \left\{ \frac{\partial T}{T \partial h} - \frac{\partial b}{b \partial h} - \frac{\partial g}{g \partial h} \right\}}{1 + 0,000293 \frac{273 \, b g}{760 \, T \Theta}}, \quad (7)$$

wobei  $\varrho$  den Krümmungsradius des Erdellipsoids im betreffenden Azimut vorstellt und der Nenner ohne wesentlichen Schaden gleich 1 gesetzt werden kann.

Der in dieser Formel auftretende Quotient  $\partial b : b \partial h$  muß aus der Differentialformel für barometrisches Höhenmessen entnommen werden. Von der Bewegung der Luft abgesehen, ist nach den Lehren der Hydrostatik in Strenge

$$- \partial p = \Theta g \partial h, \quad (8)$$

wenn an der Stelle  $\partial h$  die Schwerkraft gleich  $g$  und der Druck der Luft für die Flächeneinheit (in einem von der Schwerkraft unabhängigen Maße) gleich  $p$  ist. Bezeichnet  $q$  die Dichtigkeit des Quecksilbers, so kann man entsprechend setzen:

$$p = b g q. \quad (9)$$

Alsdann wird

$$\frac{\partial p}{p \partial h} = \frac{\partial b}{b \partial h} + \frac{\partial g}{g \partial h}$$

und mit Rücksicht auf (8):

$$\frac{\partial b}{b \partial h} + \frac{\partial g}{g \partial h} = - \frac{\Theta}{b q}. \quad (10)$$

Nach *Regnault* ist im Vergleiche zu Wasser größter Dichtigkeit für Quecksilber von  $0^\circ$  Temperatur

$$q = 13,596$$

und für trockene Luft von  $0^\circ$  Temperatur bei  $760^{\text{mm}}$  Stand des Quecksilberbarometers, gemessen in Paris (mit  $48^\circ 50'$  geogr. Breite und  $60^{\text{m}}$  Meereshöhe)

$$\Theta = 0,00129319^*).$$

Man hat daher für trockene Luft in der geographischen Breite  $B$  und der Meereshöhe  $H$  bei  $b^{\text{mm}}$  Stand des Quecksilberbarometers und bei der Temperatur  $t^\circ$  der hundertteiligen Skala, oder der absoluten Temperatur  $T$ :

$$\frac{\Theta}{q} = \frac{0,00129319}{13,596} \cdot \frac{b}{760} \cdot \frac{273}{T} \cdot \frac{1 - 0,00265 \cos 2B - \frac{2H}{\varrho}}{1 - 0,00265 \cos 97^\circ 40' - \frac{120}{\varrho}}. \quad (11)$$

Ist aber die Luft feucht und die Spannkraft des in ihr enthaltenen Wasserdampfes gleich  $e$ , so ist  $\Theta$  geringer, weil die Dichtigkeit des Wasserdampfes nur 0,623 derjenigen der Luft unter sonst gleichen Umständen beträgt. Bezieht man nun linker Hand in (11)  $\Theta : q$  auf feuchte Luft, so ist rechter Hand der Faktor

$$1 - 0,377 \frac{e}{b} \quad \text{oder sehr nahe} \quad 1 - \frac{3e}{8b} \quad (11^*)$$

anzubringen. Mithin ergibt sich endlich nach (10), wenn zugleich  $\partial h$  nicht wie  $b$  in Millimetern, sondern wie  $\varrho$  in Metern genommen wird:

$$\frac{\partial b}{b \partial h} + \frac{\partial g}{g \partial h} = - \frac{1 - \frac{3e}{8b}}{10517 \cdot 0,760} \cdot \frac{273}{T} \left( 1 - 0,00265 \cos 2B - \frac{2H}{\varrho} \right),$$

und hiermit folgt aus (7):

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= 0,000293 \frac{b}{760} \frac{273}{T} \frac{g}{\Theta} \varrho F \\ \text{mit} \\ F &= \frac{\tau}{T} + \frac{1 - \frac{3e}{8b}}{7993} \frac{273}{T} \frac{g}{\Theta} \\ \text{und} \\ \frac{g}{\Theta} &= 1 - 0,00265 \cos 2B - \frac{2H}{\varrho} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Hierin ist  $\varrho$  der Krümmungsradius des Erdellipsoides in dem betreffenden Azimut,  $H$  die Meereshöhe,  $B$  die geographische Breite,  $b$  der auf  $0^\circ$  reduzierte Stand des Quecksilberbarometers in Millimetern,  $T$  die absolute Temperatur der Luft  $= 273 + t^\circ$  der Centesimalskala,  $\tau$  die Änderung derselben für  $1^{\text{m}}$  Höhe und  $e$  die Spannung des Wasserdampfes in Millimetern Quecksilbersäule\*\*).

\*) *Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde, Stuttgart 1877, Bd. 1 S. 490 u. ff.

\*\*) Die Formel für  $\kappa$  stimmt im wesentlichen überein mit *Jordan*, a. a. O. S. 566.

Zur Übersicht berechnen wir einige Werte von  $\kappa$ , wobei wir die Luft zu  $\frac{2}{3}$  mit Wasserdampf gesättigt annehmen, sowie  $\rho = 6370000$ ,  $H = 0$  und  $B = 45^\circ$  setzen:

$b$	$e$	$T'$	100 $\tau$ , d. i. die Änderung der Lufttemp. nach oben für 100 <sup>m</sup> in hundertteiligen Graden gleich						
			$-3^\circ$	$-2^\circ$	$-1^\circ$	$0^\circ$	$+1^\circ$	$+2^\circ$	$+3^\circ$
760 <sup>mm</sup>	6 <sup>mm</sup>	283 <sup>o</sup>	0,026	0,089	0,153	0,217	0,280	0,344	0,407
660	4,3	278	0,023	0,080	0,137	0,195	0,252	0,309	0,366
560	3	273	0,021	0,071	0,121	0,172	0,222	0,272	0,322

§ 12. Die Veränderlichkeit von  $\kappa$  zeitlich und räumlich. Die kleine Tabelle zeigt zweierlei: 1. daß der Refraktionskoeffizient  $\kappa$  unter Voraussetzung konstanter Temperaturabnahme nach oben hin abnimmt und zwar unter mittleren Verhältnissen, wobei die Temperaturabnahme  $0,58^\circ$  für 100<sup>m</sup> Erhebung beträgt, um

$$0,016 \text{ für } 1000^m. \quad (1)$$

Denn es ist in diesem Falle:

$$\begin{array}{lll} \kappa = 0,180 & \text{für } H = & 0^m \\ & 0,161 & „ \quad 1150 \\ & 0,142 & „ \quad 2500. \end{array}$$

Sie zeigt zweitens, daß die Größe der Temperaturabnahme den Koeffizienten  $\kappa$  sehr stark beeinflusst, und zwar entsteht eine Verminderung desselben um rund

$$0,006 \text{ für } 0,1^\circ \quad (2)$$

Zuwachs der Temperaturabnahme auf 100<sup>m</sup> Erhebung.

Die Temperaturabnahme mit der Höhe ist nach *Hann*\*) auf der Erdoberfläche bis zu  $60^\circ$  geographischer Breite durchschnittlich wie

Eine ebenfalls mit (12) wesentlich übereinstimmende Formel gab 1855 *Baeyer* in den *Astronom. Nachr.* Bd. 41 Nr. 980 S. 320 (34) gelegentlich einer längeren theoretischen Entwicklung über die terrestrische Refraktion.

*Baeyer* illustriert die Formel durch Tabellen und fügt u. a. ausführliche Erläuterungen über Bestimmung der Lufttemperatur durch Refraktionsbeobachtungen bei.

Im 71. Bd. der *Astronom. Nachr.* Nr. 1695 S. 228 stellt 1868 *Erman*, an eine Formel der *Méc. cél.* anknüpfend, ebenfalls eine Formel für  $\kappa$  auf, um mit Hilfe derselben die Temperaturabnahme in den Luftschichten in der Nähe der Ostseeküste zu studieren. Für den betreffenden Fall giebt diese Formel wesentlich dasselbe wie (12).

\*) *J. Hann*, Handbuch der Klimatologie, Stuttgart 1883, S. 153 u. ff.

bemerkt gleich  $0,58^{\circ}$  für  $100^m$  oder gleich  $1^{\circ}$  für  $172^m$  Erhebung anzunehmen. *Bauernfeind*\*) fand bis auf ein paar Meter denselben Wert; er nimmt auch eine geringe Änderung mit der geographischen Breite an; allein dieselbe ist nicht sicher konstatiert und nach *Hann* nicht nachweisbar.

Die Temperaturabnahme mit der Höhe unterliegt Veränderungen aus mehreren Gründen. Sie ändert sich mit der Jahreszeit und beträgt nach *Hann* für Mitteleuropa (Harz, Erzgebirge und Alpen) durchschnittlich für  $100^m$  im

Frühling	Sommer	Herbst	Winter	Mittel
$0,67^{\circ}$	$0,70^{\circ}$	$0,53^{\circ}$	$0,45^{\circ}$	$0,59^{\circ}$
oder $1^{\circ}$ für eine Erhebung um				
$149^m$	$143^m$	$188^m$	$222^m$	$170^m$

Sie ändert sich ferner lokal durchschnittlich von  $0,4^{\circ}$  bis  $0,8^{\circ}$ ; sie ist z. B. auf der Nordseite der schweizer Alpen  $0,69$ , auf der Südseite  $0,55$ . Über Thälern findet häufig anstatt einer Abnahme eine Zunahme statt; eine solche wird auch oftmals bei Barometermaxima im Winter beobachtet.

Die größten und raschesten Variationen der Temperatur zeigt zeitlich und räumlich die Luftschicht am Erdboden. So fand *Wild*. 1872—1874\*\*) im Mittel die Temperatur in  $16^m$  und  $26^m$  Höhe über dem Boden größer als in  $2^m$  Höhe um die folgenden Beträge:

	April bis September			Winter
	8 <sup>h</sup>	1 <sup>h</sup>	8 <sup>h</sup>	1 <sup>h</sup>
16 <sup>m</sup>	— 0,27 <sup>o</sup>	— 0,40 <sup>o</sup>	+ 0,30 <sup>o</sup>	+ 0,07 <sup>o</sup>
26 <sup>m</sup>	— 0,36	— 0,42	+ 0,50	+ 0,06

Ferner fand *Becquerel* 1875\*\*\*) in  $20^m$  mehr als in  $2^m$  Höhe:

	Morgens			Mittags	Nachmittags			Nachts
	3 <sup>h</sup>	6 <sup>h</sup>	9 <sup>h</sup>	12 <sup>h</sup>	3 <sup>h</sup>	6 <sup>h</sup>	9 <sup>h</sup>	12 <sup>h</sup>
März—Mai	+0,6 <sup>o</sup>	+0,3 <sup>o</sup>	—0,3 <sup>o</sup>	—0,7 <sup>o</sup>	—0,6 <sup>o</sup>	+0,2 <sup>o</sup>	+0,4 <sup>o</sup>	+0,4 <sup>o</sup>
Juni—Aug.	+0,7	+0,3	—0,5	—0,8	—0,4	+0,4	+0,6	+0,5
September	+1,3	+0,3	—0,3	—0,9	—1,0	+0,6	+0,7	+0,7
Jahresdurchschnitt	.	—0,53	—0,28	.	—0,34	.	.	.

\*) *C. M. v. Bauernfeind*, Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen und die Veränderungen der Temperatur und Feuchtigkeit der Atmosphäre. München 1862. S. 120.

\*\*) Zeitschrift d. österreich. Gesellsch. f. Meteorologie 1876 Bd. 11 S. 205.

\*\*\*) Ebenda S. 284.

Hiernach sind tägliche Variationen von  $\alpha$  in der Luftschicht zwischen 2<sup>m</sup> und 20<sup>m</sup> Höhe im Betrage von  $-0,1$  mittags bis  $+0,5$  nachts die Regel.

In der That sind wiederholt (und auch vom Verfasser bei einer längeren Beobachtungsreihe im Jahre 1862) an Lichtstrahlen, welche diese Luftschicht in größerer Ausdehnung durchstrichen, dergleichen Werte von  $\alpha$  beobachtet worden. In der Regel jedoch fallen die aus Zenithdistanzmessungen berechneten Variationen in  $\alpha$  geringer aus. Denn indem brauchbare und für mäßige Entfernungen und Höhendifferenzen nach der Hypothese der Kreisform des Lichtstrahles berechenbare Höhenbestimmungen sich erfahrungsmäßig nur dann ergeben, wenn der Lichtstrahl die in Rede stehende Luftschicht mindestens im größeren Teile seines Laufes verläßt, werden sich die auf diese Weise ermittelten  $\alpha$  meist im Durchschnitt auf etwas größere Abstände vom Terrain als 20<sup>m</sup> beziehen. Man hat für dieselben auch eine ziemlich regelmäßige Durchschnitts-Abhängigkeit von der Tageszeit konstatiert, wobei man nach dem Vorgange von *Bacyer* die letztere, vom wahren Mittag abgerechnet, in Bruchteilen des halben Tagesbogens der Sonne, d. h. der halben Zeit von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang, ausdrückte, um verschiedene Jahreszeiten mit einander in Beziehung bringen zu können. \*) Während *Bacyer*  $\alpha$  der Zeit  $\mathcal{T}$  proportional setzt, ergab eine gelegentlich der Triangulierung von Mecklenburg angestellte Untersuchung zahlreichen Beobachtungsmateriales die für die Sommermonate gültige Interpolationsformel:

$$\alpha = 0,174 + 0,075 \sin(268^{\circ}34' + \mathcal{T}^{\circ}),$$

worin  $\mathcal{T}^{\circ}$  proportional  $\mathcal{T}$  und für  $\mathcal{T} = 1$  gleich  $90^{\circ}$  zu setzen ist. \*\*) Nach *Hartl* genügt ebenso der Ausdruck:

$$\alpha = 0,100 + 0,077 \mathcal{T}^2.$$

*Hartl* hat noch anderes Material untersucht; darnach bestätigen sich die in Mecklenburg gefundenen Resultate für Norddeutschland im großen und ganzen. \*\*\*) Im Hinblick auf eine Anwendung der

\*) *Astronom. Nachr.* 1837 Bd. 14 Nr. 317 S. 70.

\*\*) *Großherzoglich mecklenburgische Landesvermessung.* Teil I. Schwerin 1882; S. 240.

Die Entfernung schwankte innerhalb ziemlich enger Grenzen um 17<sup>km</sup> herum. Zur Berechnung von  $\alpha$  wurde, wie dies immer bei gleichzeitigen, gegenseitigen Messungen geschieht, die aus (11) § 10 S. 574 folgende Näherungsformel benutzt:

$$\alpha = 1 - \frac{z'_{1,2} + z'_{2,1} - 180^{\circ}}{\gamma}.$$

\*\*\*) *Mitteilungen des k. k. militär-geogr. Instituts in Wien.* 3. Bd. 1883.

Verfasser verspricht, seine Untersuchungen auch auf die österreichischen Alpenländer auszudehnen.

Interpolationsformel zur Berechnung von  $\kappa$  für Zwecke einer einseitigen Höhenbestimmung muß man aber bedenken, daß die beobachteten  $\kappa$  obgleich sie meistens Mittelwerte für eine Stunde Zeitraum darstellen, gegen diese Formel den mittleren Fehler  $\pm 0,018$  zeigen, sodaß die rechnerische Bestimmung recht unsicher wird, auch wenn die für die GröÙe der Refraktion in betracht kommenden Verhältnisse der Beobachtungen denen der mecklenburgischen Beobachtungen im allgemeinen gleich sind. Die Ursachen der Unsicherheit sind die Verschiedenheiten in dem Abstand des Lichtstrahles vom Terrain, in der Kultur des letzteren und in den Bestrahlungsverhältnissen desselben, wodurch eine ungleichartige Verteilung der Wärme in der Luft bedingt wird.

Über die Änderung der Wärmeabnahme mit der Höhe nach oben hin geben folgende, von *Hann* aus *Glaishers* Beobachtungen von 1869 im *Ballon captif* (Zeitschr. d. österr. Ges. f. Met. 1879 Bd. 14 S. 475) abgeleitete Zahlen Auskunft:

25. Mai — 28. Juli 1869. Abnahme für 100<sup>m</sup>.

1) Im Mittel für 3 <sup>h</sup> — 7 <sup>h</sup> bzw. . . . . .	3 <sup>h</sup> — 7,5 <sup>h</sup>
Höhe: 0 <sup>m</sup> 60 <sup>m</sup> 120 <sup>m</sup> 180 <sup>m</sup> 240 <sup>m</sup> <u>300<sup>m</sup></u> 500 <sup>m</sup>	
heiter:            1,50 <sup>o</sup> 1,13 <sup>o</sup> 0,95 <sup>o</sup> 0,79 <sup>o</sup> 0,70 <sup>o</sup> 0,77 <sup>o</sup>	
trübe:            1,40            1,10            0,79            0,82            0,80            0,58	

2) Im Mittel für 30<sup>m</sup> — 300<sup>m</sup> Höhe

Stunde: 10—11 <sup>h</sup> vorm.    3 <sup>h</sup> 4 <sup>h</sup> 5 <sup>h</sup> 6 <sup>h</sup> 7 <sup>h</sup> 7,5 <sup>h</sup> nachm.	
heiter:            1,40 <sup>o</sup> 1,07 <sup>o</sup> 0,97 <sup>o</sup> 0,89 <sup>o</sup> 0,80 <sup>o</sup> 0,49 <sup>o</sup>	
trübe:            —                    1,02 0,83 0,95 0,86 0,86 .	

*Hartl* findet letztere Durchschnittszahlen mit den beobachteten Refraktionskoeffizienten  $\kappa$  in guter Übereinstimmung (bis auf 0,1<sup>o</sup>).

Trotzdem die Zahlen Mittelwerte aus 28 Fahrten sind, zeigt sich eine keineswegs regelmäßige Abnahme der Temperatur mit der Höhe. Daß eine solche selbst in größerer Höhe über dem Erdboden nur im rohen Durchschnitt stattfindet, zeigt ein Blick auf die Ergebnisse aller Luftfahrten. Man vergl. z. B. *Joh. Müller*, Lehrbuch der kosmischen Physik, 1875, Tab. 17 und S. 514. Wir beschränken uns hier auf die Mitteilung einiger Beobachtungen bei *Tissandiers* Luftfahrt am 29. Nov. 1875 gegen Mittag,\*) wonach sich die Temperatur fand:

- bis 700<sup>m</sup> Höhe gleich — 2<sup>o</sup>, von da
- bis 1500<sup>m</sup> „ „ — 3 bis — 4<sup>o</sup> (weißl. opalis. Wolken),
- bei 1650<sup>m</sup> „ „ null (Eiskrystalle),
- bei 1770<sup>m</sup> „ „ + 1<sup>o</sup>.

\*) *Comptes rendus* 1876 Bd. 81 S. 1216.

Hiernach erleidet  $\alpha$  auch in größeren Höhen wegen des unregelmäßigen Verlaufes der Temperatur beinahe sprungweise Änderungen im Betrage von 0,1 bis 0,2, d. h. fast um seinen ganzen normalen Betrag.

Die Ursache der starken Temperaturänderung in der Nähe des Erdbodens ist der Erdboden selbst, welcher durch Strahlung Wärme teils von der Sonne aufnimmt, teils in den Weltraum abgibt und durch Leitung seine Temperatur der benachbarten Luft mitteilt. In größerer Höhe über dem Erdboden ist die wesentlichste Ursache der Unregelmäßigkeiten die Kondensation des Wasserdampfes. In einer ruhenden, von außen thermisch nicht beeinflussten, trockenen Atmosphäre würde nach der mechanischen Wärmetheorie für 100<sup>m</sup> die Temperatur sehr nahe um 1° abnehmen. Ist Wasserdampf in der Luft, so tritt bei wachsender Höhe eine allmähliche Kondensation desselben ein, weil mit der Temperatur zugleich der Sättigungsgehalt abnimmt. Bei der Kondensation wird aber Wärme frei; die Temperaturabnahme in der feuchten Atmosphäre ist daher eine langsamere wie in der trockenen, und wenn aus irgend welchen Gründen die Kondensation des Wasserdampfes nicht allmählich, sondern stellenweise plötzlich erfolgt, so kann es geschehen, daß die Temperaturänderung mit der Höhe aus einer Abnahme stellenweise ziemlich plötzlich in eine Zunahme übergeht.\*)

### § 13. Fortsetzung: Bauernfeinds Beobachtungsreihe von 1877—1880.

Von der Empfindlichkeit des Refraktionskoeffizienten gegen lokale Verhältnisse giebt einen sehr interessanten und augenfälligen Beweis eine Beobachtungsreihe, welche *Bauernfeind* auf der westöstlichen, 48<sup>km</sup> langen Linie *Döbra-Kapellenberg* des bayerischen Gradmessungsnetzes zu allen Tageszeiten hat anstellen lassen\*\*). *Döbra* liegt 30<sup>m</sup> über *Kapellenberg*, das Profil zwischen beiden, in 780<sup>m</sup> mittlerer Meereshöhe gelegenen Punkten fällt ziemlich steil an beiden Enden um etwa 130<sup>m</sup> ab; einzelne Kuppen des Profils liegen zwar etwas höher, aber doch noch 100<sup>m</sup> unter der Lichtlinie. In Bezug auf die nähere Umgebung der Stationen ist Folgendes zu bemerken:

1. *Kapellenberg*. Das Terrain fällt bis 1000<sup>m</sup> Entfernung ziemlich gleichmäßig um 50<sup>m</sup>. Der Gipfel ist kahl, die Hänge sind mit jungem Fichtenbestand bedeckt. Die Pfeilerhöhe beträgt 5<sup>m</sup>.

2. *Döbra*. Das Terrain fällt bis 450<sup>m</sup> Distanz ziemlich gleichmäßig um 50<sup>m</sup>. Es ist bewaldet; der Wald überragt den 3<sup>m</sup> hohen

\*) Über diese Verhältnisse und weitere diesbezügliche Litteratur vergleiche *A. Ritter*, Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische Probleme, Hannover 1879, S. 1 bis 8 (aus *Wiedemanns Annalen* 1878 B. 5, S. 413).

\*\*) Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion. (Abhandl. der kön. bayer. Akad. d. Wissensch. 2. Cl. 1880 Bd. 13. 3. Abt.)



Pfeiler, doch ist im Umkreis von 20<sup>m</sup> aller Wald weggeschlagen, nach Ost bis 80<sup>m</sup> Entfernung.

Die Messungen erfolgten in den Jahren 1877 bis 1880 hauptsächlich in den Monaten Mai, Juni, August und September. *Bauernfeind* berechnet aus ihnen nach seiner Theorie die Höhen einseitig (und ohne Rücksicht auf Lotabweichung); da nun diese Theorie eine regelmäßige Schichtung der Luft nach der Höhe voraussetzt, so ist wegen der fast gleichen Höhe beider Punkte das Mittel der einseitigen Berechnungen für die Höhendifferenz aus den im grossen und ganzen beiderseits gleichzeitig erfolgten Messungen im wesentlichen als frei von der besonderen Form der Theorie der Refraktion zu betrachten. Nach der der Abhandlung beigegebenen graphischen Darstellung finden wir für  $H_2 - H_1$  trigonometrisch bzw.  $H_2 - H_1$  barometrisch *mehr* als das Präzisionsnivellement gab die Zahlenwerte umstehender Tabelle.

Die trigonometrischen Werte zeigen ebenso wie die barometrischen eine tägliche Periode. Die Ursache derselben für die barometrischen Messungen ist (nach *Bauernfeind*) bekanntlich diese, daß das Stationsthermometer nicht die Temperatur der höheren Luftschichten giebt. Während die Angaben dieser Thermometer starke Variationen im Laufe des Tages zeigen, sind dieselben in der Regel in grösseren Höhen gering, kaum 1 bis 2°.

Die Ursache der täglichen Periode der Ergebnisse der trigonometrischen Messungen kann infolge der nahezu gleichen Höhe beider Stationen nur die durch lokale Verhältnisse erzeugte unsymmetrische Form des Lichtstrahles zu beiden Stationen sein: Station *Kapellenberg* liegt frei, *Döbra* dagegen im Walde; ferner haben die Profilsseiten bei *Döbra*, im Westen, und bei *Kapellenberg*, im Osten, gegen die Sonne einen verschiedenen Stand.

In der Nähe derjenigen Zeiten, wo die barometrischen Messungen gegen das Präzisionsnivellement die Differenz null geben, wo man also erwarten muß, daß die Luftschichtung einigermaßen frei von lokalen Abweichungen sein wird, gehen auch die trigonometrischen Differenzen durch null hindurch. Der wahre Wert von  $H_2 - H_1$  kann zwar von dem Ergebnis des Präzisionsnivellements in Bezug auf welches dieselben gebildet sind, etwas abweichen, doch wird sehr wahrscheinlich auch er in der Nähe dieser Zeiten von den Messungen gegeben werden.\*)

Die Tabelle zeigt noch, daß zu den barometrisch günstigsten Zeiten sich die trigonometrischen Werte und somit auch die Refraktionen und Temperaturen in der Nähe des Terrains sehr rasch ändern. Es ist dieses ein ungünstiger Umstand für die Benutzung dieser Zeiten.

---

\*) Vergl. hierzu den Schlusssparagraphen dieses Kapitels, wo auch erörtert werden wird, inwieweit barometrisches und geometrisches Nivellement zu vergleichbaren Werten führen.



		Trigonometr.	Barometr.
		$\varphi_2 - \varphi_1$	$H_2 - H_1$
Vormittags	7	+ 2,6 <sup>m</sup>	+ 0,2 <sup>m</sup>
	8	+ 4,2	+ 1,5
	9	+ 3,6	+ 1,7
	10	+ 4,6	+ 1,6
	11	+ 5,6	+ 3,3
	12	+ 5,0	+ 3,1
Nachmittags	1	+ 5,0	+ 3,8
	2	+ 4,6	+ 2,3
	3	+ 4,0	+ 3,2
	4	+ 3,0	+ 1,6
	5	+ 3,4	+ 2,1
	6	+ 3,0	+ 1,3
	7	+ 3,2	+ 0,4
	8	— 1,6	0,0
	9	— 3,6	— 2,4
	10	— 3,9	— 0,9
	11	— 2,2	— 2,0
	12	— 3,0	— 0,4
Vormittags	1	— 2,6	— 2,0
	2	— 4,2	— 2,6
	3	— 5,0	— 1,0
	4	— 5,6	— 1,5
	5	— 4,8	— 1,9
	6	— 1,0	— 1,1
Mittel		+ 0,60	+ 0,43

§ 14. Bauernfeinds Refraktionstheorie. Ehe wir an der Hand der bisherigen Aufstellungen dazu übergehen, die Methoden zu besprechen, die nach unserer Ansicht zur trigonometrischen Höhenmessung zu empfehlen sind, haben wir den Blick auf die bisherigen Leistungen zu richten.

Obwohl Laplace zu Anfang dieses Jahrhunderts die mathematische Behandlung der Refraktion angebahnt hatte, beschränkte man sich doch lange Zeit auf die Annahme einer Kreisbogengestalt für den Lichtstrahl, wahrscheinlich weil man die allerdings sehr zutreffende Ansicht hatte, daß es schwierig, ja unmöglich sei, den thatsächlichen

Refraktionsverhältnissen durch die Theorie zu folgen. Jedoch nahm man an, daß die Krümmung des Kreisbogens zeitlich veränderlich sei und beobachtete daher hauptsächlich nach der Methode gegenseitiger, gleichzeitiger Zenithdistanzmessungen. Die Abweichungen von der Kreisbogengestalt glaubte man durch Auswahl günstiger Profile vermeiden zu können.

Zu Anfang der sechziger Jahre wurde aber von mehreren Seiten versucht, sich durch die Theorie den thatsächlichen Verhältnissen mehr zu nähern\*), in Deutschland 1866 durch *Bauernfeind* im Anschluß an seine epochemachenden Untersuchungen über das barometrische Höhenmeßverfahren. Indem *Bauernfeind* gelegentlich dieser Untersuchungen zahlreiche Beobachtungen von sich und anderen diskutierte, fand er, daß die Temperatur in der Atmosphäre mit zunehmender Höhe in arithmetischer Progression abnimmt und daß sie dabei der sechsten Wurzel des Luftdruckes proportional ist, wenn sie vom absoluten Nullpunkt aus gezählt wird\*\*). Dieses Gesetz für die durchschnittliche Konstitution der Atmosphäre legte *Bauernfeind* nun auch der Refraktionstheorie zu grunde.

Zur Erläuterung desselben stellen wir folgende Betrachtung an. Wir verstehen unter der Höhe  $u$  der Atmosphäre über einem Punkt die Höhe über demselben bis zu der Stelle, wo die absolute Temperatur null ist. Nach der Hydrostatik wird alsdann (vergl. auch § 11 (8) S. 576):

$$dp = \Theta g du, \quad (1)$$

worin  $dp$  die zu  $du$  gehörige Druckzunahme bei der Luftdichtigkeit  $\Theta$  und der Schwerkraft  $g$  bezeichnet. Da nun nach dem *Mariotte-* und *Gay-Lussacschen* Gesetz (vergl. auch § 11 S. 575)

$$\Theta = \Theta_0 \frac{p T_0}{p_0 T} \quad (2)$$

zu setzen ist, worin  $\Theta_0$ ,  $T_0$ ,  $p_0$  ebenso wie  $\Theta$ ,  $T$ ,  $p$  zusammengehörige Werte sind, so wird

$$\frac{dp}{p} = \frac{\Theta_0 T_0}{p_0 T} g du. \quad (3)$$

Nimmt man jetzt an, daß  $T$  sich nach oben hin gleichmäßig vermindert und daß daher

$$T = u \tau \quad (4)$$

gesetzt werden kann, wobei die Konstante  $\tau$  nach *Hann* (§ 12 S. 578) gleich  $1/172$  ist, so folgt

---

\*) Hierher ist auch die oben erwähnte Abhandlung *Baeyers* zu rechnen; dieselbe scheint aber ohne praktische Konsequenzen geblieben zu sein.

\*\*) *C. M. v. Bauernfeind*, Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen etc.

$$\frac{dp}{p} = c \frac{du}{u} \quad \text{für} \quad c = \frac{\Theta_0 T_0 g}{p_0 \tau}. \quad (5)$$

Hiernach wird, abgesehen von der geringen Veränderlichkeit von  $g$  mit der Höhe:

$$u = ap^{\frac{1}{c}}, \quad (6)$$

wobei  $a$  eine Integrationskonstante vorstellt. Aus (6) und der Annahme  $T = u\tau$  folgen für zwei Punkte derselben Lotlinie mit Rücksicht auf die modifizierte Relation (2):

$$\Theta_1 T_1 p_2 = \Theta_2 T_2 p_1,$$

die Proportionen:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1^{\frac{1}{c}}}{p_2^{\frac{1}{c}}} = \frac{\Theta_1^{\frac{1}{c-1}}}{\Theta_2^{\frac{1}{c-1}}}. \quad (7)$$

*Bauernfeind* untersucht zunächst an der Hand der Beobachtungen die Proportionalität von  $p$  und  $T^c$  und findet  $c = 6$ ; sodann untersucht er die Gleichung

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{u_1}{u_2} \right)^{k'}$$

und findet  $k'$  sehr nahe gleich 1,  $u$  für das Meeresniveau rund gleich  $51400^m$ .

Nach unserer Aufstellung der Gleichungen (1) bis (7), die von der bezüglichen *Bauernfeindschen* verschieden ist, *bedingt* die Proportionalität von  $T$  zu  $u$  die Existenz der Proportionalität von  $p$  und  $T^c$ . Kennt man erst die Atmosphärenhöhe, so kann man dann auch  $c$  nach (5) berechnen:

$$c = \frac{\Theta_0 T_0 g}{p_0 \tau}. \quad (8)$$

Nehmen wir an, daß für  $u = 51400^m$  die Temperatur  $T = 298^\circ$  sei, so wird  $1 : \tau = 172$ , wie oben angegeben. Der Wert  $T = 298^\circ$ , entsprechend einer Temperatur der hundertteiligen Skala von  $25^\circ$ , ist allerdings wohl als Durchschnittstemperatur im Meeresniveau zu groß, aber der für  $u$  im Meeresniveau angegebene Wert ist auch sehr unsicher. Behalten wir also  $1 : \tau = 172$  bei und setzen nach (11) und (9) § 11 S. 577 u. 576

$$\Theta_0 = \frac{0,001293}{13,6} g \quad \text{für} \quad T_0 = 273$$

und

$$p_0 = 0,760 g g,$$

so folgt

$$c = 5,90,$$

völlig mit *Bauernfeinds* Wert für  $c$  innerhalb der Genauigkeit desselben übereinstimmend.

Bei der vorstehenden Theorie kommt übrigens gar nicht in betracht, welches die ganze Höhe der Atmosphäre wirklich ist\*). Sie tritt lediglich als ein geeignetes Maß für die Temperaturabnahme mit der Höhe in den unteren Luftschichten auf.

§ 15. Fortsetzung; kritische Bemerkungen. Bei den weiteren Entwicklungen nimmt *Bauernfeind*  $n^2 - 1$  proportional zu  $\Theta$ ; er setzt also für einen beliebigen Punkt des Lichtstrahles

$$n^2 - 1 = (n_1^2 - 1) \frac{\Theta}{\Theta_1}, \quad (1)$$

wobei  $n_1$  und  $\Theta_1$  sich auf Punkt  $P_1$ , den Standpunkt, beziehen. Im Anschluß an § 11 S. 575 würden wir dagegen setzen

$$n - 1 = (n_1 - 1) \frac{\Theta}{\Theta_1}. \quad (1^*)$$

Wir bemerken aber gleich hier, daß in den Endformeln beide Annahmen nur zu ganz unwesentlichen Differenzen führen.

Da nun nach (7) auf voriger Seite die Beziehung besteht:

$$\frac{\Theta}{\Theta_1} = \left( \frac{u}{u_1} \right)^5 = \left( \frac{u_1 - h}{u_1} \right)^5, \quad (2)$$

so wird mit (1)

$$n^2 - 1 = (n_1^2 - 1) \left( 1 - \frac{h}{u_1} \right)^5, \quad (3)$$

dagegen mit (1\*):

$$n - 1 = (n_1 - 1) \left( 1 - \frac{h}{u_1} \right)^5. \quad (3^*)$$

Hieraus folgt ohne Schwierigkeit mit Rücksicht auf die Formeln (7) und (8) in § 10 S. 573 u. 574

erstens, für die Annahme (1):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5(n_1^2 - 1)}{2n_1^2 m_1} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{m_1} = \frac{\varrho_{1,2}}{u_1} \\ \varrho_{1,2} x_1' &= -x_1 \left( \frac{4}{m_1} - 1 - 2x_1 \right) \\ \varrho_{1,2}^2 x_1'' &= +x_1 \left\{ \frac{12}{m_1^2} - \frac{4(2 + 6x_1)}{m_1} + 4x_1 + 8x_1^2 \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

zweitens, für die Annahme (1\*):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5(n_1 - 1)}{n_1 m_1} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{m_1} = \frac{\varrho_{1,2}}{u_1} \\ \varrho_{1,2} x_1' &= -x_1 \left( \frac{4}{m_1} - 1 - x_1 \right) \\ \varrho_{1,2}^2 x_1'' &= +x_1 \left\{ \frac{12}{m_1^2} - \frac{4(2 + 3x_1)}{m_1} + 2x_1 + 2x_1^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4^*)$$

\*) Vergl. über diese *A. Ritter* a. S. 582 a. O.

Diese Ausdrücke können nun ohne weiteres zur Berechnung von  $h$  bzw.  $k_1$  nach § 10 (1\*) und (3) S. 572 dienen. Wollen wir aber mit *Bauernfeinds* Entwicklungen vergleichen,\*) so stellen wir  $h$  besser nach § 3 (7) S. 555 auf, worin  $r_1 \kappa_1'$  durch den Wert  $\varrho_{1,2} \kappa_1'$  und  $r_1^2 \kappa_1''$  durch den Wert  $\varrho_{1,2}^2 \kappa_1''$  zu ersetzen ist. Wir finden dann ohne Schwierigkeit mit einigen meist unerheblichen Vernachlässigungen aus beiden Systemen (4) und (4\*) denselben, im wesentlichen mit *Bauernfeinds* Angabe übereinstimmenden Ausdruck:

$$h = s_1 \cot z_1 \left\{ 1 + \frac{2 \kappa_1 \gamma^2}{3 m_1 \sin^2 z_1} \right\} + \frac{1}{2} s_1 \gamma \left\{ \frac{\cos^2 z_1 + 1 - \kappa_1}{\sin^2 z_1} + \frac{m_1 (13 \cos^2 z_1 + 1 - \kappa_1) - 3 \cos^2 z_1}{3 m_1^2 \sin^4 z_1} \kappa_1 \gamma^2 \right\}. \quad (5)$$

*Bauernfeind* hat zwar anstatt des Koeffizienten 13 rechter Hand nur 1, indessen liegt diese Differenz völlig innerhalb der in (5) anderweit innegehaltenen Genauigkeitsgrenze. Die größte Vernachlässigung enthält der erste Klammerausdruck, dessen genauer Wert nach (7) S. 555 leicht aufzustellen ist. Sie wächst mit dem Quadrat der Entfernung und beträgt für  $s = 64^{\text{km}}$  annähernd  $h : 15000$ .

Die *Bauernfeindsche* Entwicklung in den *Astronom. Nachr.* ist übrigens etwas umständlich, weil sie nicht unmittelbar von *Taylor's* Satz ausgeht.\*\*) Die in der *Vermessungskunde*, 6. Aufl. Bd. 2 S. 301, angedeutete Vereinfachung führt aber durch die für  $\cos z = \text{null}$  divergente Reihe (I) daselbst.

Setzen wir nun aus (4) unsere Werte für  $\varrho \kappa'$  und  $\varrho^2 \kappa''$  in den strengen Ausdruck (6\*) S. 557 für  $k_1$  ein, so erhalten wir andere Ausdrücke als *Bauernfeind*. Dafs dessen Angaben in den *Astronom. Nachr.* Bd. 67 S. 65 (64) bzw. in der *Vermessungskunde* S. 338 oben für den Refraktionswinkel  $\angle z = \frac{1}{2} k_1 \gamma$  nicht richtig sind, sieht man schon in dem Vorkommen eines unmöglichen Gliedes. Er setzt nämlich in unseren Bezeichnungen, abgesehen von einem (auch nicht korrekten) Glied mit  $\gamma^2$ :

$$\frac{1}{2} k_1 \gamma = \frac{1}{2} \kappa_1 \gamma \left\{ 1 - \frac{4 \kappa_1 - m_1 (5 - 6 \kappa_1)}{3 \kappa_1 m_1} \gamma \cot z_1 - \dots \right\}; \quad (6)$$

es enthält darnach  $\frac{1}{2} k_1 \gamma$  ein von  $\kappa_1$  freies Glied

$$\frac{1}{2} \kappa_1 \gamma \cdot \frac{5 m_1}{3 \kappa_1 m_1} \gamma \cot z_1 \quad \text{oder} \quad \frac{5}{6} \gamma^2 \cot z_1,$$

\*) *Astronom. Nachr.* vom Jahre 1867 Bd. 67 Nr. 1587—90 S. 55 Gl. 38 oder *Elemente der Vermessungskunde* 6. Aufl. Bd. 2, Stuttgart 1879, S. 301 (268).

\*\*) Diese wesentliche Vereinfachung für die Theorie der terrestrischen Refraktion fanden wir nur bei *E. Pucci, Fondamenti di Geodesia*, vol. I, Milano 1883, benutzt.

was selbstverständlich falsch ist, da der Refraktionswinkel  $\frac{1}{2}k_1\gamma$  mit  $\kappa_1$  gleichzeitig verschwinden muß, wie auch die Gleichung (5) zeigt.

In unseren Entwicklungen fehlt in der That dieses Glied und zwar genügt es mit einem Fehler von höchstens  $\frac{1}{1500}$ , meist von kaum  $\frac{1}{5000}$  des Betrages zu setzen

$$\frac{1}{2} k_1 \gamma = \frac{1}{2} \kappa_1 \gamma \left\{ 1 - \frac{4\gamma \cot z_1}{3m_1} + \frac{\gamma^2 \cot^2 z_1}{m_1^2} - \frac{(1 - \kappa_1) \gamma^2}{3m_1} \right\}. \quad (6^*)$$

Für die Anwendung der Formeln ist vorerst die Berechnung von  $m_1$  erforderlich. *Bauernfeind* giebt in dieser Hinsicht zunächst eine Untersuchung, als deren Resultat eine Tabelle für das Verhältniß  $m_0$  der Atmosphärenhöhe zum Meridiankrümmungsradius unter verschiedenen Breitegraden erscheint, wenn überall ein normaler Luftdruck und eine normale Temperatur herrschen. Wir wollen ihm hier nicht weiter folgen und nur bemerken, daß nach unserer Ansicht es zur Zeit ebenso richtig ist, die zu  $m_0$  gehörende Atmosphärenhöhe  $u_0$  konstant zu nehmen, was obendrein der Konstanz von  $c = 6$  besser entspricht. Denn nach dem vorigen Paragraphen Gl. (8) verlangt die Annahme  $c = 6$  einen ganz bestimmten Wert von  $\tau$ , d. h. der Abnahme der Lufttemperatur für 1<sup>m</sup> Höhe, sodaß zu einer bestimmten Temperatur immer nur dieselbe Atmosphärenhöhe gehören kann.

Weiter handelt es sich dann um den Übergang von  $m_0$  zu  $m_1$ , oder wenn der in  $m_0$  eingeführte Meridiankrümmungsradius als überflüssig wegbleibt, um den Übergang von  $u_0$  zu  $u_1$ . Hierbei müssen die Proportionen (7) § 14 S. 586 zur Anwendung kommen. Man hat dann die Wahl, mit Lufttemperatur  $T$ , Luftdruck  $p$  oder Luftdichte  $\Theta$  zu rechnen. Da nun im allgemeinen die zu  $c = 6$  gehörige Temperaturabnahme  $\tau$  nicht vorhanden ist, wird jede dieser Rechnungen einen anderen Wert für  $u_1$  ergeben. In dem seither (bis 1883) von *Bauernfeind* befolgten Rechnungsgange besteht aber nicht nur dieses Bedenken, sondern auch ein Irrtum, insofern  $u$  nicht, wie (7) § 14 S. 586 verlangt, proportional der fünften Wurzel von  $\Theta$ , sondern *umgekehrt* proportional  $\Theta$  gesetzt worden ist.\*) Wenn auch dieser Irrtum gehoben sein wird, so bleibt immer der in der Natur der Theorie begründete Mangel, daß der besondere Stand der meteorologischen Instrumente nicht theoretisch konsequent, sondern nur empirisch (etwa behufs möglichsten Anpassens an die Beobachtungen) berücksichtigt werden kann.

Hiermit steht im engsten Zusammenhang, daß die Theorie auf alle diejenigen Fälle, in welchen die gleichmäßige Abnahme  $\tau$  der Lufttemperatur mit der Höhe eine andere ist, als die Annahme  $c = 6$

\*) Auf Anfrage teilte Herr v. *Bauernfeind* mit, daß in der That hier ein Versehen vorliege.

verlangt, strenggenommen nicht paßt, — es sei denn, daß man  $c$  mit Rücksicht auf Gl. (8) S. 586 *variabel* nähme. Dieser Umstand genügt, die Theorie für diejenigen Fälle unannehmbar zu machen, wo der wirkliche Verlauf der Lufttemperatur hinreichend bekannt ist, um durch seine Berücksichtigung einen besseren Anschluß der Theorie an die Erfahrung erwarten zu können, sowie für diejenigen Fälle, in welchen aus beobachteten Refraktionen ein Schluß auf das Verhalten der Lufttemperatur gezogen werden soll. Wenn er bisher nicht genügend gewürdigt worden ist, so liegt dies (abgesehen von der Nichtbeachtung des theoretischen Zusammenhangs von  $c$  und  $\tau$ ) daran, daß die in der Regel ungleichmäßige Abnahme der Lufttemperatur mit der Höhe noch ungünstiger wirkt, diese Fehlerursache aber schwerlich durch irgend eine Theorie ganz zu heben ist.

Zu gunsten der *Bauernfeindschen* Theorie der terrestrischen Refraktion ist hervorgehoben worden, daß die analoge Theorie der astronomischen Strahlenbrechung die von *Bessel* beobachteten Refraktionen bis zu  $90^\circ$  Zenithdistanz darstellt und daß sie die Abnahme des Refraktionskoeffizienten mit der Meereshöhe zeigt. Das erstere aber bildet nur einen Beweis für die Anpassung der Theorie an den durchschnittlichen Luftzustand, und das zweite ist keine so wesentliche Folgerung, daß darin ein Grund für die Festhaltung der Theorie im allgemeinen liegt. Doch muß anerkannt werden, daß die letztere dazu beigetragen hat, in weiteren Kreisen die Kenntnis der Abhängigkeit des Refraktionskoeffizienten von der Höhe zu verbreiten.

§ 16. **Refraktionstheorie von Jordan.** Unter der Voraussetzung, daß die Temperatur als Funktion der Höhe durch eine nach Potenzen der Höhe fortschreitende Reihe ausgedrückt werden kann, haben *Villarceau* 1860, *Ibañez* 1864 und *Jordan* 1876 Refraktions-theorien entworfen. Über die Theorien der erstgenannten, die — obwohl selbständig aufgestellt — doch übereinstimmen sollen, ist uns weiter nichts bekannt, als daß gegenseitige Beobachtungen vorausgesetzt werden, daß die Reihe bei der zweiten Potenz abgebrochen wird und Temperatur- und Barometerbeobachtungen auf beiden Stationen dazu dienen sollen, die Koeffizienten dieser Reihe zu bestimmen. In Spanien sind angeblich günstige Resultate erzielt worden.\*)

Auch *Jordan* nimmt für die Temperaturfunktion eine Reihenentwicklung nach Potenzen der Höhe an.\*\*\*) Er berechnet für beide Punkte  $P_1$  und  $P_2$  die Koeffizienten  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  durch Ausdrücke, die sich nicht wesentlich von (12) S. 577 unterscheiden (nur etwas vereinfacht sind) und setzt alsdann

\*) *Verhandlungen der permanenten Kommission der europäischen Gradmessung zu Paris 1875.* Berlin 1875. S. 118.

\*\*) *Astronom. Nachr.* 1876 Bd. 88 Nr. 2095 S. 99 oder *Handbuch der Vermessungskunde* Bd. 1 Stuttgart 1877 S. 564 u. ff.

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{3} \\ k_2 &= \frac{\kappa_1 + 2\kappa_2}{3} \end{aligned} \quad (1)$$

Zu letzteren Formeln gelangt er, indem er die Gleichung des auf die Tangente in  $P_1$  als Abscissenaxe bezogenen Lichtstrahles ansetzt wie folgt:

$$y = Pl^2 + Ql^3, \quad (2)$$

wo  $l$  die Kurvenlänge von  $P_1$  bis zu einem beliebigen Punkte oder dessen nicht wesentlich verschiedene Abscisse und  $y$  seine Ordinate bedeutet. Hiernach ist für den Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte des Lichtstrahles sehr nahe

$$\frac{1}{\rho_l} = 2P + 6Ql. \quad (3)$$

Nimmt man nun  $\kappa = \rho_{1,2} : \rho_l$ , so folgt

$$\kappa = \rho_{1,2} (2P + 6Ql) \quad (4)$$

und hiermit

$$\kappa_1 = \rho_{1,2} \cdot 2P \quad \kappa_2 = \rho_{1,2} (2P + 6QL),$$

wenn  $L$  die ganze Kurvenlänge von  $P_1$  bis  $P_2$  oder die Abscisse von  $P_2$  bedeutet. Drückt man mittelst dieser Relationen  $P$  und  $Q$  durch  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  aus, so ergibt sich

$$y = \frac{\kappa_1}{2\rho_{1,2}} l^2 + \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{6\rho_{1,2} L} l^3$$

und hieraus für die Ordinate  $Y$  von  $P_2$ :

$$Y = \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{6\rho_{1,2}} L^2. \quad (5)$$

Es ist aber sehr nahe  $Y:L$  gleich dem Refraktionswinkel  $\frac{1}{2} k_1 \gamma$  und  $\gamma = L : \rho_{1,2}$ , womit sich mittelst (5) sofort die erste der Näherungsrelationen (1) und aus dieser durch Vertauschung der Indices alsdann auch die zweite findet.

Die Jordanschen Formeln (1) lassen sich auch aus unseren Entwicklungen herleiten. Knüpfen wir an die Formeln (5) und (6) § 10 S. 573 an, so werden wir, da  $\kappa$  nur in den Endpunkten  $P_1$  und  $P_2$  bekannt ist, zu setzen genötigt sein:

$$k_1 = \kappa_1 + \frac{1}{3} \kappa' \gamma$$

und

$$\kappa_2 = \kappa_1 + \kappa' \gamma.$$

Die Elimination von  $\kappa'$  aus beiden Gleichungen giebt sofort die erste Gleichung (1). Das gleiche Resultat läßt sich aus (3) und (4) § 10 S. 573 gewinnen, wenn (3) auf  $k_1 = \kappa_1 + \frac{1}{3} \kappa' h$  abgekürzt wird. Die



erste Ableitung hat aber den Vorzug allgemeinerer Gültigkeit; denn falls die Luftschichtung nicht nach Niveauflächen stattfindet (für welchen Fall, innerhalb gewisser Grenzen der Abweichungen, unsere Formeln auch Geltung besitzen), so ist die zweite Ableitung nur für durchaus steigende oder fallende Lichtstrahlen, die erste aber auch für abwechselnd steigende und fallende Lichtstrahlen brauchbar.

Wenn hiernach die Gültigkeit der *Jordanschen* Formeln nicht an die normale Luftschichtung gebunden ist, so hat man doch zu bedenken, daß die Anwendung der Formeln  $\kappa_2 = \kappa_1 + \kappa' \gamma$  bzw.  $\kappa_1 + \kappa' h$  eine gute Annäherung an die Wirklichkeit nur in den seltenen Fällen bieten kann, wo der Verlauf der Temperatur entlang dem Lichtstrahl ein ziemlich gleichmäßiger ist (bei normaler Schichtung entspricht der Formel  $\kappa_2 = \kappa_1 + \kappa' h$  eine Funktion zweiten Grades von  $h$  für die Temperatur). Die Formeln haben vor den *Bauernfeindschen* allerdings den Vorzug, die wirkliche Temperaturabnahme mit der Höhe zu berücksichtigen: so gut als dies eben möglich ist, wenn nur in den Endpunkten Beobachtungen über dieselbe vorliegen. Umgekehrt gestatten sie auch aus Refraktionsbeobachtungen einen mehr oder weniger sicheren Rückschluß auf die Temperaturverhältnisse.

§ 17. Formel bei gegenseitigen Messungen, wenn  $\kappa$  in vier Punkten bekannt ist. Wenn wir voraussetzen, daß außer den Werten von  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  in den beiden Endpunkten des Lichtstrahles

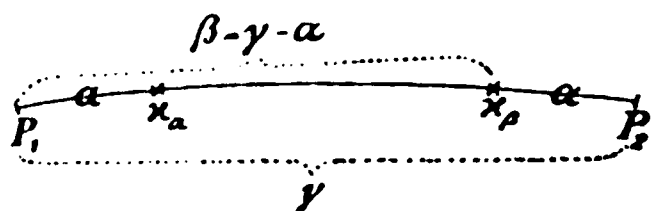


Fig. 95.

$P_1 P_2$  noch die Werte  $\kappa_\alpha$  und  $\kappa_\beta$  in zwei mittleren Punkten desselben gegeben sind, so wird ohne Zweifel ein genauerer Schluß auf den Verlauf von  $\kappa$  entlang dem Lichtstrahl möglich sein,

als aus  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  allein. Wir bezeichnen die Abstände der beiden Punkte von  $P_1$ , gemessen als Zentriwinkel in derselben Weise wie  $\gamma$ , Fig. 92 S. 553, mit  $\alpha$  und  $\beta$  und setzen, Fig. 95:

$$\beta = \gamma - \alpha \quad \text{also} \quad \alpha + \beta = \gamma. \quad (1)$$

Im Anschluß an die Formeln (5) und (6) § 10 S. 573 haben wir nun

$$\kappa_1 = \kappa_1 + \frac{1}{3} \kappa_1' \gamma + \frac{1}{12} \kappa_1'' \gamma^2 + \frac{1}{60} \kappa_1''' \gamma^3 \quad (2)$$

und

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha &= \kappa_1 + \kappa_1' \alpha + \frac{1}{2} \kappa_1'' \alpha^2 + \frac{1}{6} \kappa_1''' \alpha^3 \\ \kappa_\beta &= \kappa_1 + \kappa_1' \beta + \frac{1}{2} \kappa_1'' \beta^2 + \frac{1}{6} \kappa_1''' \beta^3 \\ \kappa_2 &= \kappa_1 + \kappa_1' \gamma + \frac{1}{2} \kappa_1'' \gamma^2 + \frac{1}{6} \kappa_1''' \gamma^3. \end{aligned} \quad (3)$$

Letztere Gleichungen dienen zur interpolatorischen Bestimmung von  $\kappa_1'$ ,  $\kappa_1''$  und  $\kappa_1'''$ . Der damit berechnete Wert  $k_1$  wird selbstredend alle Mängel eines interpolatorisch berechneten Wertes haben und dem wahren Wert von  $k_1$  in der Regel nur dann genau entsprechen, wenn — wie bei der Entwicklung der Formeln des § 10 vorausgesetzt — der Ausdruck für  $k_1$  der Anfang einer stark konvergenten Reihe ist.

Die Aufstellung des Ausdruckes für  $k_1$  erfolgt am einfachsten, wenn die Größen auf den linken Seiten in (2) und (3) nach rechts gebracht werden. Alsdann ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} \kappa_1 - k_1 & \frac{1}{3}\gamma & \frac{1}{6}\gamma^2 & \frac{1}{10}\gamma^3 \\ \kappa_1 - \kappa_\alpha & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \kappa_1 - \kappa_\beta & \beta & \beta^2 & \beta^3 \\ \kappa_1 - \kappa_2 & \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix} = 0$$

Hieraus folgt

$$k_1 \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \beta & \beta^2 & \beta^3 \\ \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix} = \kappa_1 \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3}\gamma & \frac{1}{6}\gamma^2 & \frac{1}{10}\gamma^3 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \beta & \beta^2 & \beta^3 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix} + \kappa_2 \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\gamma & \frac{1}{6}\gamma^2 & \frac{1}{10}\gamma^3 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \beta & \beta^2 & \beta^3 \end{vmatrix} \\ + \kappa_\alpha \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\gamma & \frac{1}{6}\gamma^2 & \frac{1}{10}\gamma^3 \\ \beta & \beta^2 & \beta^3 \\ \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix} - \kappa_\beta \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\gamma & \frac{1}{6}\gamma^2 & \frac{1}{10}\gamma^3 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 \end{vmatrix}$$

Die Berechnung der Determinanten gestaltet sich nach gehöriger Reduktion mittelst der Relation (1) unter Anwendung bekannter Sätze sehr bequem und ergibt

$$k_1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{\gamma^2}{10\alpha\beta}\right) \kappa_1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{\gamma^2}{15\alpha\beta}\right) \kappa_2 + \frac{\left(\beta - \frac{2}{5}\gamma\right) \kappa_\alpha - \left(\alpha - \frac{2}{5}\gamma\right) \kappa_\beta}{6(\beta - \alpha)\alpha\beta} \gamma^2. \quad (4)$$

Durch Vertauschung der Indices 1 und 2 bzw.  $\alpha$  und  $\beta$  folgt hieraus

$$k_2 = \left(\frac{2}{3} - \frac{\gamma^2}{10\alpha\beta}\right) \kappa_2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{\gamma^2}{15\alpha\beta}\right) \kappa_1 + \frac{\left(\beta - \frac{2}{5}\gamma\right) \kappa_\beta - \left(\alpha - \frac{2}{5}\gamma\right) \kappa_\alpha}{6(\beta - \alpha)\alpha\beta} \gamma^2, \quad (5)$$

und durch Kombination beider Formeln ergibt sich endlich:

$$k_2 + k_1 = (\kappa_2 + \kappa_1) + A \{ \kappa_\beta + \kappa_\alpha - (\kappa_2 + \kappa_1) \} \quad (6)$$

und

$$k_2 - k_1 = \frac{1}{3} (\kappa_2 - \kappa_1) + \frac{1}{5} A \left\{ \frac{\kappa_\beta - \kappa_\alpha}{\beta - \alpha} \gamma - (\kappa_2 - \kappa_1) \right\} \quad (7)$$

mit

$$A = \frac{\gamma^2}{6\alpha\beta}.$$

Nach *Jordans* Theorie wird  $k_2 + k_1 = \kappa_2 + \kappa_1$  und  $k_2 - k_1 = \frac{1}{3}(\kappa_2 - \kappa_1)$ ; die Formeln (6) und (7) zeigen, welche Änderungen durch Berücksichtigung der Werte von  $\kappa$  in zwei symmetrischen Zwischenpunkten eintreten. Man wird letztere jedenfalls in der Nähe der Mitte des Lichtstrahles annehmen und demgemäß  $\alpha = \gamma - \beta = \frac{1}{3}\gamma$  bis  $\frac{1}{2}\gamma$  setzen, wodurch die GröÙe  $A$  gegeben ist.

Man kann  $A$  aber auch aus den Messungen selbst bestimmen. Denkt man sich nämlich eine Reihe aufeinanderfolgender, gleichzeitiger, gegenseitiger Zenithdistanzmessungen gegeben und für jedes Wertpaar der Zenithdistanzen die GröÙen  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  und  $\kappa_2 - \kappa_1$  aus Temperaturbeobachtungen in der Nähe der Stationen abgeleitet, so wird  $\kappa_2 - \kappa_1$  für die aufeinanderfolgenden, gegenseitigen Messungen verschiedene Werte annehmen. In den diesen Messungen entsprechenden Gleichungen für  $h$ , welche durch Einführung von (7) in (9\*) § 10 S. 574 entstehen, wird demnach der Faktor von  $A$  verschieden sein, was die Möglichkeit einer gleichzeitigen Bestimmung von  $h$  und  $A$  herbeiführt.

Durch diese Methode wird zugleich dem Umstande Rechnung getragen, daß  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  aus den Temperaturbeobachtungen in der Regel formell nicht in mathematischer Strenge für  $P_1$  und  $P_2$  bestimmt werden, sondern daß die in verschiedenen Höhen aufgehängten Thermometer nur mittlere Werte von  $\kappa$  für die Nähe der Stationen geben. A priori läßt sich die Formel diesen Verhältnissen entsprechend nicht leicht anpassen; aber das empfohlene Verfahren bietet eine Möglichkeit, dieses a posteriori zu thun. Dabei wird man für die Rechnung bequemer anstatt  $A$  als Unbekannte  $B = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}A$  einführen, womit (7) übergeht in

$$k_2 - k_1 = B \left\{ (\kappa_2 - \kappa_1) - \frac{\kappa_\beta - \kappa_\alpha}{\beta - \alpha} \gamma \right\} + \frac{1}{3} \frac{\kappa_\beta - \kappa_\alpha}{\beta - \alpha} \gamma. \quad (7^*)$$

Was die GröÙe  $(\kappa_\beta - \kappa_\alpha) \gamma : (\beta - \alpha)$  anbetrifft, so wird man mit Rücksicht auf die für brauchbare Bestimmungen überhaupt unvermeidliche Voraussetzung einer bedeutenden Höhenlage der mittleren Teile des Lichtstrahles über dem Terrain dafür (falls wirkliche Beobachtungen fehlen) einen Wert setzen können, der der Temperaturabnahme mit der Höhe entspricht, wie sie aus den Tagesmitteln der Beobachtungen in  $P_1$  und  $P_2$  bzw. deren Nähe folgen.

Man hat dabei zu beachten, daß diese GröÙe nichts Anderes ist, als ein nach Maßgabe der Veränderung von  $\kappa$  im mittleren Teile des Lichtstrahles berechneter Wert der Differenz  $\kappa_2 - \kappa_1$ . Dieser Wert erscheint im Vergleiche zum wirklichen, lokal beeinflussten Werte als ein normaler, wesentlich von dem Höhenunterschiede abhängiger. Bei geringen Höhenunterschieden, wie z. B. im Falle der in § 13 S. 584 besprochenen Beobachtungsreihe, kann er gleich null angenommen werden.

Wenn gleichzeitige barometrische Beobachtungen auf mehreren Punkten von verschiedener Höhenlage in der Umgebung der Zenithdistanzstationen vorliegen, so kann man einen Näherungswert von  $\kappa$  für die mittleren Teile des Lichtstrahles mit Hilfe der Lufttemperaturen erhalten, welche sich aus den barometrischen Beobachtungen und den geometrisch nivellierten Höhenunterschieden ergeben (vergl. die Anmerkung zu § 21).

§ 18. Übersicht der Methoden. Die im vorhergehenden Paragraphen durchgeführte Berechnung der Refraktionskoeffizienten  $k$  aus den für vier Punkte des Lichtstrahles gegebenen Werten von  $\kappa$  läßt sich selbstverständlich auch durch Hinzuziehen von mehr als vier Punkten verallgemeinern, jedoch ohne Aussicht auf praktische Durchführbarkeit. Dieselbe ist bereits für den behandelten Fall nicht sehr groß, weil dabei die Ermittlung von  $\kappa$  aus Beobachtungen der Lufttemperatur in verschiedenen Höhen über dem Terrain wenigstens für die Endpunkte des Lichtstrahles vorausgesetzt wird. Indessen bietet sich hierzu vielleicht eine Möglichkeit in der Anwendung thermo-elektrischer Vorrichtungen, welche durch kleine Luftballons\*) getragen werden.

Ohne Lufttemperaturbeobachtungen läßt sich die Methode des vorigen Paragraphen (und im allgemeinen auch diejenige von *Jordan*) nicht wohl durchführen. Allerdings scheint sich dazu die Möglichkeit durch gleichzeitige Beobachtungen zwischen drei Punkten zu bieten, indem sich aus der Gesamtrefraktion für den Lichtstrahl zwischen je zwei der drei Punkte drei Gleichungen ergeben, in denen die Werte  $\kappa$  für die drei Punkte auftreten. Dieselben führen indessen wegen der durch ihren Näherungscharakter bedingten formellen Ungenauigkeit, sowie wegen der Schwierigkeit, hinlänglich zuverlässige Werte für  $\kappa$  in den mittleren Teilen der Lichtstrahlen zu erhalten, bei einer Auflösung nach jenen drei  $\kappa$  voraussichtlich nicht zu genügend scharfen Werten der letzteren.

Anstatt der wegen ihres interpolatorischen Charakters möglicherweise von geringem Erfolg begleiteten Methode des vorhergehenden Paragraphen könnte sich vielleicht ein *Verfahren mit lokalen Korrekturen* empfehlen, welches wir noch kurz andeuten wollen. Nimmt man nämlich an, daß die Refraktion nur deswegen nicht nach den einfachen Formeln von *Jordan* berechnet werden kann, weil in der Nähe des Terrains durch den Verlauf der Lufttemperatur Unregelmäßigkeiten entstehen, so kann man z. B. für den Refraktionswinkel des Lichtstrahles  $P_1P_2$  in  $P_1$  näherungsweise setzen (vergl. S. 591):

---

\*) Eines Vorschlages zu der Anwendung kleiner Luftballons gedenkt bereits *Baeyer* 1855 in den *Astronom. Nachr.* Bd. 41 S. 325. Die dabei erwähnten Minimumthermometer dürften jetzt zeitgemäßer durch geeignete elektrische Vorrichtungen zu ersetzen sein.

$$\frac{1}{2} k_1 \gamma = \frac{1}{2} \frac{2\kappa'_1 + \kappa'_2}{3} \gamma + c_1 (t'_1 - t_1). \quad (1)$$

Hierin bezeichnen  $\kappa'_1$  und  $\kappa'_2$  die Werte von  $\kappa$  in  $P_1$  und  $P_2$  entsprechend den von den lokalen Anomalieen befreiten Lufttemperaturen  $t'_1$  und  $t'_2$ , während  $t_1$  und  $t_2$  die wirklichen Temperaturen der Luft in den Endpunkten des Lichtstrahles sind. Das Korrektionsglied  $c_1 (t'_1 - t_1)$  ist unter der Voraussetzung entstanden, daß in der Nähe von  $P_1$  die Luftschichten gleicher Dichtigkeit parallel laufen. Bei der Durchkreuzung ebener paralleler Schichten ist aber die totale Refraktion nur abhängig von den Brechungsindices der beiden äusseren Schichten; für 760<sup>mm</sup> Barometerstand und 0° mittlerer Lufttemperatur beträgt sie  $0,22'' \Delta t \cdot \tan \varepsilon$  bei der Temperaturdifferenz  $\Delta t$  in hundertteiligen Graden und dem mittleren Neigungswinkel  $\varepsilon$  des Strahles zur Schichtennormale. Mit Rücksicht hierauf und unter Beachtung des Umstandes, daß das erste Glied der Formel (1) bereits den normalen Teil der Refraktion in den betrachteten Schichten enthält, gelangt man nun zu dem Korrektionsgliede in der angegebenen Form, wobei von der Abhängigkeit des Koeffizienten  $c_1$  vom Stande der meteorologischen Instrumente entsprechend einer ersten Annäherung abgesehen ist.

Man kann die Formel (1) auch auf  $k_1$  reduzieren und hat sodann  $c'_1 = c_1 : \gamma$  als eine, von den lokalen Verhältnissen abhängige Unbekannte aufzufassen, die sich durch Beobachtungen bei verschiedenen Temperaturen, also zu verschiedenen Tageszeiten, ermitteln läßt, ähnlich wie der Koeffizient  $A$  bzw.  $B$  im vorhergehenden Paragraphen.

Die Methode der lokalen Korrekturen erfordert ebenso wie diejenige des vorhergehenden Paragraphen die Beobachtung der Lufttemperatur in größeren Höhen über dem Terrain, damit rechnerisch ein Schluß auf  $t'$  und  $\kappa'$  möglich ist. Ein Ersatz von  $t'$  durch Tagesmittel der  $t$  dürfte sich in mehr als einer Hinsicht wenig geeignet erweisen.

Wenn überhaupt die Einführung beobachteter Lufttemperaturen in die Refraktionsberechnung sich als unzweckmässig herausstellen sollte, weil die beobachteten Lufttemperaturen von den wahren zu sehr abweichen — ein Umstand, den schon 1855 *Bayer* befürchtet und der in der That mit Rücksicht auf die begleitenden Umstände eintreten muß, wiewohl je nach der Art der Instrumente und Einrichtungen in verschiedenem Grade — dann können die beiden soeben behandelten Methoden selbstverständlich keine Anwendung finden.

Um nun doch die Aufgabe der trigonometrischen Höhenbestimmung zu lösen, wird man sich genötigt sehen, in der Regel wieder zu der Annahme des Zusammenfallens der Luftschichten gleicher Dichtigkeit mit Niveaulflächen zurückzukehren. Damit aber diese Annahme dem wirklichen Luftzustande wenigstens annähernd entspricht, muß man entweder die Beobachtungen über den ganzen Tag (24 Stunden) ausdehnen und für den Mittelwert die Rechnung führen, oder man muß die Beobachtungen auf diejenigen Zeiten beschränken,

wo die Temperatur der Luft erfahrungsmässig in der Regel einen einigermaßen normalen Verlauf hat.

Was das erste Verfahren anbetrifft, so zeigen die Publikationen von *Bauernfeind* aus den Jahren 1880 und 1883, daß es möglich ist, Beobachtungsreihen zu erhalten, die sich, abgesehen von einigen Lücken, fortlaufend über einen Tag, ja über eine Reihe von aufeinanderfolgenden Tagen ausdehnen. Wenn aber die Formeln für normale Gestalt der Flächen gleicher Luftdichte in irgend einem Falle Berechtigung haben, so dürfte es derjenige sein, der dem Mittel der Messungen für die genannten Zeiträume entspricht.

Hinsichtlich des zweiten Verfahrens ist zu erwähnen, daß nach den Untersuchungen von *Bauernfeind* und *Rühlmann* die Temperaturen der Luftschichten in der Nähe des Terrains zum Gebrauche für barometrische Höhenmessungen im allgemeinen zweimal täglich tauglich sind. Die betreffenden Zeiten für Deutschland zeigt *Voglers Diagramm*\*) in übersichtlicher Weise:

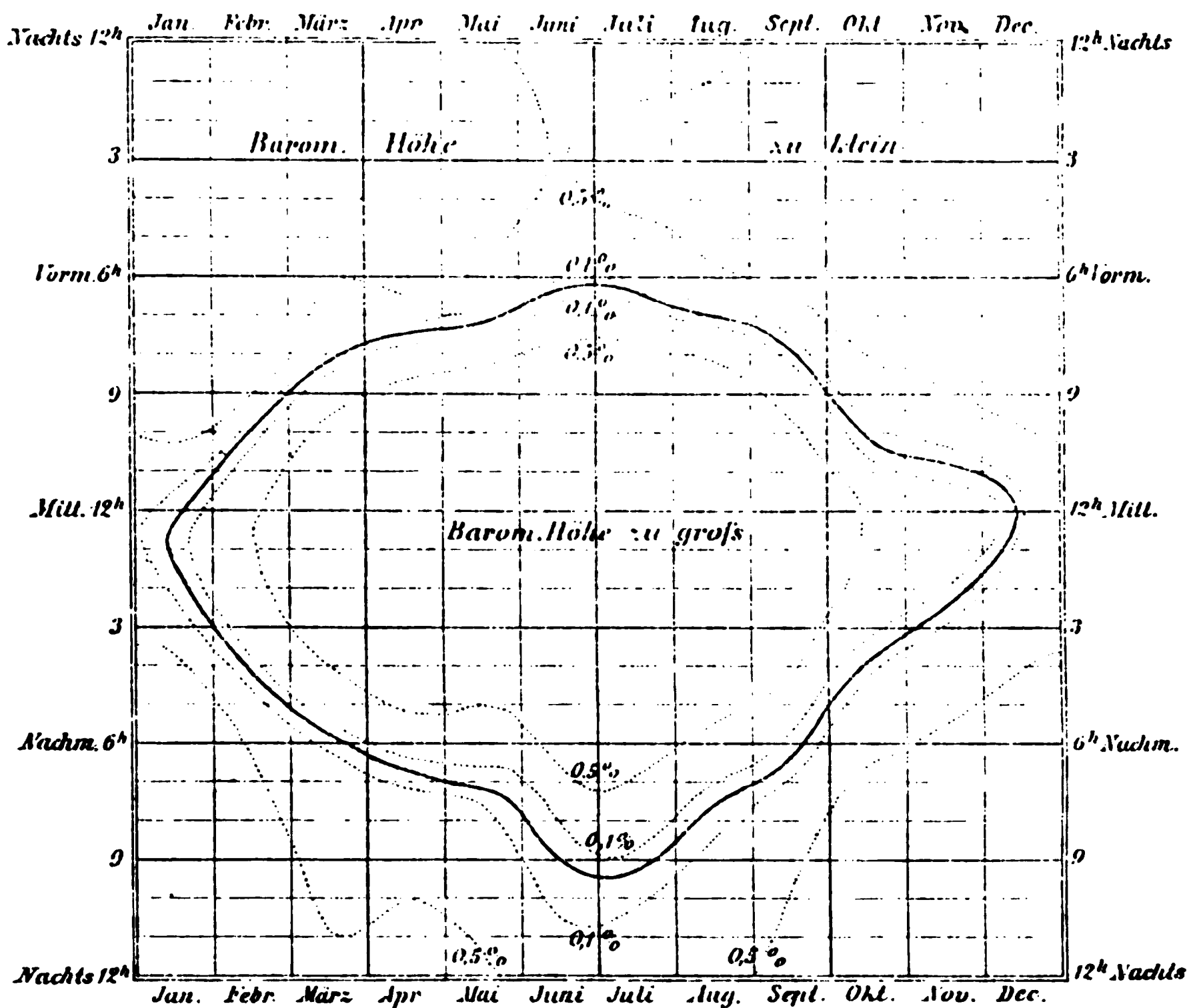


Fig. 96.

Daß in einzelnen Fällen auch das trigonometrische Meßverfahren in der Nähe dieser Zeiten richtige Werte zu geben vermag, erkennt

\*) Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln, Berlin 1877, S. 91.



man aus der in § 13 S. 584 aufgeführten Beobachtungsreihe. Aber es besteht immer eine Unsicherheit hinsichtlich des geeignetsten Zeitpunktes der Messungen, die durch gleichzeitige barometrische Messungen zu heben, in mehr als einer Hinsicht ungenügend erscheinen muß; auch ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß diese Zeiten in einzelnen Fällen sich als ganz untauglich erweisen.

Die Berechnung der Beobachtungen hat bei der den letzten beiden Fällen zu grunde gelegten Voraussetzung an die Formeln des § 10, insbesondere an (3) S. 573, anzuknüpfen. Um die in dieser Formel auftretenden Koeffizienten zu ermitteln, was natürlicherweise nur bei größeren Höhenunterschieden nötig wird, da für kleinere Höhenunterschiede die Annahme  $k_1 = k_2$  genügt, ist die gleichzeitige Beobachtung zwischen drei Stationen verschiedener Höhenlage am geeignetsten\*). Die betreffenden Entwicklungen werden wir im nächsten Paragraphen aufstellen.

Wenn die Beobachtungen über alle 24 Stunden des Tages ausgedehnt werden und die Rechnung mit dem Mittel derselben geführt wird, so schwindet auch ein großer Teil der Bedenken gegen die Benutzung der Lufttemperaturen wegen der Schwierigkeit ihrer Beobachtung, und man wird sogar hoffen dürfen, daß die Tagesmittel der in der Nähe des Terrains beobachteten Lufttemperaturen frei von lokalen Anomalieen sind. Aus derartigen Bestimmungen an mehreren Punkten verschiedener Höhenlage in der Gegend trigonometrischer Stationen läßt sich die Temperatur als Funktion der Höhe und damit  $\alpha$  als ebensolche ermitteln.

Um den Einfluß der Refraktion zu vermindern, kann man sich des Mittels der Verkleinerung der Distanzen bedienen. Dieses ist sehr wirksam, da die durch die Refraktion in der Höhenmessung erzeugte Unsicherheit erfahrungsmäßig ungefähr mit dem Quadrat der Distanz wächst. Nach Ausweis des ersten Bandes über die Vermessung von Mecklenburg ist der mittlere Fehler eines (ohne Rücksicht auf die Abweichungen der Niveauflächen von der Form eines Ellipsoides berechneten) Höhenunterschiedes bei 17<sup>km</sup> Distanz aus den Beobachtungen eines Vor- oder Nachmittags noch nicht  $\pm 0,2^m$ . Die Berechnung ist hierbei mit Rücksicht auf die geringen Höhenunterschiede nach der Hypothese der Kreisform des Lichtstrahles gemacht. Hiernach dürfte eine ausschließliche Benutzung von Distanzen unter 20<sup>km</sup> ohne Anwendung besonderer Theorien und Beobachtungsverfahren gute Resultate versprechen, wobei nur diejenigen Linien auszuschließen wären, für welche die Differenz  $z'_{2,1} - z'_{1,2}$  zu verschiedenen Zeiten sich in solchem Maße verschieden ergibt, daß eine Ungleichheit von  $k$  für beide Endpunkte des Lichtstrahles anzunehmen ist. Für diese Distanzen

\*) Dieses Verfahren empfiehlt 1855 *Baeyer* a. a. O. S. 325, neuerdings *H. Bruns* in der *Astronom. Vierteljahrsschrift* 1883 Bd. 18 S. 250.

$< 20^{\text{km}}$  dürften Messungen der Zenithdistanzen an ein oder zwei Vor- bzw. Nachmittagen ausreichen, während für grössere Distanzen fortlaufende Messungen über Tag und Nacht zur Erzielung guter Resultate höchst wahrscheinlich notwendig sein werden. Ergiebt sich durch Einschränkung der Distanzen somit einerseits ein Zeitgewinn, so erfordert leider dieselbe eine große Vermehrung der Anzahl der Stationen und der astronomischen Bestimmungen, womit zugleich eine ganz erhebliche Ausdehnung des Ausgleichungsgeschäftes verbunden ist.

Wir möchten hier nochmals auf die in Bd. 1 S. 564 § 21 u. ff. angegebene Methode der Bestimmung der Gestalt des Geoides aus Lotabweichungen hinweisen und zwar besonders im Sinne einer Befürwortung ausgedehnter Benutzung der Breitenbestimmungen zur Ermittlung der Form der Meridiane. Denn wir sind der Ansicht, daß sich durch Breitenstationen von durchschnittlich  $10^{\text{km}}$  Abstand die Form eines Meridianes rascher und genauer bestimmen läßt, als mittelst Zenithdistanzmessungen, welche Entfernungen man dabei auch benutzen möge.

Nehmen wir an, daß auf einem  $1000^{\text{km}}$  langen Meridianbogen sich 100 Breitenstationen in ungefähr gleichen Abständen befinden, daß jede geographische Breite mit  $\pm 1,5''$  m. F. bestimmt sei und daß der mittlere Einfluß derjenigen Massenunregelmäßigkeiten, welche eine merkbare Wirkung nur bis etwa  $10^{\text{km}}$  Entfernung ausüben, auch  $\pm 1,5''$  betrage (ein auf grund theoretischer und empirischer Erwägungen plausibler Wert), so würde sich der Unterschied der Höhen  $\eta$  von Anfangs- und Endpunkt des Meridianbogens gegen ein Referenzellipsoid mit dem m. F.

$$\pm \frac{10000.2,1}{206265} \sqrt{100}, \text{ d. i. } \pm 1^{\text{m}},$$

ergeben. Wenn es auch gelingen sollte, die gleiche Genauigkeit mittelst Zenithdistanzmessungen zu erreichen, so dürfte doch die Arbeit eine ungleich größere sein. Denn während für die empfohlene Methode, die wir kurz als *astronomisches Nivellement* bezeichnen möchten, bei der geringen erforderlichen Genauigkeit der Breitenbestimmungen nicht nur die Arbeit der astronomischen Messung, sondern auch diejenige für die geodätische Festlegung der Punkte (welche — natürlicherweise unter Zugrundelegung eines Dreiecksnetzes 1. Ordnung — im einzelnen nach ziemlich rohen Methoden erfolgen kann) eine geringe ist, auch keine mühsamen Rekognoszierungen nötig werden und die rechnerische Auswertung der Beobachtungen sehr einfach ausfällt, gestaltet sich die Methode der Zenithdistanzmessungen in allen diesen Teilen erheblich schwieriger.

Ihre Anwendung wird daher ohne Zweifel eine beschränkte bleiben, insbesondere auf die Konstruktion von ostwestlichen Profilen, welche die meridionalen Profile des Geoides verbinden, und auf einzelne Fälle zur Kontrolle und Ergänzung der Ergebnisse des astronomischen Nivellements im Hochgebirge, wo die Krümmung der Lotlinien die Güte der letzteren etwas beeinträchtigt, wenn auch in der Weise, daß der Einfluß bei Vergleichung von Stationen gleicher Höhenlage beiderseits des Gebirges in der Regel zum größeren Teile verschwinden wird.

§ 19. Formeln bei Beobachtungen zwischen drei Stationen unter Voraussetzung normaler Form der Luftschichten. Die drei Punkte nennen wir  $P_1, P_2, P_3$  und bezeichnen allgemein mit



$h_{mn}$  die Höhe von  $P_n$  über  $P_m$ , ferner mit  $k_{mn}$  den Refraktionskoeffizienten, der zu dem Refraktionswinkel in  $P_m$  für den Strahl nach  $P_n$  gehört, endlich mit  $\kappa_m$  den Refraktionskoeffizienten  $\kappa$  im Punkte  $P_m$ .

Die Beziehung von  $k_{mn}$  zu  $\kappa_m$  und  $h_{mn}$  wird durch die Formel (3) § 10 S. 573 gegeben. Indem wir die Distanzen  $< 32^{\text{km}}$  voraussetzen, genügt es für die Parenthese im 2. Gliede  $2h$  zu schreiben. Damit erhalten wir für  $k_{1,2}$  die Näherungsrelation:

$$k_{1,2} = \kappa_1 + \frac{1}{3} \kappa_1' h_{1,2} + \frac{1}{12} \kappa_1'' h_{1,2}^2, \quad (1)$$

worin  $h_{1,2}$  rechter Hand einen Näherungswert für die betreffende Höhendifferenz vorstellt.

Nach (4) S. 573 ist ferner näherungsweise:

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \kappa_1 + \kappa_1' h_{1,2} + \frac{1}{2} \kappa_1'' h_{1,2}^2 \\ \kappa_3 &= \kappa_1 + \kappa_1' h_{1,3} + \frac{1}{2} \kappa_1'' h_{1,3}^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Indem wir nun aus diesen drei Gleichungen  $\kappa_1'$  und  $\kappa_1''$  eliminieren, erhalten wir:

$$k_{1,2} = \frac{\kappa_1}{6} \frac{4h_{1,3} - h_{1,2}}{h_{1,3}} + \frac{\kappa_2}{6} \frac{h_{1,3} + h_{2,3}}{h_{2,3}} - \frac{\kappa_3}{6} \frac{h_{1,2}^2}{h_{1,3} h_{2,3}}. \quad (3)$$

Durch Vertauschung der Indices 1 und 2 folgt hieraus:

$$k_{2,1} = \frac{\kappa_1}{6} \frac{h_{1,3} + h_{2,3}}{h_{1,3}} + \frac{\kappa_2}{6} \frac{4h_{2,3} + h_{1,2}}{h_{2,3}} - \frac{\kappa_3}{6} \frac{h_{1,2}^2}{h_{1,3} h_{2,3}}. \quad (4)$$

Aus (3) und (4) findet sich durch Subtraktion und Addition:

$$k_{2,1} - k_{1,2} = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{3} \quad (5)$$

und

$$\frac{k_{2,1} + k_{1,2}}{2} = \kappa_1 \left( \frac{1}{2} + \frac{h_{1,2}}{6h_{3,1}} \right) + \kappa_2 \left( \frac{1}{2} + \frac{h_{1,2}}{6h_{2,3}} \right) + \kappa_3 \frac{h_{1,2}^2}{6h_{3,1} h_{2,3}}. \quad (6)$$

Die gleichzeitigen, gegenseitigen Beobachtungen zwischen drei Punkten geben aber mit Hilfe von Gleichung (11) S. 574 die mittleren Refraktionskoeffizienten für die zugehörigen drei Lichtstrahlen. Indem man sodann die Beziehung (6) auf jeden der letzteren anwendet, erhält man anscheinend drei unabhängige Gleichungen zur Bestimmung von  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  und  $\kappa_3$ . Dieselben lauten, wenn der mittlere Refraktionskoeffizient des Strahles  $P_m P_n$  mit

$$(mn) = \frac{k_{mn} + k_{nm}}{2}$$

bezeichnet wird:

$$\begin{aligned}(1.2) &= \kappa_1 \left( \frac{1}{2} + \frac{h_{1.2}}{6h_{3.1}} \right) + \kappa_2 \left( \frac{1}{2} + \frac{h_{1.2}}{6h_{2.3}} \right) + \kappa_3 \frac{h_{1.2}^2}{6h_{3.1}h_{2.3}} \\(2.3) &= \kappa_1 \frac{h_{2.3}^2}{6h_{1.2}h_{3.1}} + \kappa_2 \left( \frac{1}{2} + \frac{h_{2.3}}{6h_{1.2}} \right) + \kappa_3 \left( \frac{1}{2} + \frac{h_{2.3}}{6h_{3.1}} \right) \\(3.1) &= \kappa_1 \left( \frac{1}{2} + \frac{h_{3.1}}{6h_{1.2}} \right) + \kappa_2 \frac{h_{3.1}^2}{6h_{1.2}h_{2.3}} + \kappa_3 \left( \frac{1}{2} + \frac{h_{3.1}}{6h_{2.3}} \right).\end{aligned}\quad (7)$$

Eliminieren wir mit Hilfe der (2)  $\kappa_2$  und  $\kappa_3$ , so ergibt sich:

$$\begin{aligned}(1.2) &= \kappa_1 + \frac{\kappa_1'}{2} h_{1.2} + \frac{\kappa_1''}{6} h_{1.2}^2 \\(2.3) &= \kappa_1 + \frac{\kappa_1'}{2} (h_{1.2} + h_{1.3}) + \frac{\kappa_1''}{6} (h_{1.2}^2 + h_{1.3}^2 + h_{1.2} h_{1.3}) \quad (7^*) \\(1.3) &= \kappa_1 + \frac{\kappa_1'}{2} h_{1.3} + \frac{\kappa_1''}{2} h_{1.3}^2.\end{aligned}$$

Dieses System ist dem vorhergehenden vorzuziehen, weil es einfacher und auch für den Fall brauchbar ist, daß  $\kappa_1''$  von vornherein gleich null angenommen werden soll. Übrigens lassen sich aus (7) sowohl wie aus (7\*) nur zwei der Unbekannten durch die dritte ausdrücken, denn es wird, wie man leicht verifiziert:

$$(1.2)h_{1.2} + (2.3)h_{2.3} + (1.3)h_{3.1} = 0. \quad (8)$$

Diese Bedingungsgleichung besteht auch noch, wenn in die Formel für  $k$  ein Glied mit  $\kappa'''$  aufgenommen wird. Der Grad ihrer Erfüllung durch die Beobachtungswerte giebt einen Maßstab für die Beobachtungsfehler und die Fehler der zu grunde gelegten Theorie.

Um nun sämtliche drei Unbekannte  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  und  $\kappa_3$  bzw.  $\kappa_1$ ,  $\kappa_1'$  und  $\kappa_1''$  zu bestimmen, ist noch die Gleichung

$$h_{1.2} + h_{2.3} + h_{3.1} = 0 \quad (9)$$

herbeizuziehen. In dieselbe sind die Ausdrücke für  $h$  einzusetzen, welche sich aus der Anwendung der Gleichung (9\*) § 10 S. 574 mit Rücksicht auf (5) ergeben. Alles weitere bedarf keiner Erörterung.

Nur mag noch bemerkt werden, daß die Bedingung (8) eine Ausgleichung fordert. Da erfahrungsmäßig die Fehler der trigonometrisch ermittelten Höhen mit dem Quadrat der Entfernung wachsen\*), so kommen den Refraktionskoeffizienten gleiche Gewichte zu. Theoretische Erwägungen bestätigen dieses mit Rücksicht auf den systematischen Charakter der Abweichungen.

**§ 20. Zahlenbeispiel.** Zur Prüfung der Methode des vorhergehenden Paragraphen eignen sich die Beobachtungen, welche von *Bauernfeind* 1881 zwischen drei Punkten in der Nähe von *München*

\*) Vergl. z. B. *Zeitschr. für Vermessungswesen* 1876 Bd. 5 S. 154.

hat anstellen lassen. \*) Für die gegenseitige Lage dieser Punkte sind folgende Zahlen maßgebend:

Nr.	Name	Geogr. Breite	Geometr. niv. Höhe über dem Meer.
1	Höhensteig. .	47° 52' 0"	484,000 <sup>m</sup>
2	Irschenberg .	47 49 47	753,626
3	Kampenwand	47 45 18	1564,331

Seite	Mittleres südwestl. Azimut	log $\rho$ im Meere-niv	log $s_0$ (im Meeresniv.)	log $s_m$ (i. d. mittl. Höhe)	$\gamma$
1.2	76° 13' 59"	6,805367	4,236499	4,236541	556,62"
2.3	284 9 2	6,805362	4,531967	4,532046	1099,08
3.1	127 25 6	6,804955	4,310604	4,310674	660,80

Diese Angaben stimmen z. T. nicht ganz mit denen der Abh. überein. Indem wir nämlich von den ebenfalls mitgeteilten rechtwinkligen Koordinaten der Punkte ausgingen, stellte sich heraus, daß daselbst bei der Berechnung der Krümmungsradien  $\rho$  des (*Besselschen*) Erdellipsoides in den Vertikalebene der Seiten die Meridiankonvergenz übersehen ist. Es ändert jedoch dieser Umstand  $\log \rho$  nur in der 6. Decimalstelle um 3 bis 11 Einheiten und  $\gamma$  nur bis zu 0,01".

Die Beobachtungen erstrecken sich über eine Reihe aufeinanderfolgender Tage von 30 zu 30 Min. Wir wählten die Messungen vom 19. August 1<sup>h</sup> 30<sup>m</sup> v. bis 20. August 1<sup>h</sup> v., interpolierten die Lücken mittelst graphischen Verfahrens und bildeten sodann Mittelwerte. Da die Abh. nicht die Zenithdistanzen  $z'$ , sondern die Refraktionswinkel giebt, so sind letztere an den zu ihrer Bildung aus den geometrisch nivellierten Höhenunterschieden berechneten Zenithdistanzen  $\zeta$  der geraden Verbindungslinien wieder anzubringen, um die  $z'$  zu erhalten. Die Zahlen sind folgende:

Richtung	$\zeta$ nach der Abh.	Refr. Winkel nach der Abh.	$z'$	Gesamtrefr. u. mittl. Refr.-Koeff.
1.2	89° 10' 52,69"	0' 58,73"	89° 9' 53,96"	110,96"
2.1	90 58 23,93	0 52,23	90 57 31,70	0,1993
2.3	88 47 18,69	1 35,65	88 45 43,04	167,45
3.2	91 31 0,39	1 11,80	91 29 48,59	0,1524
3.1	93 6 57,15	0 34,37	93 6 22,78	107,04
1.3	87 4 3,65	1 12,67	87 2 50,98	0,1620

\*) *Ergebnisse aus Beobachtungen der terrestrischen Refraktion*; 2. Mitteilung. (Abh. der kön. bayer. Ak. der Wiss., 2. Cl., 1883, Bd. 15, 1. Abt.)

Die letzte Rubrik zeigt erstens die Gesamtrefraktion nach Formel (11) § 10 S. 574 ohne Rücksicht auf die zur Zeit noch unbekannte Lotabweichung aus den  $z'$  berechnet, sowie zweitens den hieraus durch Division mit  $\gamma$  abgeleiteten mittleren Refraktionskoeffizienten. Beachtet man nun, daß sich nach Maßgabe des geometrischen Nivellements die Höhenunterschiede

$$h_{1,2} = 270^m \quad h_{2,3} = 811^m \quad h_{3,1} = -1080^m$$

sehr nahe wie 1 : 3 : -4 verhalten, so giebt die Bedingungsgleichung (8) des vorigen Paragraphen:

$$(0,1993 + v_1) \cdot 1 + (0,1524 + v_2) \cdot 3 - (0,1620 + v_3) \cdot 4 = 0,$$

wobei das Symbol  $v$  Verbesserungen andeutet, die sich nach der Methode der kleinsten Quadrate zu  $-0,0003$ ,  $-0,0010$  und  $+0,0013$  bestimmen, so daß nunmehr in dem System (7\*) des vorigen Paragraphen zu setzen ist:

$$(1.2) = 0,1990 \quad (2.3) = 0,1514 \quad (1.3) = 0,1633.$$

Dieses System lautet allgemein mit obigen Näherungswerten der  $h$ :

$$\left. \begin{aligned} (1.2) &= x_1 + a + b \\ (2.3) &= x_1 + 5a + 21b \\ (1.3) &= x_1 + 4a + 16b \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{für} \\ &a = \frac{1}{2} x'_1 h_{1,2} \\ &b = \frac{1}{6} x''_1 h_{1,2}^2. \end{aligned}$$

Es giebt aus den beiden ersten Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{5}{4} (1.2) - \frac{1}{4} (2.3) + 4b \\ a &= -\frac{1}{4} (1.2) + \frac{1}{4} (2.3) - 5b; \end{aligned}$$

die dritte der vorhergehenden Gleichungen kann als Rechenkontrolle dienen.

Mit den ausgeglichenen Zahlwerten für (1.2) und (2.3) folgt

$$x_1 = 0,2109 + 4b, \quad a = -0,0119 - 5b.$$

Die (2) des vorigen Paragraphen geben hiermit

$$x_2 = 0,1871 - 3b, \quad x_3 = 0,1157 + 12b,$$

und daraus folgt zur Einführung in die Gleichung (9\*) § 10 S. 574, welche z. B. für  $h_{1,2}$  mit Rücksicht auf (5) des vorigen Paragraphen (und unter Vernachlässigung der Lotabweichungen) lautet:

$$h_{1,2} = s_m \tan \frac{z'_{2,1} - z'_{1,2}}{2} + \frac{x_2 - x_1}{1,2} \frac{s_m^2}{\rho_{1,2}} \sec^2 \frac{z'_{2,1} - z'_{1,2}}{2},$$

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= -0,0238 - 7b \\ x_3 - x_2 &= -0,0714 + 15b \\ x_1 - x_3 &= +0,0952 - 8b. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke für die Höhenunterschiede werden nunmehr:

$$\begin{aligned} h_{1,2} &= + 269,90 - 0,09 - 27b = + 269,76 \\ h_{2,3} &= + 812,67 - 1,08 + 227b = + 812,02 \\ h_{3,1} &= - 1082,22 + 0,52 - 44b = - 1081,78 \end{aligned} \quad (1)$$

mit  $b = 0,0019$  entsprechend der Bedingung  $h_{1,2} + h_{2,3} + h_{3,1} = 0$ .

Zu diesem Werte findet sich weiter:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 0,219 & \kappa_2 &= 0,181 & \kappa_3 &= 0,139 \\ k_{2,1} - k_{1,2} &= - 0,013 & k_{3,2} - k_{2,3} &= - 0,014 & k_{1,3} - k_{3,1} &= + 0,027 \\ \text{sowie } a &= - 0,0214, & \kappa'_1 h_{1,2} &= - 0,043 & \text{und } \kappa''_1 h_{1,2}^2 &= 0,0114. \end{aligned}$$

An der Hand dieser Werte für  $\kappa'_1$  und  $\kappa''_1$  läßt sich nunmehr nachträglich prüfen, ob die Vernachlässigungen in den benutzten Formeln im Vergleiche zu den strengeren Formeln der §§ 3 und 4 zulässig sind. Wir gehen darauf nicht weiter ein und bemerken nur, daß eine strengere Rechnung Änderungen von nur 1 bis 2 Centimetern giebt.

Wird  $\kappa''_1 = \text{null}$  gesetzt, so wird auch  $b = \text{null}$  und für die Höhenunterschiede findet sich:

$$h_{1,2} = + 269,81 \quad h_{2,3} = + 811,59 \quad h_{3,1} = - 1081,70.$$

Diese Werte erfüllen die Gleichung  $h_{1,2} + h_{2,3} + h_{3,1} = 0$  nicht. Um die Erfüllung herbeizuführen, könnte man die Verbesserungen  $v$  für die mittleren Refraktionskoeffizienten mit Rücksicht auch auf diese Bedingung bestimmen. Bedenkt man aber, daß die Fehler der Theorie auf die mittleren Refraktionskoeffizienten ganz anders wirken, wie auf die Differenzen  $k_{2,1} - k_{1,2}$  u. s. f., so ist es zweckmäßig, die Ausgleichung durch Verbesserungen  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  und  $\delta_3$  an den Annahmen  $3(k_{2,1} - k_{1,2}) = \kappa_2 - \kappa_1$  u. s. f. zu bewirken. Die Gewichte der  $\delta$  nehmen wir gleich groß an. Es folgt als Bedingung

$$3,9\delta_1 + 15,1\delta_2 + 5,5\delta_3 = 0,30,$$

damit

$$\delta_1 = 0,0043 \quad \delta_2 = 0,0166 \quad \delta_3 = 0,0061$$

und

$$h_{1,2} = + 269,83 \quad h_{2,3} = + 811,84 \quad h_{3,1} = - 1081,67. \quad (2)$$

Außerdem ergibt sich

$$k_{2,1} - k_{1,2} = - 0,007 \quad k_{3,2} - k_{2,3} = - 0,018 \quad k_{1,3} - k_{3,1} = + 0,034.$$

Setzt man entsprechend Jordans Theorie

$$0,1993 = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \quad 0,1524 = \frac{\kappa_2 + \kappa_3}{2} \quad 0,1620 = \frac{\kappa_3 + \kappa_1}{2}$$

und benutzt die hieraus folgenden Werte

$$\kappa_1 = 0,2089 \quad \kappa_2 = 0,1897 \quad \kappa_3 = 0,1151$$

wie vorher nach Maßgabe der Relationen  $3(k_{2.1} - k_{1.2}) = \kappa_2 - \kappa_1$  u. s. f., die auch jetzt Geltung haben, zur Berechnung der Höhendifferenzen, so wird

$$h_{1.2} = + 269,83 \quad h_{2.3} = + 811,54 \quad h_{3.1} = - 1081,70 .$$

Verbessert man wieder die Annahmen  $3(k_{2.1} - k_{1.2}) = \kappa_2 - \kappa_1$  u. s. f. um Größen  $\delta$ , so findet sich

$$\delta_1 = 0,0047 \quad \delta_2 = 0,0181 \quad \delta_3 = 0,0066$$

und

$$h_{1.2} = + 269,85 \quad h_{2.3} = + 811,81 \quad h_{3.1} = - 1081,66 . \quad (3)$$

Außerdem ergibt sich

$$k_{2.1} - k_{1.2} = - 0,005 \quad k_{3.2} - k_{2.3} = - 0,019 \quad k_{1.3} - k_{3.1} = + 0,033 .$$

*Behufs Berechnung der Refraktion aus den Angaben der meteorologischen Instrumente* auf den drei Stationen nach (12) § 11 S. 577 wurden für den angegebenen Zeitraum von 24 Stunden aus den halbstündigen (event. interpolierten) Beobachtungszahlen nachstehende Mittelwerte\*) gebildet, denen die berechneten Werte von  $\tau$  und  $\kappa$  beigelegt sind:

	$b$	$e$	$T$	100 $\tau$	$\kappa$
1	719,2 <sup>mm</sup>	10,5 <sup>mm</sup>	290,74 <sup>o</sup>	0	0,1943
2	697,1	10,5	290,28	-0,344	0,1698
3	632,9	7,8	283,31	-1,376	0,1072

Mit den Annahmen  $3(k_{2.1} - k_{1.2}) = \kappa_2 - \kappa_1$  u. s. f., die auch jetzt Geltung haben, folgt

$$h_{1.2} = + 269,81 \quad h_{2.3} = + 811,72 \quad h_{3.1} = - 1081,74 .$$

Verteilt man den Widerspruch der Bedingungsgleichung

$$h_{1.2} + h_{2.3} + h_{3.1} = 0$$

wieder durch Verbesserungen  $\delta$  der Annahmen für  $3(k_{2.1} - k_{1.2})$  u. s. f., so ergibt sich

$$\delta_1 = 0,0031 \quad \delta_2 = 0,0121 \quad \delta_3 = 0,0044 ,$$

$$h_{1.2} = + 269,82 \quad h_{2.3} = + 811,90 \quad h_{3.1} = - 1081,72 \quad (4)$$

und

$$k_{2.1} - k_{1.2} = - 0,007 \quad k_{3.2} - k_{2.3} = - 0,017 \quad k_{1.3} - k_{3.1} = + 0,031 .$$

Zum Schlusse geben wir noch die Resultate für die Höhen-

\*) Hierbei fand sich, daß die Temperaturangaben der betr. Abhandlung von den entsprechenden der Mitteilung über die mit den trigonometrischen gleichzeitig angestellten barometrischen Höhenmessungen (erschieden unter dem Titel: „*Neue Beob. über die tägl. Periode barometr. bestimmter Höhen*“) z. T. nicht unerheblich abweichen.

differenzen, die unter *Voraussetzung der Kreisbogenform des Lichtstrahles* hervorgehen. Verbessert man die unmittelbaren Resultate

$$h_{1.2} = + 269,90 \quad h_{2.3} = + 812,67 \quad h_{3.1} = - 1082,22$$

wie vorher mittelst Verbesserungen der Annahmen  $3(k_{2.1} - k_{1.2}) = 0$  u. s. f., so wird erhalten

$$\delta_1 = - 0,0049 \quad \delta_2 = - 0,0193 \quad \delta_3 = - 0,0070,$$

$$h_{1.2} = + 269,88 \quad h_{2.3} = + 812,38 \quad h_{3.1} = - 1082,26 \quad (5)$$

und

$$k_{2.1} - k_{1.2} = - 0,002 \quad k_{3.2} - k_{2.3} = - 0,006 \quad k_{1.3} - k_{3.1} = - 0,002.$$

Die fünf Rechnungsergebnisse stellen wir nunmehr nach dem Grade der Annäherung von  $h_{3.1}$  an das Resultat des geometrischen Nivellements zusammen:

	Geom. niv.	(3)	(2)	(4)	(1)	(5)
1.2	269,63	269,85	9,83	9,82	9,76	9,88
2.3	810,71	811,81	1,84	1,90	2,02	2,38
1.3	1080,33	1081,66	1,67	1,72	1,78	2,26

Für die Unterschiede der Refraktionswinkel an beiden Enden jeder der drei Lichtkurven findet sich mittelst der Differenzen  $k_{2.1} - k_{1.2}$  u. s. f.:

	Geom. niv.	(3)	(2)	(4)	(1)	(5)
1.2	6,5''	1,3''	1,8''	2,0''	3,5''	0,5''
2.3	23,9	10,3	10,1	9,3	7,7	3,5
1.3	38,3	11,0	11,2	10,1	8,8	0,8

Die Vergleichung der Rechnungsergebnisse mit dem Resultat des geometrischen Nivellements hat insofern einen Sinn, als letzteres bis auf mehrere Decimeter Abweichung (vergl. den nächsten Paragraphen) den ersteren entsprechen muß. Nun gehen aber bei den größeren Höhenunterschieden die Abweichungen über den Betrag von einem Meter hinaus, und es scheint, daß keine der Refraktionstheorien im vorliegenden Falle genügend ist. Insbesondere entspricht das Ergebnis (1), welches nach den Formeln des § 19 abgeleitet worden ist, nicht den Erwartungen. Wahrscheinlich enthalten die benutzten Tagesmittel noch erhebliche lokale Anomalieen. Immerhin ist durch die Berechnungen (1) bis (4) im Vergleiche mit (5) etwas erreicht — auch im Vergleiche zu *Bauernfeinds* Theorie, bei welcher der Unterschied der Refraktionswinkel an den beiden Enden der Lichtkurven selbst für die Linie 1.3 noch nicht 2'' beträgt, deren Ergebnisse sich also von (5) nicht sehr unterscheiden werden.

Möglicherweise wird sich die erste Berechnungsmethode günstiger gestalten, wenn erst die Lotabweichungen, deren Bestimmung im Werke ist, in die Rechnung aufgenommen werden können. Die Resultate der trigonometrischen Berechnung werden dann allerdings noch immer nicht mit den Ergebnissen des geometrischen Nivellements direkt vergleichbar sein. Um vergleichbare Resultate zu erzielen, bedarf es der Bestimmung der Gestalt des Geoides im Bereiche des Dreiecks  $HJK$ , zu welchem Zwecke sich wahrscheinlich die Einschaltung noch einiger astronomischer Stationen nötig machen wird. (In dieser Hinsicht ist bei Anordnung neuer Beobachtungspunkte anzustreben, daß die längste Dreiecksseite die Richtung  $NS$  hat, um entlang derselben allein durch Breitenbestimmungen die Gestalt des Geoides ableiten zu können.)

Die oben geführte Rechnung hat mit Rücksicht auf die letzten Bemerkungen selbstredend nur den Zweck die Art und Weise zu zeigen, welche uns für die Verwertung der Beobachtungen wünschenswert erscheint. Für eine vollständige Diskussion aller Messungen im ganzen und einzelnen (insbesondere auch zu den für barometrische Messungen günstigsten Zeiten) ist die Erledigung der astronomischen Hilfsmessungen abzuwarten.

§ 21. Über die Bedeutung trigonometrischer, ohne Rücksicht auf Lotabweichung ermittelter Höhendifferenzen. Wird die Formel (9\*) § 10 S. 574, welche sich auf gleichzeitige, gegenseitige Zenithdistanzmessungen zwischen zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  bezieht, ohne Rücksicht auf Lotabweichung in den letzteren zur Berechnung des Höhenunterschiedes  $\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1$  angewandt, so heißt dies zunächst nichts Anderes, als daß die Höhen  $\mathfrak{H}_1$  und  $\mathfrak{H}_2$  auf ein besonderes Referenzellipsoid bezogen werden, dessen Lage durch die Bedingung des Verschwindens der von den Lotabweichungen herrührenden Parenthese in (10) § 10 S. 574 markiert ist. Für jedes andere Punktepaar ist dann das Referenzellipsoid ein anderes, woraus ersichtlich wird, daß diese Höhenberechnung nur dann einen Wert hat, wenn mit einer für den betreffenden Zweck ausreichenden Genauigkeit die Differenz  $\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1$  als Differenz der Meereshöhen  $H_2 - H_1$  aufgefaßt werden darf.

Sehen wir zunächst von der Krümmung der Lotlinien ab und denken uns durch  $P_1$  eine Niveaufläche und eine Parallelfäche zum Referenzellipsoid gelegt, so ist die Differenz  $(\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{H}_1) - (H_2 - H_1)$  gleich dem über die horizontale Entfernung  $P_1 P_2 = s$  erstreckten Integral

$$- \int \frac{A''}{\varrho''} ds, \quad (1)$$

vergl. Bd. 1 S. 565 (2), woselbst das Symbol  $\gamma$  anstatt  $A$  angewandt



ist. In dem Ausdruck (1) bezeichnet  $\mathcal{A}$  die Lotabweichung im Sinne einer Depression der Tangente der Niveaufläche gegen diejenige des Ellipsoides in Richtung von  $P_1$  nach  $P_2$ . Wegen der besonderen Lage des letzteren ist

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 0. \quad (2)$$

Aus dieser Bedingung folgt für (1) der Wert null, falls  $\mathcal{A}$  durch eine Funktion 1. Grades, etwa  $\lambda + \lambda's$ , zwischen  $P_1$  und  $P_2$  dargestellt werden kann. Ist dagegen  $\mathcal{A}$  von höherem Grade, z. B. gleich  $\lambda + \lambda^I s + \lambda^{II} s^2$ , so findet sich für (1) der von null verschiedene Wert

$$\frac{1}{6} \frac{\lambda^{II}}{\varrho''} s^3. \quad (3)$$

Um eine Vorstellung von dem durchschnittlichen Betrage des Ausdruckes (1) in einem praktischen Falle zu bekommen, denken wir uns im Anschluß an Bd. 1 S. 568 u. ff. im Meridian des Brockens eine Reihe von aufeinander folgenden Punkten trigonometrisch verbunden. Die Fig. 45 S. 570 giebt die  $\mathcal{A}$  für die Reihenfolge der Punkte von Süden nach Norden, wobei für Seeberg  $\mathcal{A} = 0$  gesetzt ist. Um nun  $\mathcal{A}$  für das Profil eines bestimmten Punktepaares auf das ihm eigentümliche Referenzellipsoid zu beziehen, genügt es nach der 1. Gl. (9) S. 536 Bd. 1 von den  $\mathcal{A}$  eine Konstante von solchem Werte abzuziehen, daß für die reduzierten  $\mathcal{A}$  die Gleichung (2) erfüllt ist. In Fig. 45 kommt dieses einer Parallelverschiebung der Abscissenaxe um den mittleren Betrag der beiden zu  $P_1$  und  $P_2$  gehörenden Ordinaten gleich. Der Wert des Ausdruckes (1) wird sodann graphisch durch die Fläche zwischen Kurve und Abscissenaxe dargestellt, wobei Flächen oberhalb negativ, unterhalb positiv zu rechnen sind.

Bei einem Abstände der Ordinaten von 10' geographischer Breite, also einer Entfernung der Punkte gleich 18,5<sup>km</sup>, ist aber der Verlauf der Kurve meist geradlinig, der Wert von (1) also null. Im Maximum ist für das durch Fig. 45 gegebene Sphäroid der Wert von (1) gleich 1/4<sup>m</sup>, im Durchschnitt aber noch nicht 1/20<sup>m</sup>, somit geringfügig.

Bei 20' oder 37<sup>km</sup> Abstand steigen Maximum und Durchschnitt jedoch bezw. bereits auf 1,2<sup>m</sup> und 0,4<sup>m</sup>.

Durch die Krümmung der Lotlinien können vorstehende Beträge sich noch etwas vergrößern. Jedoch wird bei Abständen von weniger als 20<sup>km</sup> und nicht sehr beträchtlichen Höhenunterschieden das übliche Verfahren der trigonometrischen Höhenbestimmung aus gegenseitigen Zenithdistanzmessungen mit Rücksicht auf die durch die Refraktion entstehende Unsicherheit zweifellos als ein solches angesehen werden können, welches Unterschiede der Meereshöhen giebt. Weniger günstig ist die einseitige Messung, was wir jedoch nicht weiter verfolgen wollen.

Wenn man die Differentialformel für *barometrisches Höhenmessen* (8) § 11 S. 576 betrachtet und erwägt, daß  $g = -\frac{dW}{dh}$ , dem Differentialquotienten des Potentials nach der Höhe, ist, so scheint es leicht, aus barometrischen Messungen an zwei Punkten auf ihre Potentialdifferenz zu schließen. Indessen kompliziert sich der Zusammenhang wegen der Abhängigkeit der Luftdichtigkeit von der Höhe. Man bleibt deshalb besser bei dem üblichen Entwicklungsgange der Formel für barometrisches Höhenmessen stehen; wir verweisen insbesondere auf *Jordan, Handbuch der Vermessungskunde*, Bd. 1, 1877, S. 493 Formel (33), welche letztere wir mit der kleinen Modifikation adoptieren, daß bei der Abhängigkeit der Schwerkraft von der geographischen Breite gemäß unseren Untersuchungen der Faktor 0,00265 anstatt 0,002578 angewandt wird. Doch sind wir völlig damit einverstanden, daß die Anziehung des Terrains nicht zu berücksichtigen ist (sowohl in (33) wie bei Reduktion der Quecksilberbarometerstände auf gleiche Schwerkraft); denn dieses entspricht ganz den auf S. 248 § 37 erwähnten Erfahrungen. Die Formel lautet (für Metermaß) in unseren Bezeichnungen:

$$h_{1,2} = 18400 (1 + 0,003665 t) \left( 1 + \frac{3e}{8b} \right) F \log \frac{p_1}{p_2} \quad (4)$$

mit

$$F = (1 + 0,00265 \cos 2B) \left( 1 + \frac{2H}{R} \right).$$

Hierin sind  $p_1$  und  $p_2$  die in absolutem Maße gemessenen Luftdrücke für die Flächeneinheit an den beiden, zunächst in derselben Vertikalen gedachten Stationen, ferner sind  $B$ ,  $H$ ,  $t$  und  $e:b$  bzw. die mittlere geographische Breite, mittlere Meereshöhe, mittlere Lufttemperatur in Centesimalgraden und mittleres Verhältnis des Dunstdruckes zum Barometerstand.

Multipliziert man  $h_{1,2}$  mit der mittleren Schwerkraft  $g_m$  der Säule und nimmt für  $g_m$  den normalen Wert, so folgt die Potentialdifferenz beider Stationen

$$W_1 - W_2 = 18400 (1 + 0,003665 t) \left( 1 + \frac{3e}{8b} \right) \mathfrak{G} \log \frac{p_1}{p_2}, \quad (5)$$

worin  $\mathfrak{G}$  die normale Schwerkraft im Meeresniveau für 45° Breite bezeichnet (S. 97 § 20). Dieser Ausdruck ist verhältnismäßig genauer als derjenige für  $h_{1,2}$ , weil er von den durch die Unkenntnis des genauen Betrages der Schwerkraft erzeugten Unsicherheiten wesentlich nur noch diejenige enthält, die in der Konstanten 18400 durch Einführung des normalen Wertes der Schwerkraft von *Paris* (wo *Regnault* die Dichtigkeit der Luft bestimmte) anstatt ihres wirklichen Wertes entsteht.

Übrigens ist diese Unsicherheit sehr klein, und selbst die entsprechende in der Formel für  $h_{1,2}$  ist im Vergleiche zu anderen Fehlereinflüssen unerheblich.

Die Größe  $h_{1,2}$  ist für übereinander liegende Stationen der Unterschied ihrer Meereshöhen. Liegen die Stationen nicht übereinander, so ist  $h_{1,2}$  der Abstand der Niveauflächen der betreffenden Punkte, gemessen in der geographischen Breite  $B$ , die man willkürlich annehmen kann, in der Regel aber gleich  $\frac{1}{2} (B_1 + B_2)$  setzt. Hieraus ersieht man, daß der

barometrisch bestimmte Wert  $h_{1,2}$  mit dem unmittelbaren Ergebnis eines geometrischen Nivellements zwischen beiden Punkten im allgemeinen nicht übereinstimmen wird. Der Unterschied beider ist von derselben Ordnung wie der Unterschied des unmittelbaren Ergebnisses des geome-

trischen Nivellements und der Höhe des oberen Punktes über der Niveaufläche des unteren (vergl. im 7. Kap. § 1 S. 501). Eine strenge Vergleichung würde die Aufstellung der Potentialdifferenzen erfordern.

Jedenfalls aber ist der Unterschied nicht so bedeutend, daß man nicht das Ergebnis des geometrischen Nivellements für  $h_{1,2}$  mit  $2B = B_1 + B_2$  in Formel (3) einführen dürfte, um rückwärts auf die mittlere Temperatur  $t$  der Luftsäule zu schließen. Dieser Vorgang ergibt die mittlere Lufttemperatur bei mäßig großen Höhenunterschieden um so besser befreit von den Anomalieen der Lufttemperatur in der Nähe des Terrains, je genauer diese Anomalieen auf beiden Stationen dieselben sind, weil in der Differenz der Gewichte der bis zur Grenze der Atmosphäre gedachten Luftsäulen über den letzteren die Einflüsse der erwähnten Temperaturanomalieen sich subtrahieren. Beeinträchtigend für die Güte des Resultates ist ein großer Horizontalabstand der Stationen, insofern mit dem letzteren der Einfluß einer Neigung der Luftschichten gleicher Dichtigkeit gegen die Niveauflächen zunimmt.

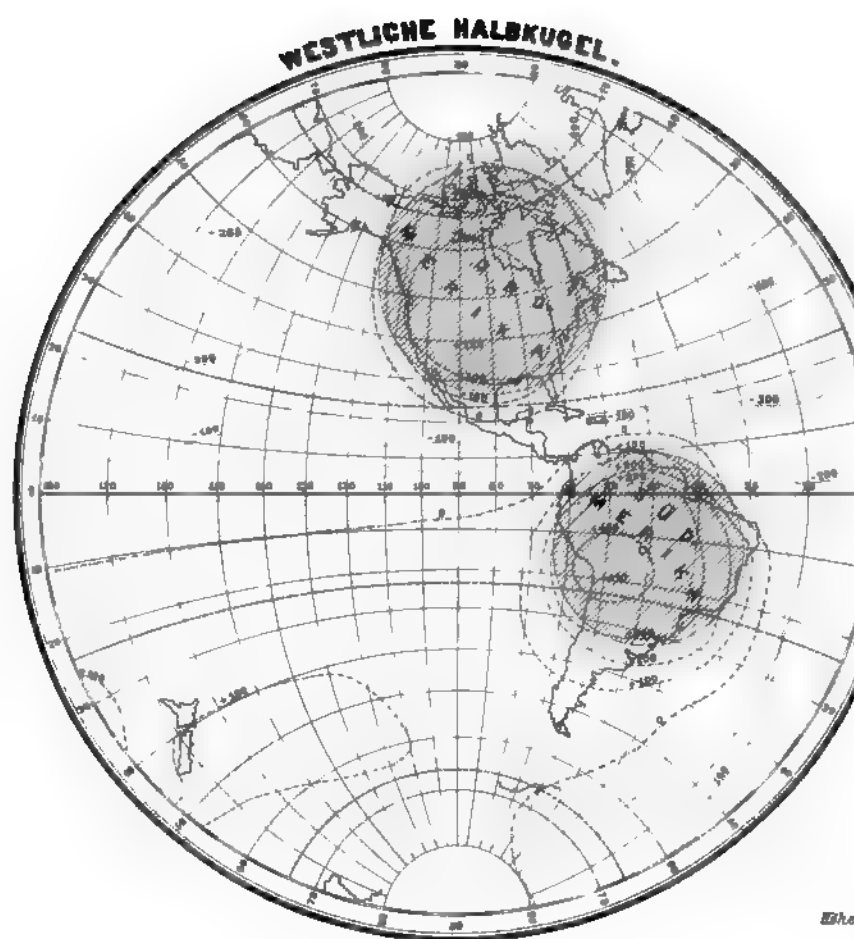




DEFON

Tafel I.

DES GEOIDS DURCH DIE



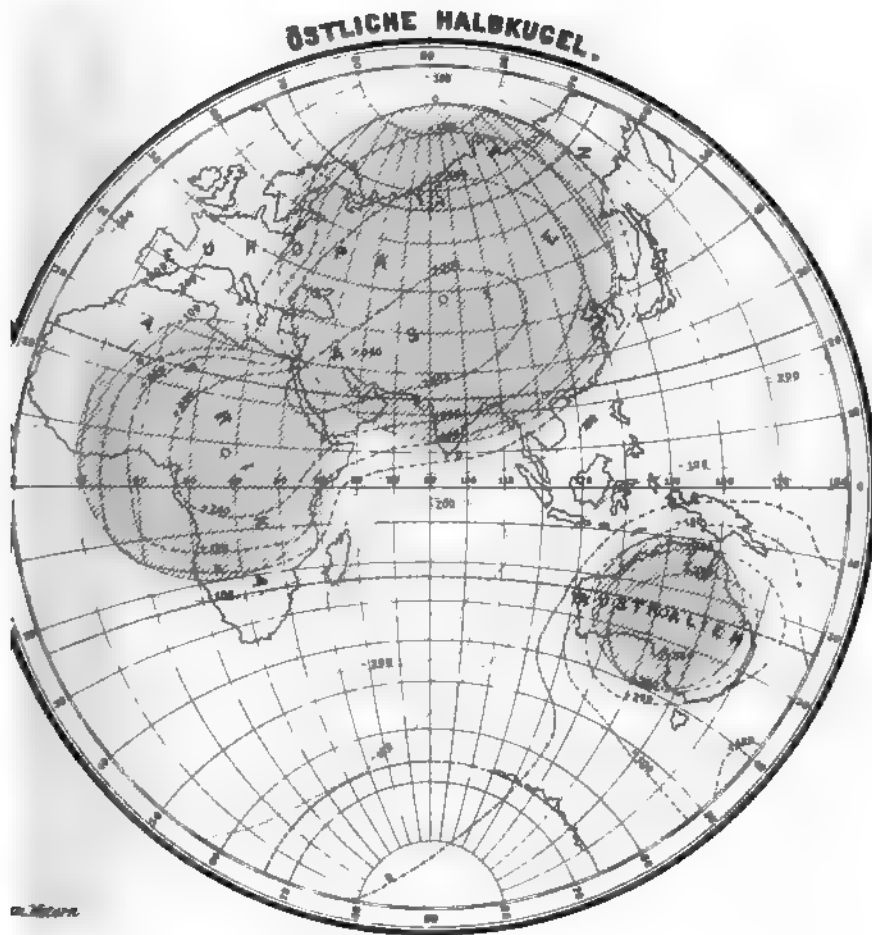
Geograph. Anstalt von

Leipzig.

**MATION**

**: KONTINENTALMASSEN.**

**Fig. 4, 532.**



**Dr. Meier.**

**Wagner & Debes, Leipzig.**

**IG. Teubner**

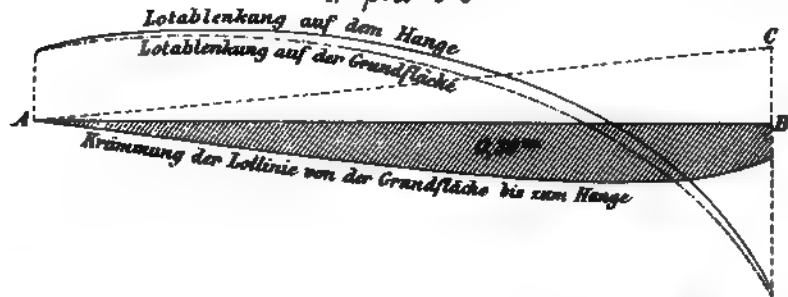
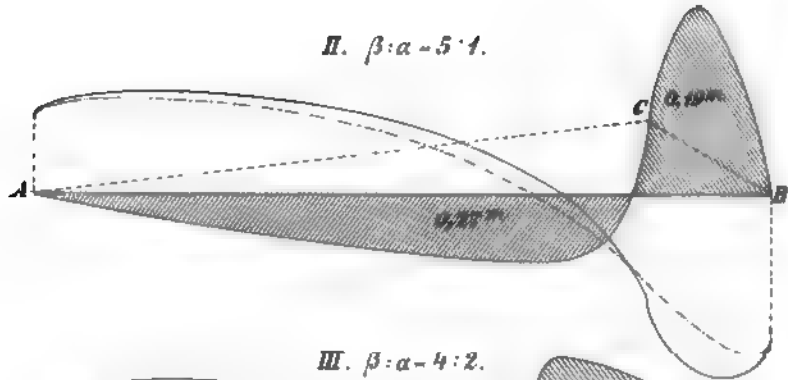
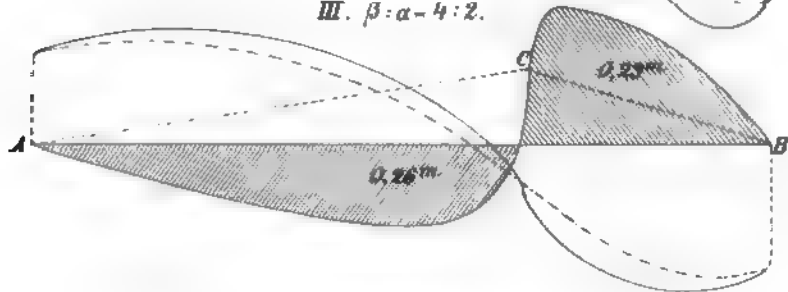
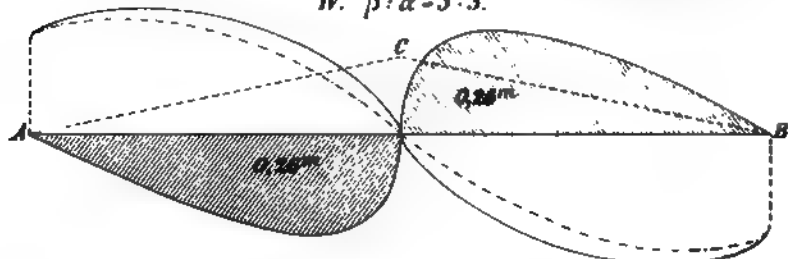






**LOTABLENKUNGEN**

im mittleren Querprofil

 $AB = 2500^m$ ,  $h_0 = 2500^m$ ,  $c = 10$ .I.  $\beta : \alpha = 6 : 0$ II.  $\beta : \alpha = 5 : 1$ .III.  $\beta : \alpha = 4 : 2$ .IV.  $\beta : \alpha = 3 : 3$ .

Maßstab für die Lotablenkung:  
1 mm = 2°  
1 mm der schraffierten Fläche = 0,6 mm Nivellementfehler.

Maßstab für die Lotkrümmung:  
1 mm = 0,5°  
1 mm der schraffierten Fläche = 0,6 mm Nivellementfehler.

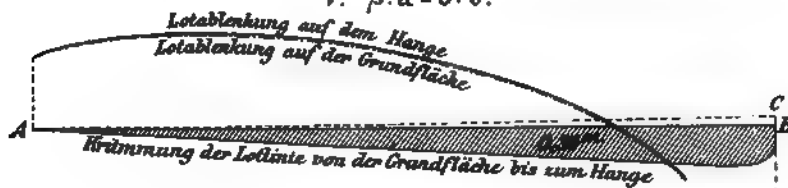
# I NIVELLEMENTSFEHLER

Kap. 7, § 10.

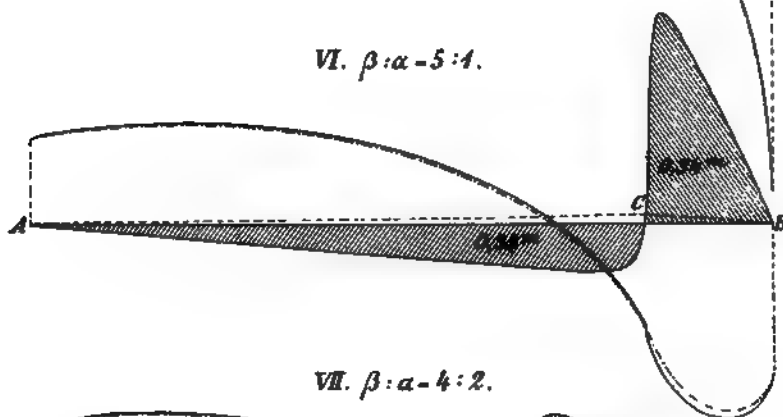
langgestreckter Gebirgstrücken.

$$AB = 250000^m. \quad h_0 = 2500^m. \quad c = 100$$

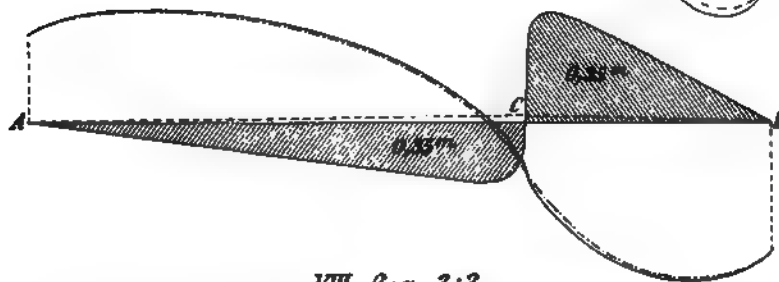
$$V. \quad \beta : \alpha = 6 : 0.$$



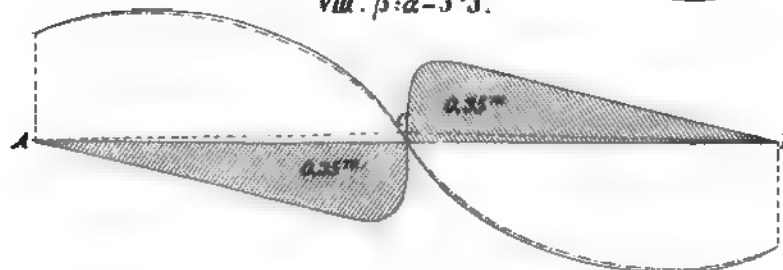
$$VI. \quad \beta : \alpha = 5 : 1.$$



$$VII. \quad \beta : \alpha = 4 : 2.$$



$$VIII. \quad \beta : \alpha = 3 : 3.$$



Maßstab für die Lotablenkung.

$1^m = 2''$

$1^m$  der schraffierten Fläche =  $1,2^m$

Maßstab für die Lotkrümmung.

$1^m = 0,1''$

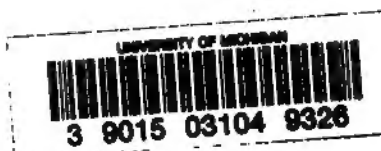
Nivellamentsfehler.

Lith v. Eschschach & Schaefer, Leipzig.









X

110- 2 Bde

2.9.64

Ac

**DO NOT REMOVE  
OR  
MUTILATE CARD**

